RUPRECHT-KARLS-
UNIVERSITÄT
HEIDELBERG

Einführung in die Grundlagen der Fehlerrechnung

Bestimmung von Messunsicherheiten

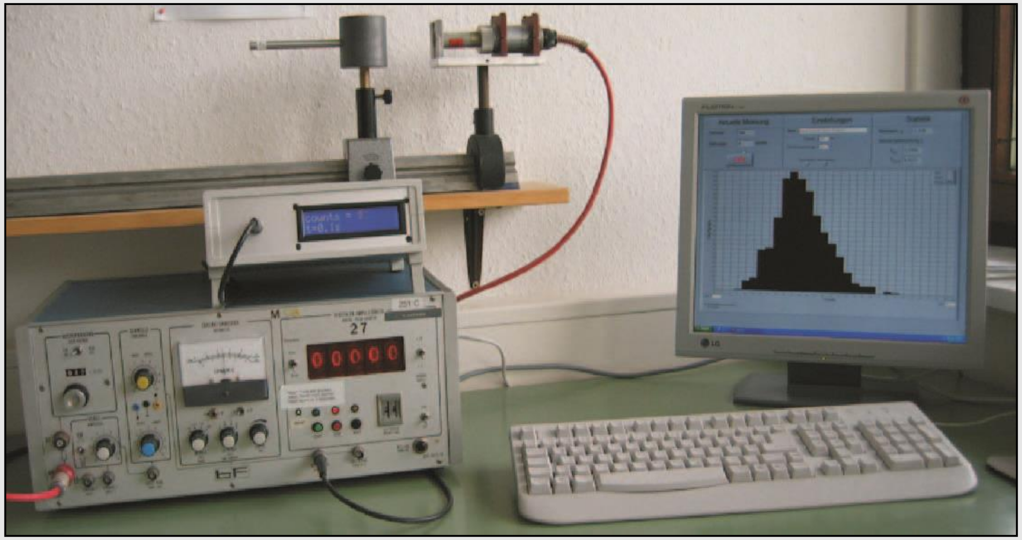
Jens Wagner, Physikalisches Institut

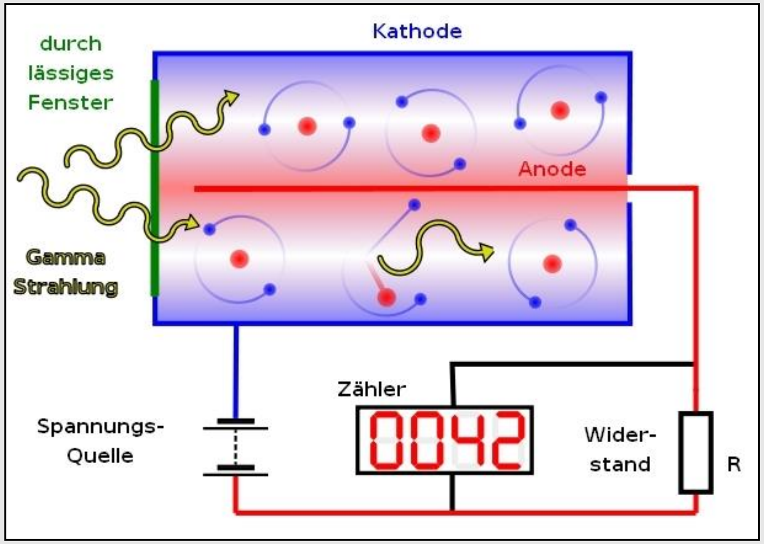
Gliederung

- ► Angabe von Messergebnissen
- ► Ursache und Arten von Messunsicherheiten
- ► Berechnung von zufälligen Messunsicherheiten
- ► Gaussverteilung & Fehlerfortpflanzung
- ► Graphische Darstellung

Experimentelle Demonstration

Versuch 251: Statistik des radioaktiven Zerfalls





Fehlerangabe

Warum ist die Aussage:

“Ich habe die Elementarladung gemessen,

sie beträgt $1{,}602 \times 10^{-19}$ Coulomb”

falsch ?

Jede Messung ist mit einem Messfehler behaftet.

Es gibt keine Messung die unendlich genau ist!

Charles Augustin de Coulomb
(1736–1806)

Zwei unabhängige Messungen ergeben ungleiche Resultate:

Nur wenn man die jeweiligen Messfehler angibt, kann man

diskutieren, ob die beiden Messungen - *innerhalb der Fehlergrenzen* -

in Übereinstimmung sind oder nicht !

Fehlerangabe

Um ein theoretisches Modell experimentell durch eine Messung zu überprüfen, muss die Qualität und die Aussagekraft der Messung bekannt sein.

Beispiel:

Die Bestimmung der Elementarladung ergab folgende Ergebnisse:

Messung 1: $e = (1{,}7 \pm 0{,}1) \times 10^{-19}$ C

Messung 2: $e = (1{,}62 \pm 0{,}01) \times 10^{-19}$ C

Welche Aussage kann über die beiden Messungen getroffen werden?

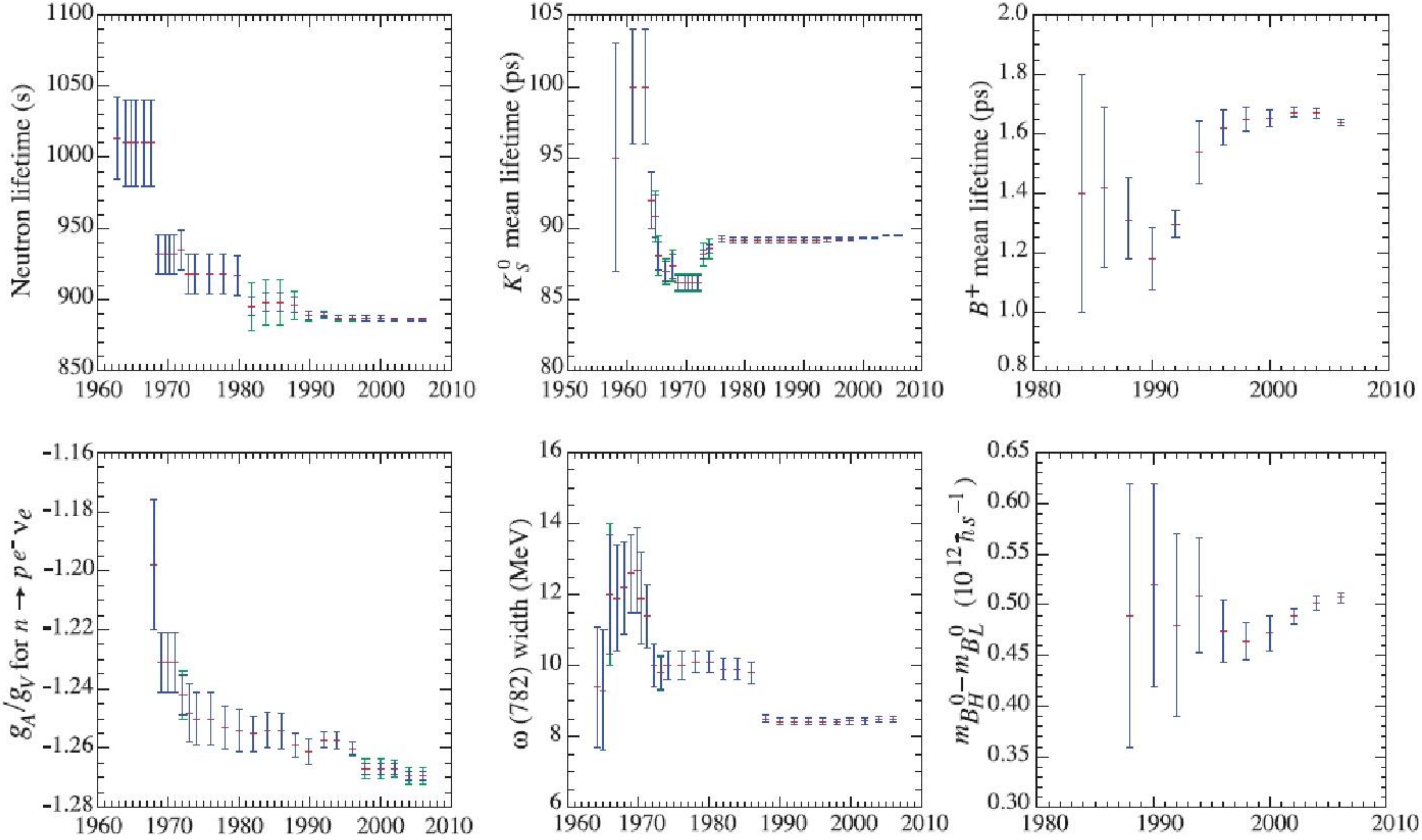
Messung 1 ist konsistent mit dem Literaturwert

Messung 2 ist zwar präziser, stimmt aber innerhalb der Fehlergrenzen nicht mit dem Literaturwert überein!

Robert Andrews Millikan (1868–1953)

Wir wollen eine realistische Fehlerabschätzung im Praktikum !

Fehlerangabe



Schwankungen einer Messgröße

Spannungsmessung im Versuch
„Bestimmung der Boltzmannkonstante“

Werden Messungen unter identischen Bedingungen wiederholt, so erhält man im Allgemeinen nicht denselben Messwert!

- Wie sind die Messwerte verteilt?
- Welche Größe ist die beste Schätzung des wahren Wertes?
- Wie groß ist die Genauigkeit der Messung?

Angabe einer Messgröße

Ziel einer Messung:
bestimme einen Schätzwert x_B für die betreffenden Messgröße x, der zusammen mit der Messunsicherheit Δx zur Kennzeichnung eines Wertebereichs für den wahren Wert der Messgröße dient.

- ► Beste Schätzung des „wahren“ Wertes x_B
- ► Messunsicherheit Δx („Fehler“)
- ► Physikalische Einheit

Angabe des absoluten Fehlers

$$x = x_B \pm \Delta x$$

$e = (1{,}62 \pm 0{,}03) \times 10^{-19}$ C

Angabe des Relativfehlers

$$x = x_B \pm (\Delta x / x_B) \times 100$$

$e = 1{,}62 \times 10^{-19}$ C $\pm$ 1,9 %

zugehörige physikalische Einheit

gleiche Zehnerpotenzen für Messwert und Messunsicherheit

sinnvolle Zahl der angegebenen Stellen (eine, max. zwei signifikante Stellen)

Anzahl signifikanter Stellen

Geben Sie eine höchstens zwei signifikante Stellen an.

2 signifikante Stellen:
Ist die erste signifikante Stelle ein 1 oder 2, so werden zwei signifikante Stellen angegeben.

$2.5725413 \pm 0.02432 \rightarrow 2.572 \pm 0.024$

1 signifikante Stellen:
Ist die erste signifikante Stelle 3 oder größer, so wird eine signifikante Stelle angegeben.

$2.5725413 \pm 0.623542 \rightarrow 2.6 \pm 0.6$

Messunsicherheiten: Grobe Fehler

z.B. verursacht durch:

defekter Messgeräte

falsches Ablesen von Skalen

Irrtum bei der
Protokollierung
oder Auswertung

Grobe Fehler können durch sorgfältiges Experimentieren ausgeschlossen werden und sollten im Praktikum nicht auftreten !

Messunsicherheiten: Systematische Fehler

Systematische Fehler

führen zu einseitigen Abweichungen vom „wahren Wert“.
Der Messwert ist entweder immer größer oder immer kleiner als der „wahre Wert“.

Ursachen?

Unvollkommenheit der Messgeräte
► Eich- und Justierfehler, Nichtlinearität, Reibung, ...
teilweise bekannt (Herstellerangaben: Genauigkeitsklassen)

Rückwirkung des Messgerätes (Prozesses) auf die Messgröße
► Innenwiderstand, Verformung, Erhitzung

Umwelteinflüsse
► Auftrieb, elektromagnetische Felder, Temperatur, Luftfeuchtigkeit, ...

Systematische Abweichungen sind:
► prinzipiell erfassbar
► oft aber schwer zu erkennen
► reproduzierbar und somit zumindest teilweise korrigierbar

Messunsicherheiten: Statistische Fehler

► Wiederholung von Messungen (unter gleichen Bedingungen):
einzelne Messwerte werden sich voneinander unterscheiden

► Statistische Fehler streuen „links“ und „rechts“ um den wahren Wert
(in vielen Fällen sogar symmetrisch um den wahren Wert)

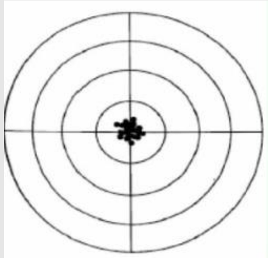
► Zufällige Abweichungen sind unvermeidlich, aber:

der statistischen Analyse zugänglich:
Die Größe zufälliger Messabweichungen kann mit Hilfe
von Wahrscheinlichkeitsaussagen bestimmt werden.

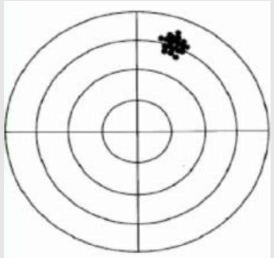
Durch Mehrfachmessungen können statistische
Fehler prinzipiell beliebig klein gehalten werden !

Messunsicherheiten

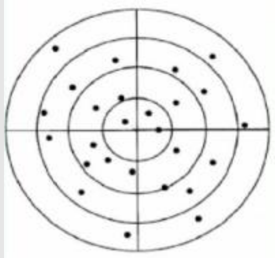
Beispiel syst. und stat. Fehler: Position eines Sterns



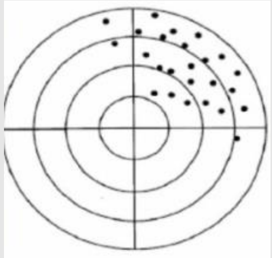
Stat. Fehler: klein
Syst. Fehler: klein



Stat. Fehler: klein
Syst. Fehler: groß



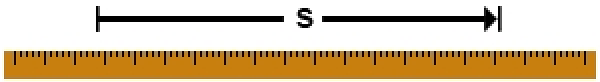
Stat. Fehler: groß
Syst. Fehler: klein



Stat. Fehler: groß
Syst. Fehler: groß

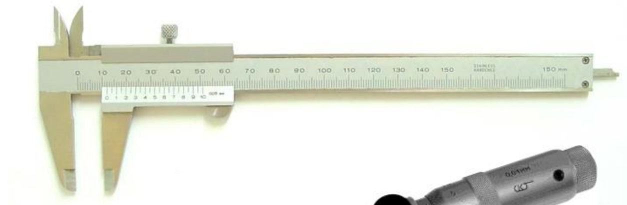
Messunsicherheit: Beispiel Streckenmessung

Lineal



Auflösung: 1 mm

Schieblehre



Auflösung: 0,05 mm

Mikrometerschraube

Auflösung: 0,01 - 0,001 mm

Messunsicherheit?

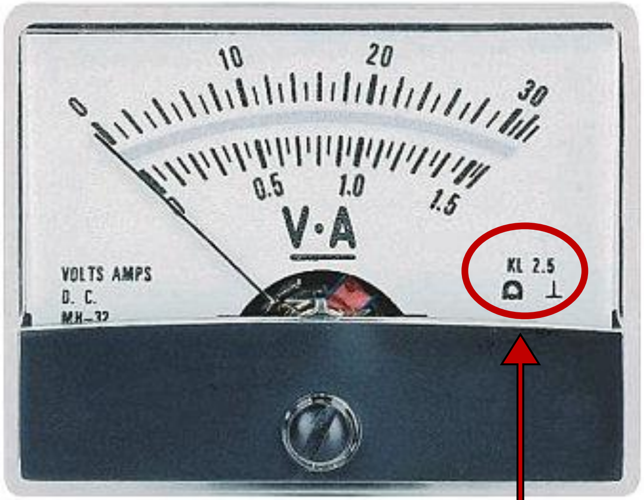
Falls keine Messgenauigkeiten angegeben sind, kann der Fehler aus der Skalenteilung abgeschätzt werden.

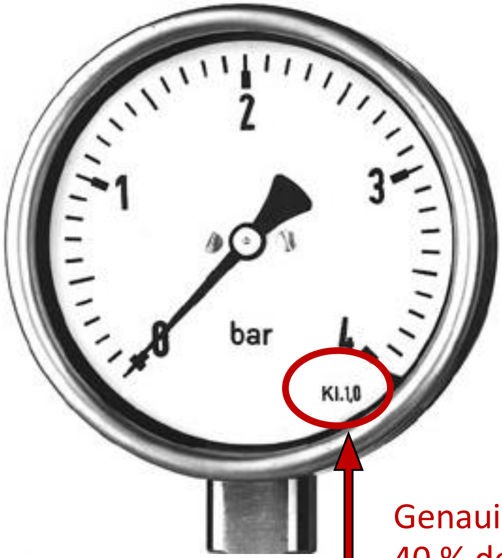
Messunsicherheit: 30% – 50% der Skalenteilung

Messunsicherheit: Beispiel Analoginstrumente

An vielen Analogmessinstrumenten ist eine Genauigkeitsklasse angegeben.

Genauigkeitsangabe: Max. Unsicherheit in % des Skalenendwertes





Genauigkeit: 40 mbar
40 % der Skalenteilung

Genauigkeitsklasse

Messunsicherheit: Beispiel Digitalinstrumente

Im Praktikum: Genauigkeitsangabe der Bedienungsanleitung entnehmen !

7. Elektrische Angaben

Bemerkung: Die Messgenauigkeit wird angegeben als Summe aus

- einem relativen Anteil des Messwertes und
- einer Anzahl von Digit (d.h. Zahlenschritte der letzten Stelle).

Diese Messgenauigkeit gilt bei Temperaturen von 18 °C bis 28 °C und einer relativen Luftfeuchtigkeit kleiner 80 %.

7.1 Gleichspannungsbereiche

Der Eingangswiderstand beträgt 10 MΩ (im 400 mV-Bereich 1 GΩ).

Messbereich	Auflösung	Messgenauigkeit	Überlastschutz
600 mV	100 μV	± (0,5 % des Messwertes + 2 Digit)	1000 V_{DC}
6 V	1 mV	± (0,5 % des Messwertes + 2 Digit)	1000 V_{DC}
60 V	10 mV	± (0,5 % des Messwertes + 2 Digit)	1000 V_{DC}
600 V	100 mV	± (0,5 % des Messwertes + 2 Digit)	1000 V_{DC}
1000 V	1 V	± (0,5 % des Messwertes + 2 Digit)	1000 V_{DC}

7.2 Wechselspannungsbereiche

Der Eingangswiderstand beträgt 10 MΩ parallel 100 pF.

Messbereich	Auflösung	Messgenauigkeit [1] im Frequenzbereich 50 Hz - 500 Hz	Überlastschutz
600 mV	100 μV	± (0,9 % des Messwertes + 5 Digit) [2]	750 V_{eff}
6 V	1 mV	± (0,9 % des Messwertes + 5 Digit) [2]	750 V_{eff}

Beispiel:
Es wurde eine Wechselspannung von 4,736 V gemessen

Fehler: 0,9% von 4,736 = 0,043 V, 5 Digit = 5 mV

→ Messunsicherheit: 0,048 V   Ergebnis U = (4,74 ± 0,05) V

Messunsicherheit: Beispiel Stoppuhr

Beispiel:
Zeitmessung mit Handstoppuhr

Auflösung: 1/100 s

Messunsicherheit ?

zusätzlicher Fehler durch das endliche Reaktionsvermögen des Experimentators, Reaktionszeit ~ 0,2 s – 0,3 s
(Bei Differenzmessungen kleiner!)

Statistische Fehler

Um statistische Fehler zu bestimmen müssen mehrere Messungen unter gleichen Versuchsbedingungen durchgeführt werden: ► Stichprobe von N Messungen

Vorgabe:

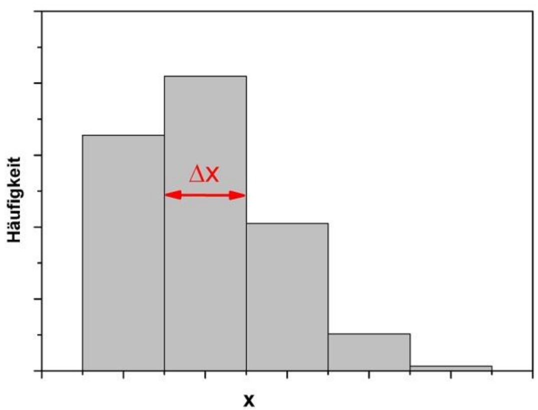
► Unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen

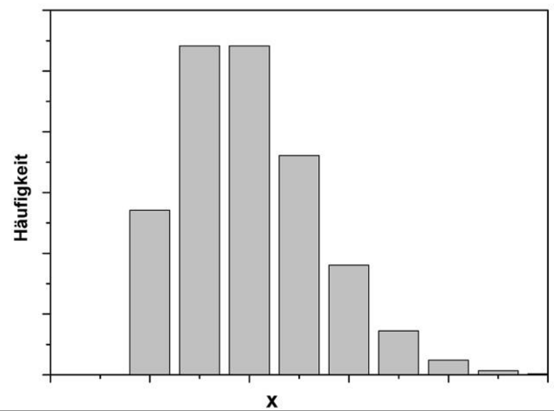
Gesucht:

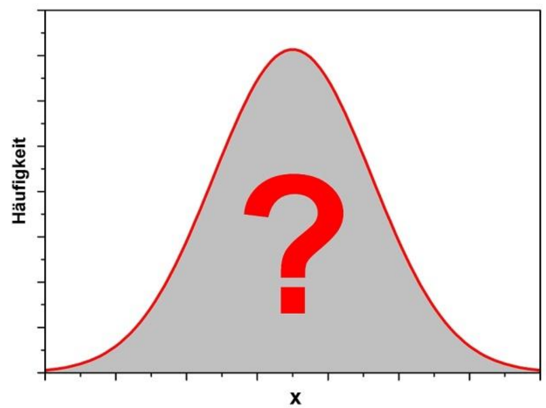
► Beste Schätzung des wahren Wertes x_B

► Aussagen über Genauigkeit der Messung

Graphische Darstellung als Histogramm: Häufigkeit der Ereignisse in einem Intervall $[x_i, x_i+\Delta x]$







Experimentelle Demonstration

Gaußverteilung

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}\right)$$

P(x) heißt Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2

Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

Normierung: $$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx = 1$$

Erwartungswert: $$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x)\,dx$$

Varianz: $$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot P(x)\,dx$$

Interpretation:

- ► Wahrscheinlichster Wert μ ist die beste Schätzung des „wahren Wertes“
- ► Breite σ der Verteilung ist ein Maß für die Messgenauigkeit !

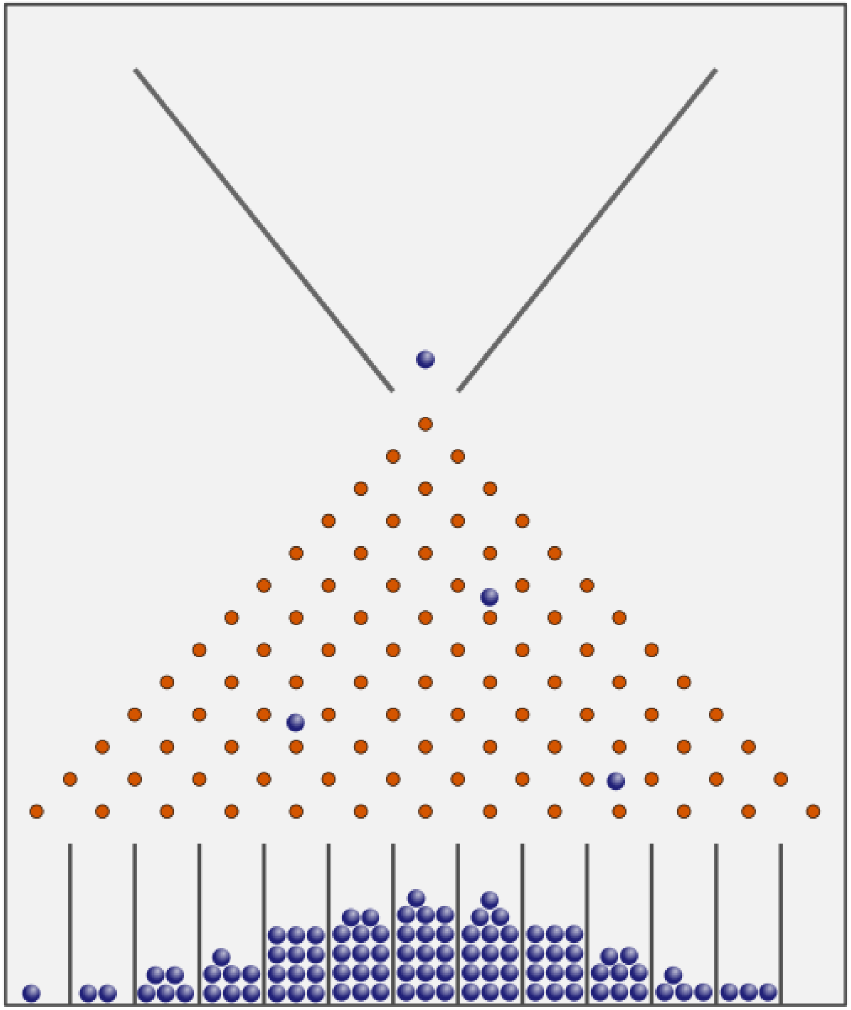
Gaußverteilung

Zentraler Grenzwertsatz

Die Verteilungen der Summen von stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen streben mit wachsendem Stichprobenumfang gegen die Gaußsche Normalverteilung.

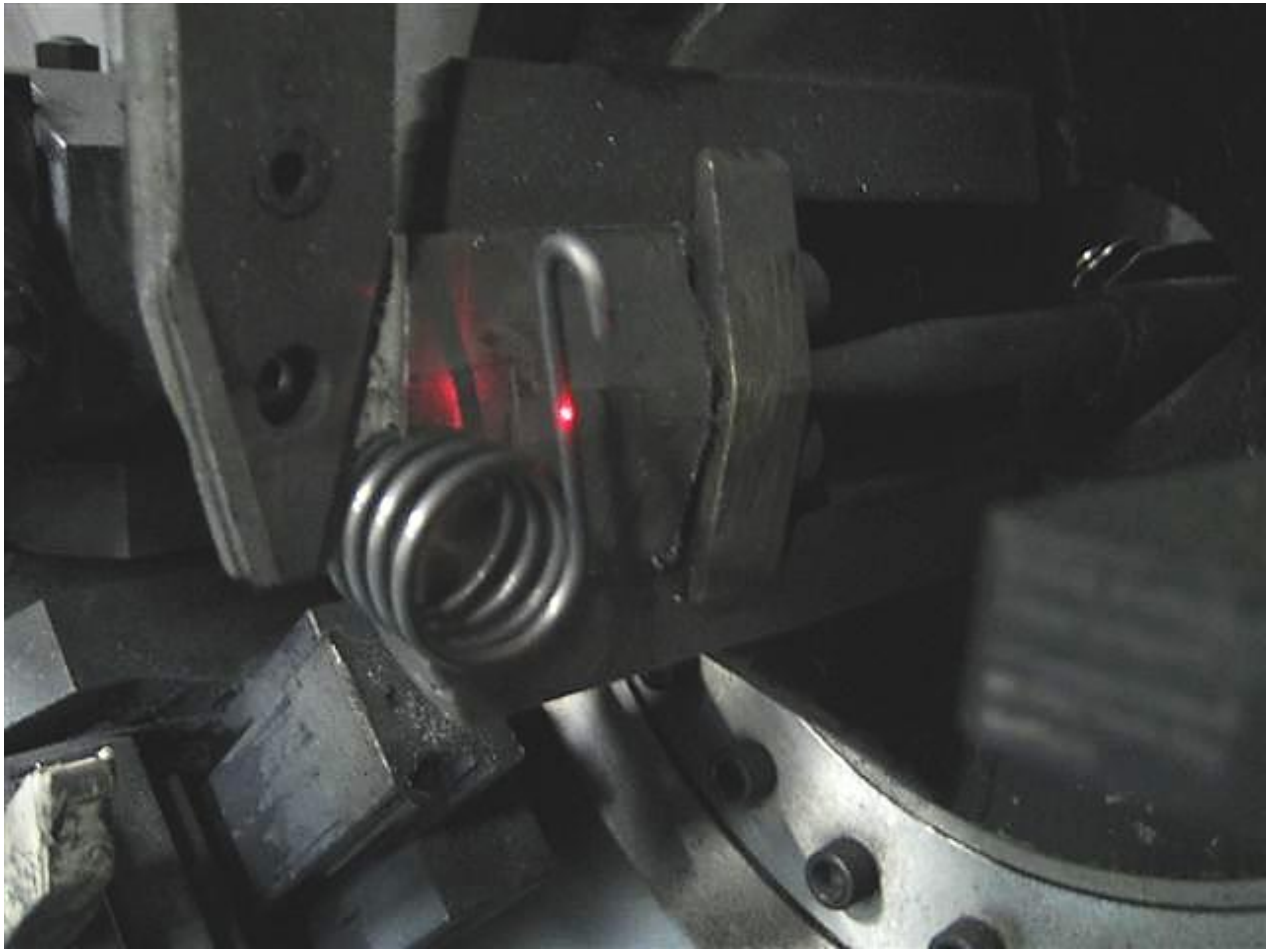
Beispiele:

- Streuprozesse
- Brownsche Bewegung
- Thermisches Rauschen
- …



Zentraler Grenzwertsatz

Beispiel aus der Industrie



Beispiel aus der Industrie

Gaußverteilung: σ-Abweichung

Aufgabe 4 (AB Fehlerrechnung)

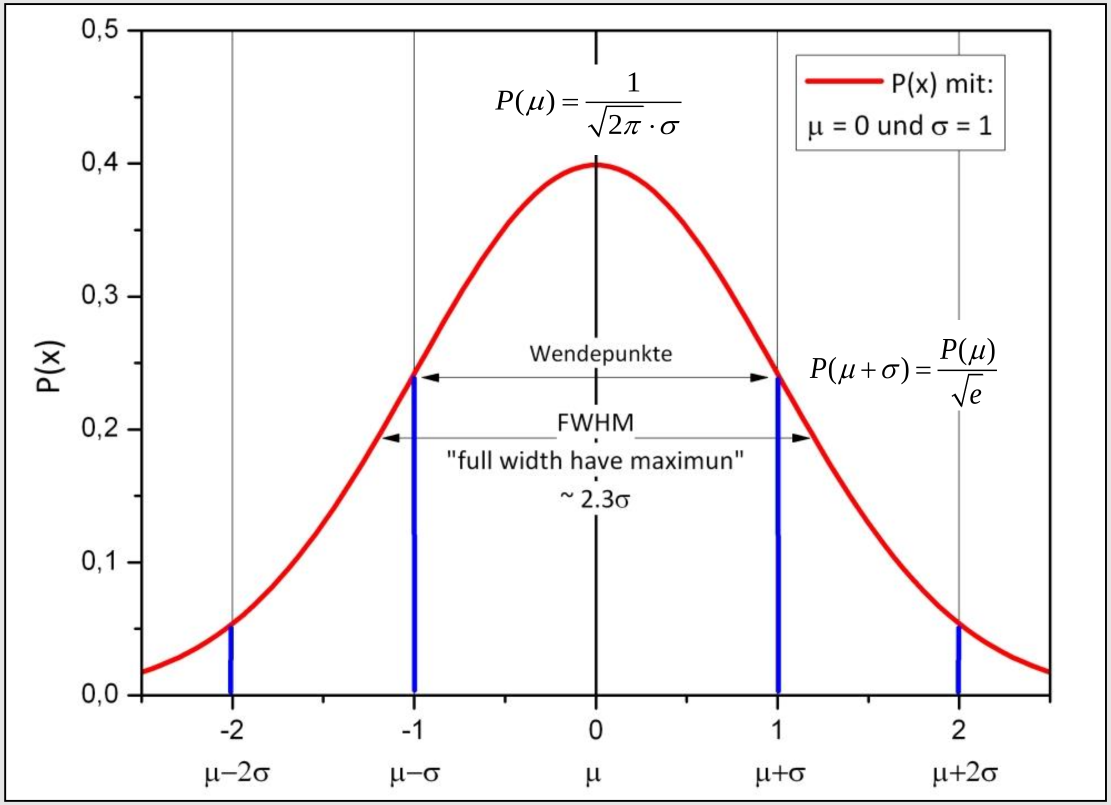
Interpretation des Ergebnisses

$x = \mu \pm \sigma$ bzw. $x = \overline{x} \pm \Delta x$

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} P(x)\,dx = 0{,}683$$

$$\int_{-2\sigma}^{2\sigma} P(x)\,dx = 0{,}955$$

$$\int_{-3\sigma}^{3\sigma} P(x)\,dx = 0{,}997$$

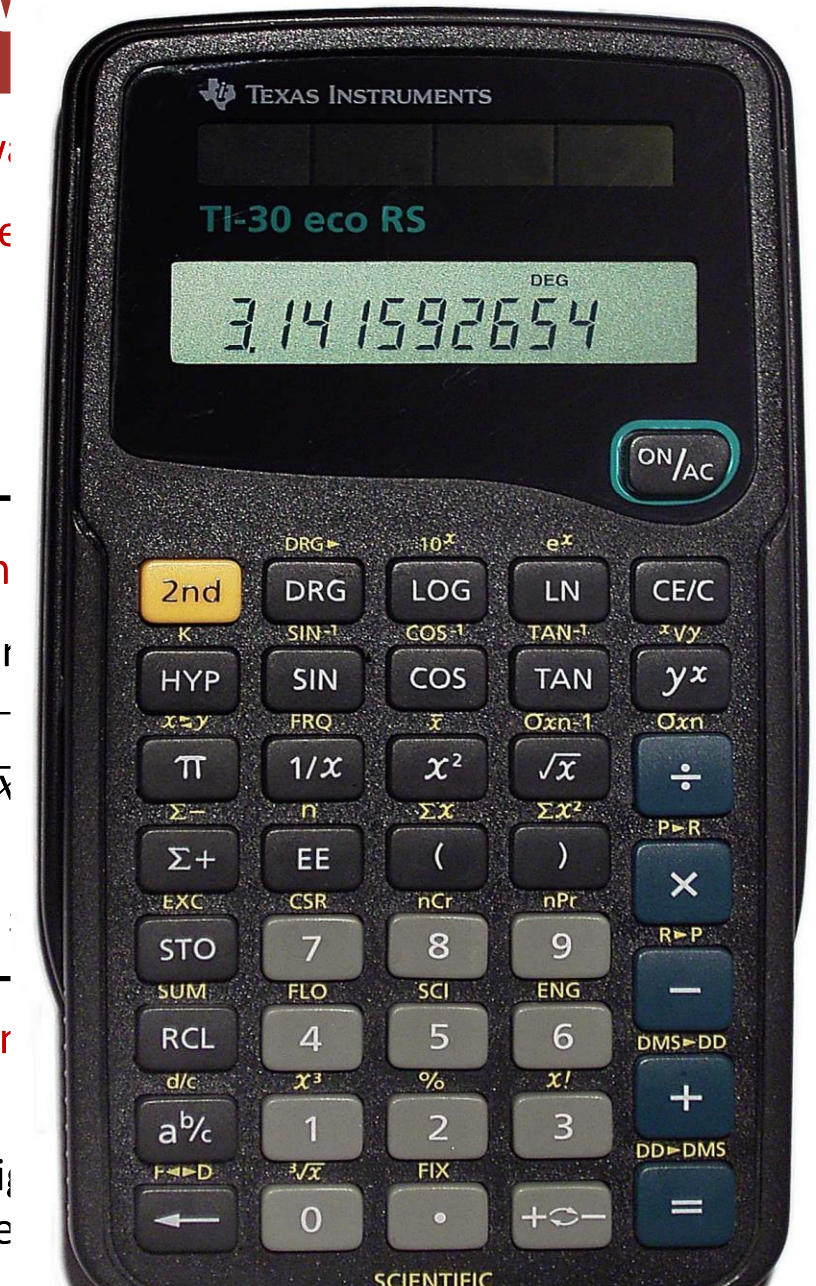


Als beste Schätzung für den „wahren Wert“ wurde bei einer Messung der Wert $\overline{x}$ bestimmt. Der wahre Wert liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% im Intervall $[\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma]$ (1σ-Umgebung).

Schätzw… …tichprobe

Schätzwert für den Erw…

Der arithmetische Mitte… …Wertes



Schätzwert für die Stan…

Breite der Verteilung u… …ehler einer Einzelmessung

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} \ldots}$$

$$\ldots = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}$$

kleine … …wird unterschätzt!

Schätzwert für die Sta… des Mittelwerts

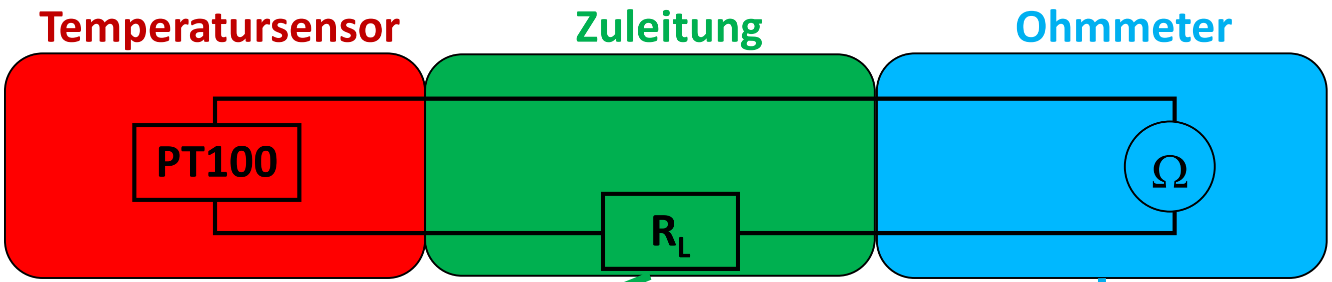
… Fehler des Mittelwertes

10 mal höhere Genaui…
100 mal mehr Messwe…

$$\ldots = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}$$

Mittelwert, Fehler Einzelmessung, Fehler des Mittelwerts

Beispiel Temperaturmessung mit PT100



Anzeigewerte

140.12Ω
140.13Ω
140.19Ω
140.08Ω
140.11Ω
140.12Ω
140.09Ω
140.10Ω
140.11Ω

Systematischer Fehler (Zuleitungswiderstand)

$sys = R_L = 1.00\ \Omega$

Arithmetischer Mittelwert

$m = 140.10\ \Omega$

Herstellerangabe (Genauigkeit Messgerät)

$a = 0.15\ \Omega$

Standardabweichung Des Mittelwerts

$sm = 0.10\ \Omega$

Korrektur des Mittelwertes m mit dem bekannten systematischen Fehler

$m_{korrig} = m - sys = 139.10\ \Omega$

Kombinierte Messunsicherheit Messgerät und Messunsicherheit

$u_{res}^2 = sm^2 + a^2 \quad u_{res} = 0.18\ \Omega$

Vollständiges Messergebnis:

$(m - sys) \pm u_{res} = 139.10\ \Omega \pm 0.18\ \Omega$

Arbeitsblatt Fehlerrechnung

1. Gegeben seien die folgenden 5 Einzelmessungen einer Länge a (in mm):

   $\{71, 72, 72, 73, 71\}$.

   Bestimmen Sie a) den Mittelwert, b) die Standardabweichung der Einzelmessung sowie c) den mittleren Fehler des Mittelwertes.

Mittelwert

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{359}{5} mm = 71.8mm$$

Standardabweichung der Einzelmessung

$$S_a = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{a} - a_i)^2} = \sqrt{\frac{2.8}{4}} \approx 0.84mm$$

Mittlerer Fehler des Mittelwertes

$$S_{\bar{a}} = \frac{S_a}{\sqrt{n}} \approx \frac{0.84mm}{\sqrt{5}} \approx 0.37mm$$

Fehlerfortpflanzung

In der Regel kann eine physikalische Größe nicht direkt gemessen werden, sondern wird aus einer oder mehreren Messgrößen bestimmt.

Beispiel:
Bestimmung der Elementarladung nach Millikan

$$q = (v_f + v_s)\frac{6\pi d}{U}\sqrt{\frac{9 v_f \eta^3}{2\rho g}}$$

Die Messgrößen $v_f, v_s, U, d, \eta, \rho, g$ sind fehlerbehaftet

Welchen Einfluss haben die Einzelfehler der gemessenen Größen auf die zu berechnende physikalische Größe?

Fehlerfortpflanzung

Der Einfluss einer fehlerbehafteten Eingangsgröße *x* auf das Ergebnis *f(x)* kann mittels der Taylorreihe abgeschätzt werden:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \ldots$$

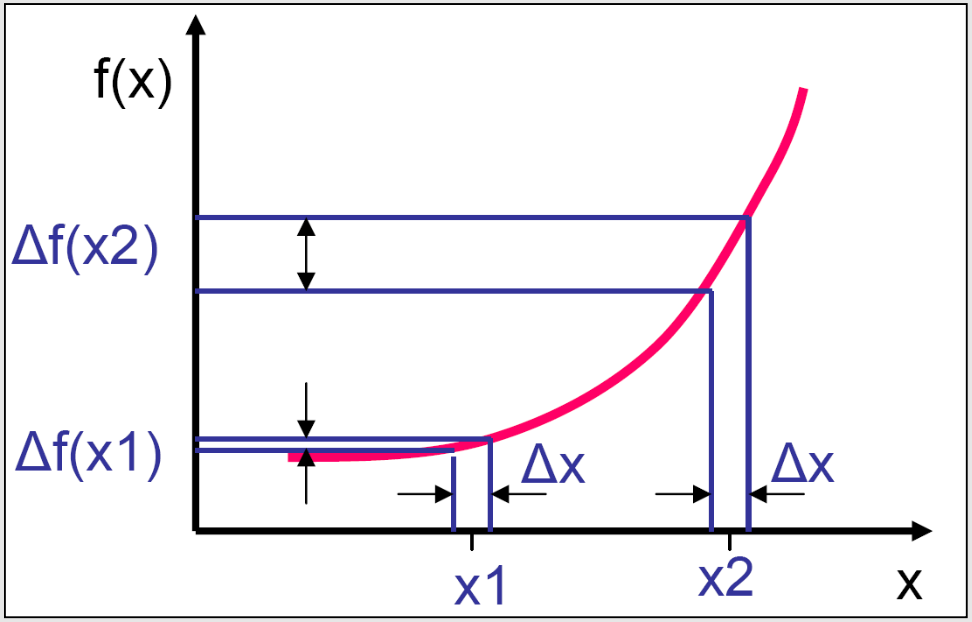
Bei genügend kleinem $|\Delta x|$ kann die Reihenentwicklung nach dem linearen Glied abgebrochen werden *(Näherungslösung!)*

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\Delta x + Ordnung[(\Delta x)^2]$$

Wie wirkt sich der Fehler *Δx* einer Messgröße *x* auf eine abgeleitete physikalische Größe *f(x)* aus?

$$\Delta f(x_2) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_2)\Delta x$$

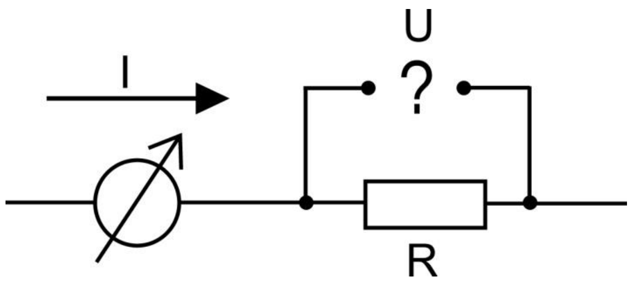
$$\Delta f(x_1) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_1)\Delta x$$



Fehlerfortpflanzung

Beispiel
Bestimmung der Spannung nach dem Ohmschen Gesetz:

Fließt durch einen Widerstand R ein Strom I, so fällt am Widerstand die Spannung U ab.

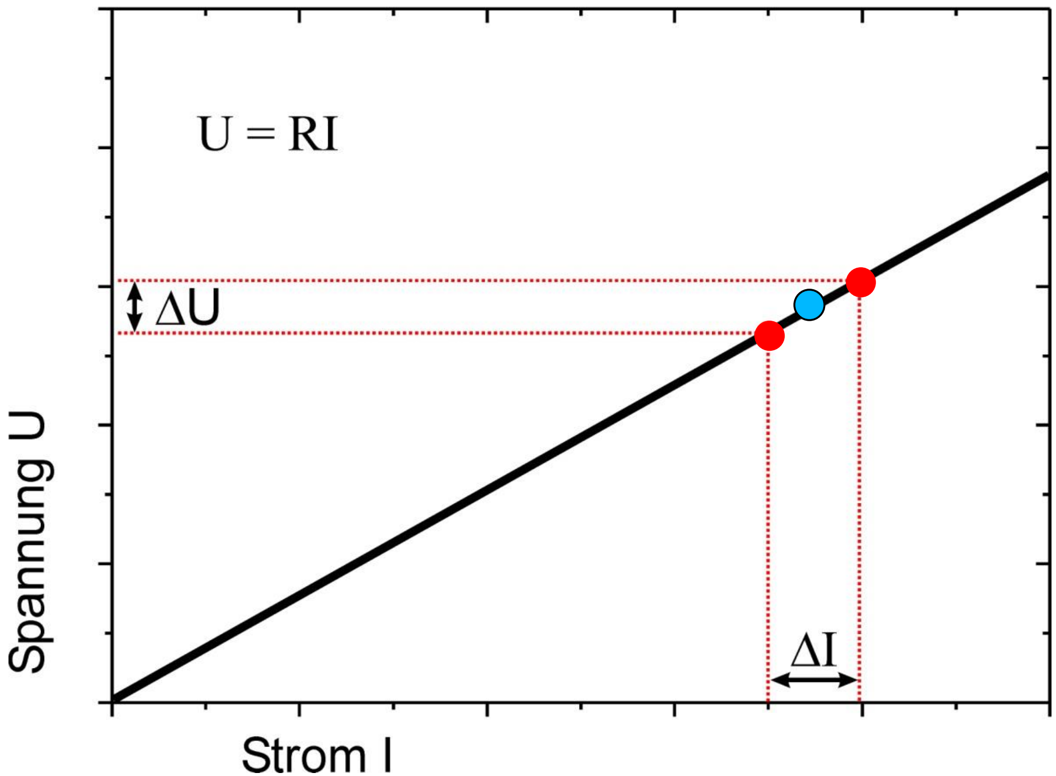


Fehler von U

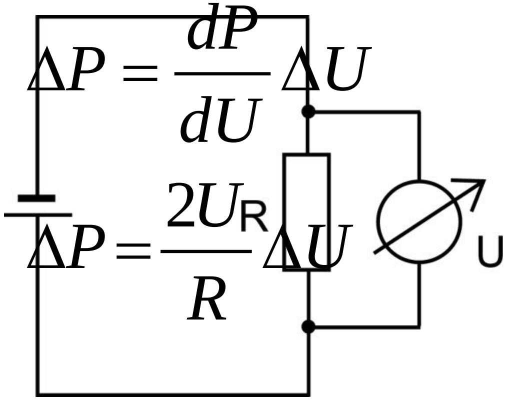
$$\Delta U = Geradensteigung \times \Delta I$$

$$\Delta U = \frac{dU}{dI}\Delta I$$

$$\Delta U = R\,\Delta I$$

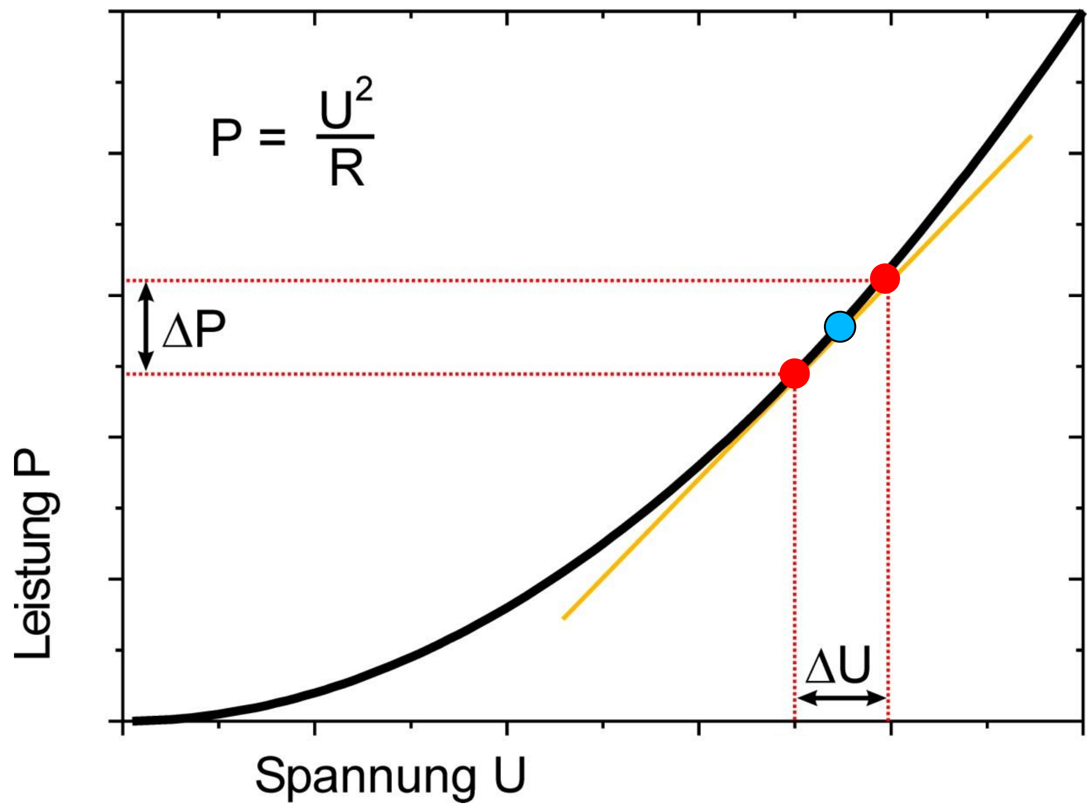


Beispiel
Messung der Leistung an einem Widerstand R, an dem die Spannung U anliegt.



$$\Delta P = \frac{dP}{dU}\Delta U$$

$$\Delta P = \frac{2U_R}{R}\Delta U$$



Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz

Hängt eine physikalische Größe f von mehreren Messgrößen

mit den Fehlern $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ ab,

so berechnet sich der Fehler von f gemäß:

Der Gesamtfehler $\Delta f(\Delta x_i)$ von $f(x_i)$ ergibt sich zu:

$$\Delta f\,(\Delta x_i) \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}$$

Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)

Warum quadratische Addition ?

Messewerte streuen statistisch „links“ und „rechts“ um den Mittelwert, d.h. die Fehler kompensieren sich teilweise!

Fehlerfortpflanzung

Hängt eine physikalische Größe *f* von den Messgrößen x und y ab, ergibt sich für den Gesamtfehler Δf:

$$\Delta f(\Delta x, \Delta y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2}$$

Einfache Fälle *f(x,y)* - nützlich zu Erinnern bei der Auswertung:

$$f = kx \qquad \Delta f = k\Delta x$$

$$f = x + y, \quad f = x - y \qquad \Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$f = xy, \quad f = \frac{x}{y} \qquad \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

$$f = x^{\pm n} \qquad \frac{\Delta f}{f} = |n|\frac{\Delta x}{x}$$

Die einfachen Fälle brauchen bei der Auswertung nicht hergeleitet werden, sondern können direkt angewendet werden!

Fehlerfortpflanzung

Die Berechnung der Differentiale kann sehr mühsam sein.

$$\Delta f(\Delta x, \Delta y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2}$$

Relative Fehler nutzen

Siehe Praktikumsanleitung: Fehlerrechnung mit Köpfchen

In der Praxis ist die Nutzung von relativen Fehlern von unschätzbarem Wert und sollte wann immer möglich genutzt werden.

I.1 Relative Fehler als Erleichterung der Fehlerfortpflanzung

Es ist sehr einfach zu zeigen, dass für eine Funktion der Form

$$f(x, y, z) = x^a \cdot y^b \cdot z^c \tag{1}$$

gilt:

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{f}\right)^2 = \left(a\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)^2 + \left(b\frac{\mathrm{d}y}{y}\right)^2 + \left(c\frac{\mathrm{d}z}{z}\right)^2. \tag{2}$$

Dabei sind a, b, c beliebige Potenzen (3/2, -4 ,...). Zu merken ist:

- Prozentuale Fehler werden quadratisch addiert.
- Wenn ein prozentualer Fehlerbeitrag kleiner als 20% des größten Fehlers ist, dann kann er mit Sicherheit vernachlässigt werden, da er den Gesamtfehler nur noch zu 2% beeinflusst.

Arbeitsblatt Fehlerrechnung

2. Bestimmen Sie das vollständige Differential der Funktionen $w = f(x, y, z)$ mit

   a) $w = 3xy + 5/z$

   b) $w = 5y + 6x^2/z$

a) $$dw = 3y\,dx + 3x\,dy + \frac{-5}{z^2}\,dz$$

b) $$dw = \frac{12x}{z}\,dx + 5\,dy + \frac{-6x^2}{z^2}\,dz$$

Vollständiges Differential der Funktion *w(x,y,z)*: $$dw = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

3. Der Wert der in 2a) gegebenen Funktion w wird durch die Messungen der Variablen x, y, und z mit den statistischen Fehlern Δx, Δy, und Δz bestimmt. Berechnen Sie den Fehler Δw nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz.

a) $$dw = \sqrt{(3y\,\Delta x)^2 + (3x\,\Delta y)^2 + ((5/z^2)\,\Delta z)^2}$$

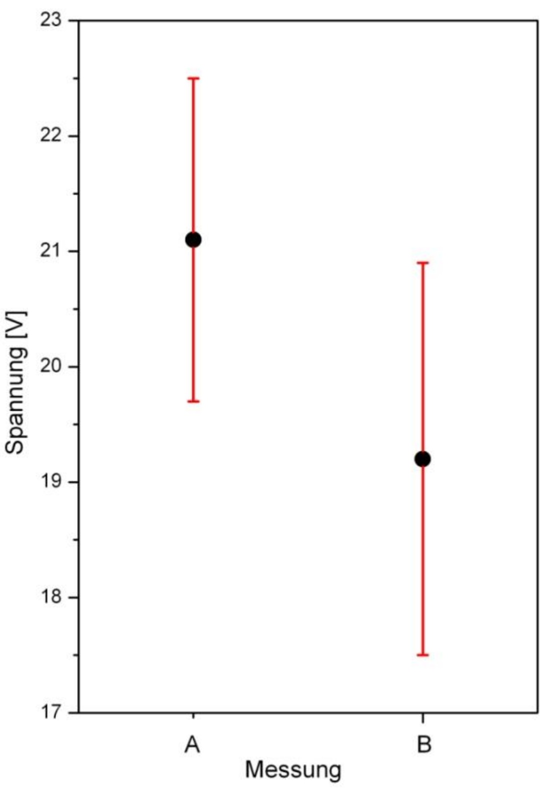
b) $$dw = \sqrt{((12x/z)\,\Delta x)^2 + (5\,\Delta y)^2 + ((6x^2/z^2)\,\Delta z)^2}$$

Arbeitsblatt Fehlerrechnung

5. Die Spannung einer Spannungsquelle wird mit zwei verschiedenen Methoden bestimmt (1σ-Fehler):

   a) Messwert A: 21,1 $\pm$ 1,4 V
   b) Messwert B: 19,2 $\pm$ 1,7 V.

   Ist der Unterschied zwischen A und B signifikant? Begründung?



Differenz D $$D \equiv U_A - U_B = 1.9V$$

Fehler der Differenz ΔD $$\Delta D = \sqrt{(\Delta U_A)^2 + (\Delta U_B)^2}$$

$$\Delta D = \sqrt{(1.4V)^2 + (1.7V)^2} \approx 2.2V$$

Vergleich von D mit ΔD der Differenz

$D = 1.9V < \Delta D \approx 2.2V$ ► **nicht signifikant!**

Der Unterschied kann zufällig sein -> nicht signifikant

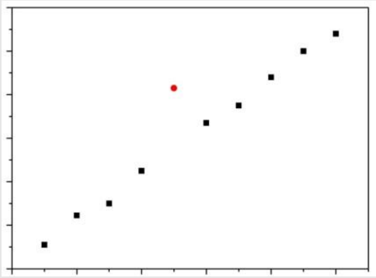
Der Unterschied ist signifikant wenn es unwahrscheinlich ist, dass dies durch Zufall zustande kam.

Graphische Darstellung

wesentlicher Bestandteil einer Messung

► Veranschaulicht funktionale Zusammenhänge

► Erlaubt Kontrolle über mögliche Abweichungen
(prinzipielle Abweichungen oder „Ausreißer“)



Für das Praktikum bitte beachten:

► Wahl von geeignetem Millimeterpapier (linear / log. / doppelt log.)

► Wahl eines geeigneten Maßstabs für die Achsen

► Beschriftung der Achsen

► Messwerte (mit Fehler) und den Graph der Funktion eintragen

Diagramme von Hand anfertigen, keine Computerausdrucke !!!

Arbeitsblatt Graphische Darstellung

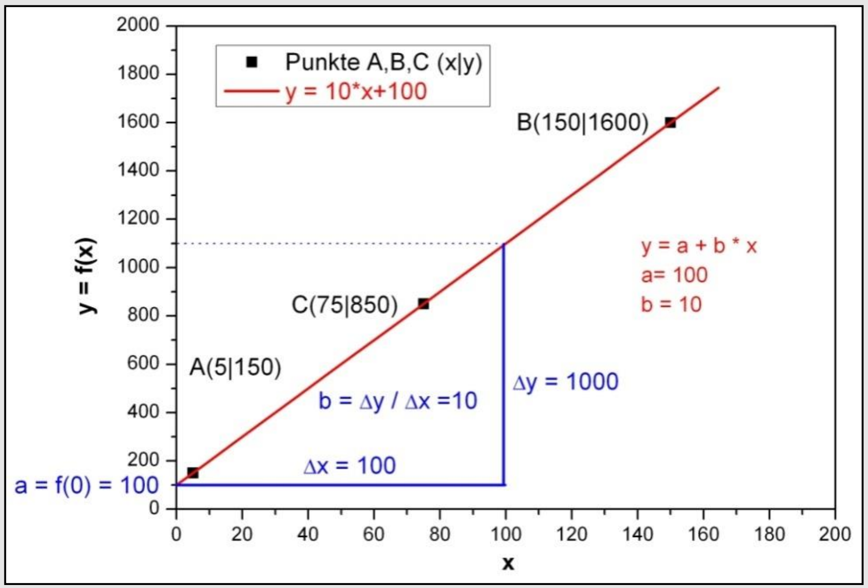
1. Tragen Sie folgende Punkte $(x|y)$ in das Millimeterpapier ein:

   A: $(5 \,|\, 150)$
   B: $(1,5 \times 10^2 \,|\, 0,16 \times 10^4)$
   C: $(75 \,|\, 8,5 \times 10^2)$

   Die zugehörige Funktion hat die Form

   $$y = a \cdot x + b$$

   Tragen Sie den Graph der Funktion ein und bestimmen Sie graphisch a und b.



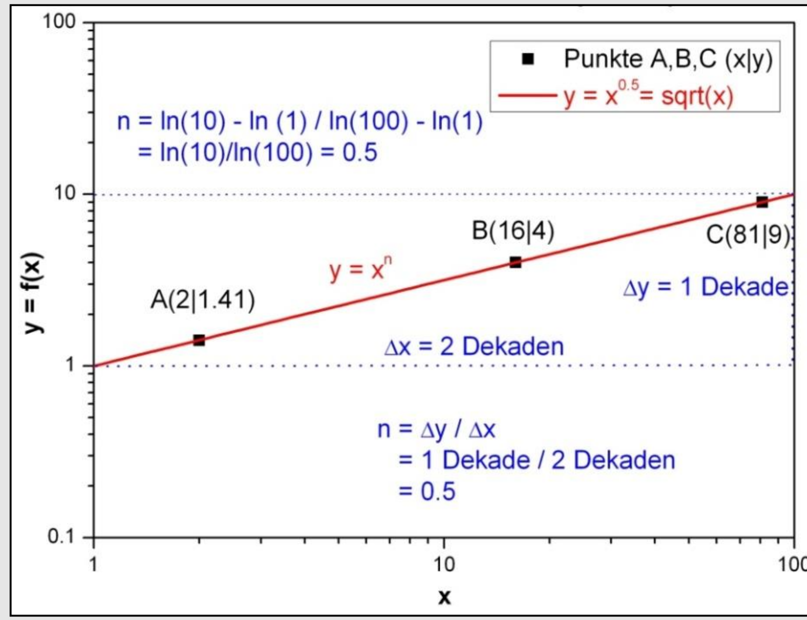
2. Tragen Sie folgende Punkte in das doppelt-logarithmische Papier ein:

   A: $(2 \,|\, 1,41)$
   B: $(16 \,|\, 400 \times 10^{-2})$
   C: $(0,81 \times 10^2 \,|\, 0,09 \times 10^2)$

   Die zugehörige Funktion hat die Form

   $$y = x^n$$

   Tragen Sie den Graph der Funktion ein und bestimmen Sie graphisch n.



doppelt logarithmischer Plot:

Potenz-Funktionen $y = x^n$ ergeben eine Gerade mit der Steigung des Exponenten: $\ln(y) = n * \ln(x)$

Arbeitsblatt Graphische Darstellung

3. Tragen Sie folgende Punkte in das halb-logarithmische Papier ein:

   A: $(30\,|\,0,896 \times 10^1)$

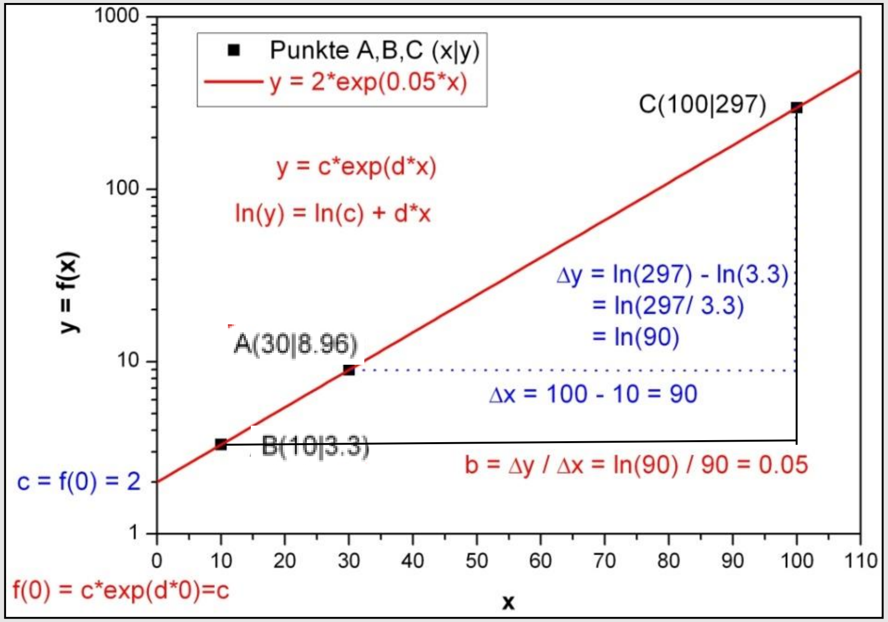
   B: $(10\,|\,0,330 \times 10^1)$

   C: $(10^2\,|\,0,297 \times 10^3)$

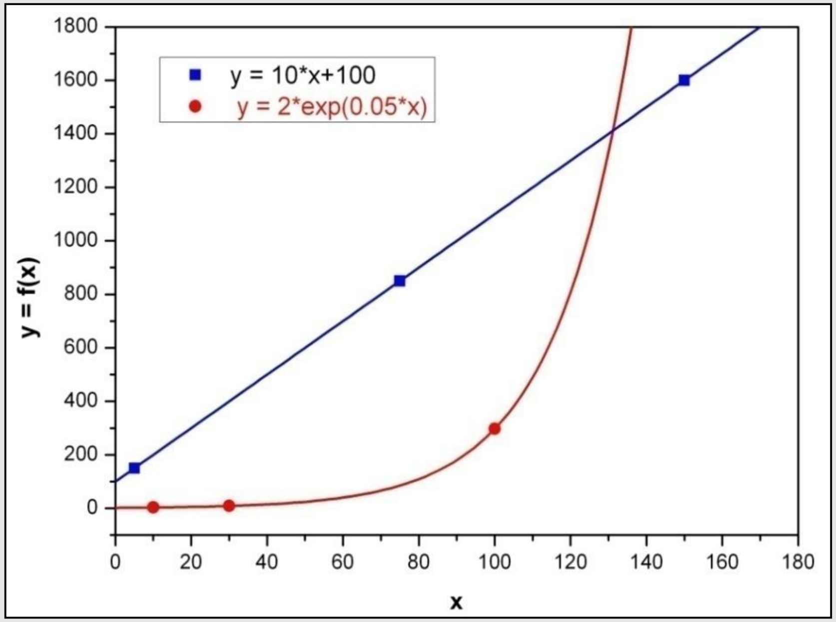
   Die zugehörige Funktion hat die Form

   $$y = c \cdot \mathrm{e}^{d\,x}$$

   Tragen Sie den Graph der Funktion ein und bestimmen Sie graphisch c und d.



4. Tragen Sie den Graph der Funktion aus 3. ebenfalls in das Millimeterpapier ein.



Halb-logarithmischer Plot:

Exponentialfunktionen $y = c{*}exp(d{*}x)$ ergeben eine Gerade mit der Steigung d und y-Achsenabschnitt c: $ln(y) = ln(c) + d{*}x$

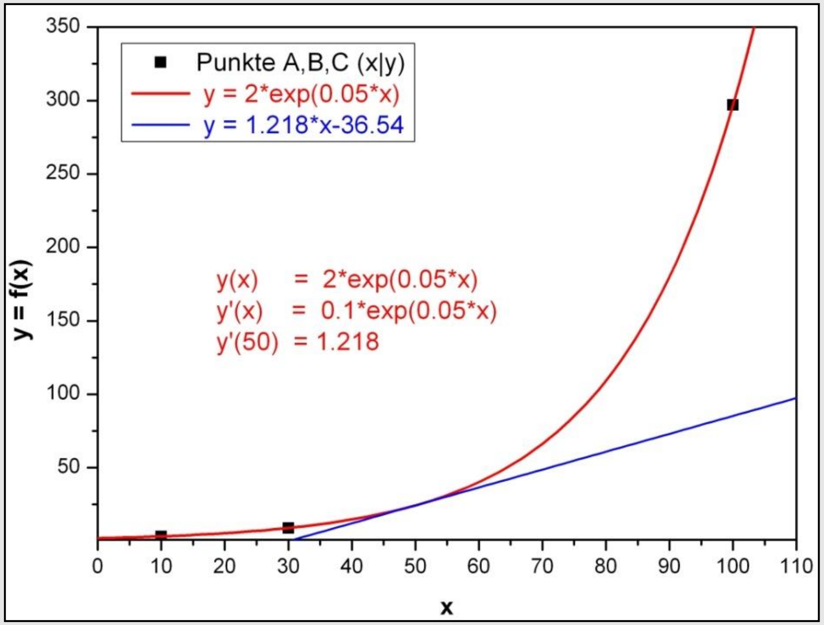
Arbeitsblatt Graphische Darstellung

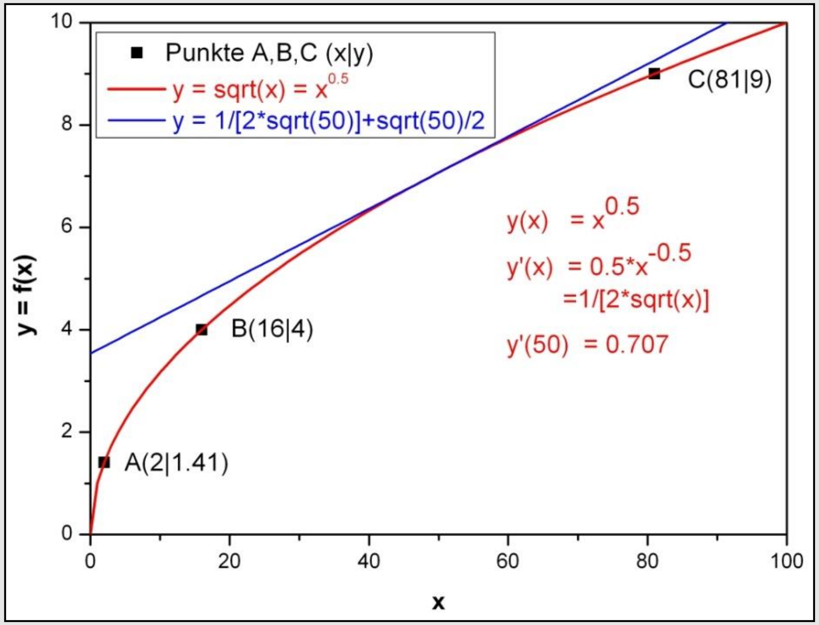
5. Berechnen Sie die Steigungen der 3 Funktionen für $x = 50$.

(1) y'(x=50) = 10

(2) *y'(x=50) = 1.218*

(3) *y'(x=50) = 0.707*





Arbeitsblatt Graphische Darstellung

6. Zum Einführungsversuch (siehe Versuch 11 im Skript):

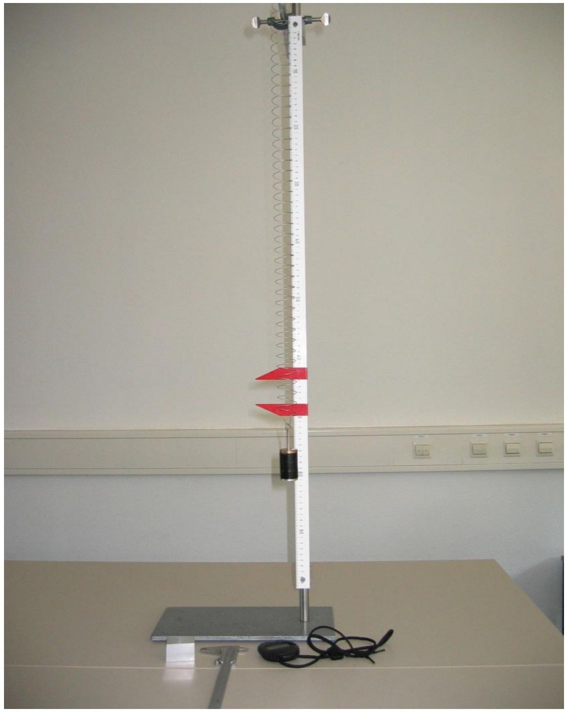
   Gegeben sei eine Messreihe der Schwingungsdauer T und deren Fehler ΔT eines Federpendels als Funktion der Masse m:

Masse m [g]	Schwingungsdauer T [s]	Fehler ΔT [s]
50	1,02	0,04
100	1,30	0,04
150	1,53	0,04
200	1,71	0,04
250	1,90	0,04

   Zur Bestimmung der Federkonstanten D wird die Gleichung $T^2 = (4\pi^2/D)m$ als Geradengleichung $y = a\,x + b$, mit $y = T^2$, $a = (4\pi^2/D)$ und $x = m$ interpretiert.

   Berechnen Sie aus der vorliegenden Messreihe die entsprechenden Wertepaare $(y_i, \Delta y_i)$ und bestimmen Sie nach folgenden Methoden die Steigung a und deren Fehler Δa:

   a) grafisch mit Hilfe einer Ausgleichs- und Fehlergeraden (siehe Kapitel VI im Abschnitt „Messgenauigkeit und Fehlerabschätzung“ im Praktikumsskript),



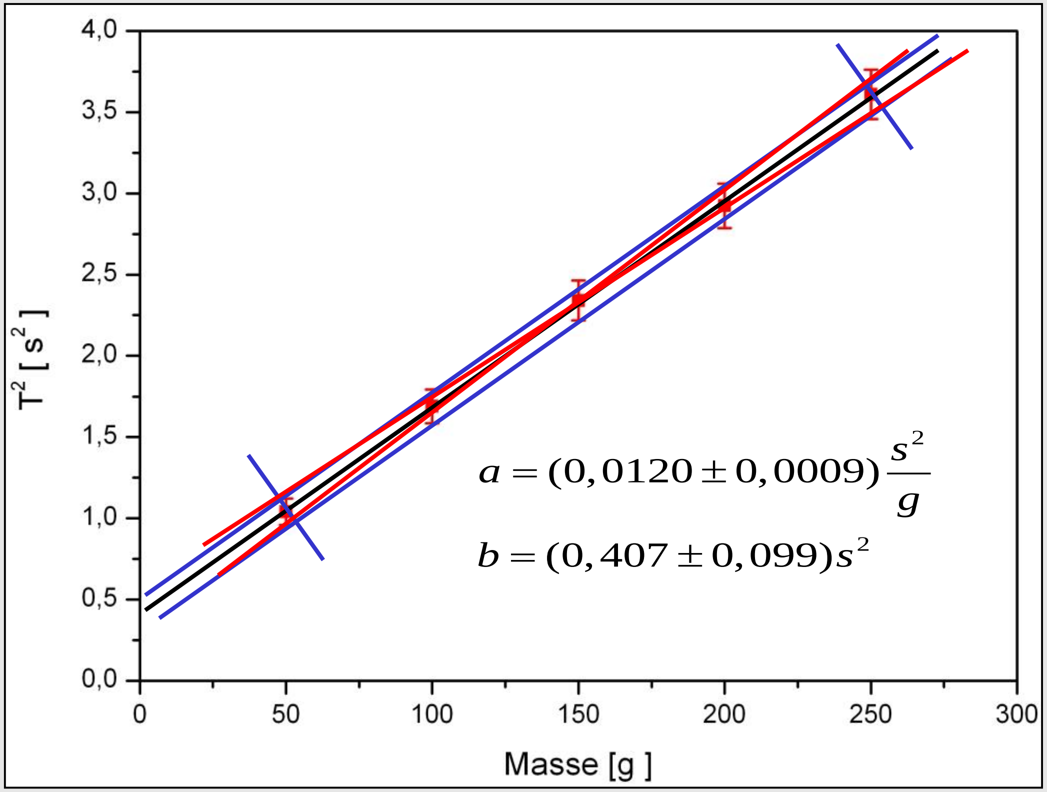
Fehler $\Delta(T^2)$ von T^2: Berechnung aus Fehlerfortpflanzung !

Masse [Gramm]	T [Sekunden]	Fehler T [Sekunden]	T2 [s2]	Fehler T2 [s2]
50	1,02	0,04	1,0404	0,0816
100	1,3	0,04	1,69	0,104
150	1,53	0,04	2,3409	0,1224
200	1,71	0,04	2,9241	0,1368
250	1,9	0,04	3,61	0,152
x_i			y_i	Δy_i

Einführungsversuch:
Berechnung der Federkonstante D aus der Steigung; der Fehler ΔD ist ebenfalls anhand der Fehlerfortpflanzung zu berechnen !

Ausgleichsgerade: graphisch

y = a∗x + b Gesucht: Steigung ***a*** sowie den Achsenabschnitt ***b*** und deren Fehler



Zeichnung der Ausgleichsgeraden

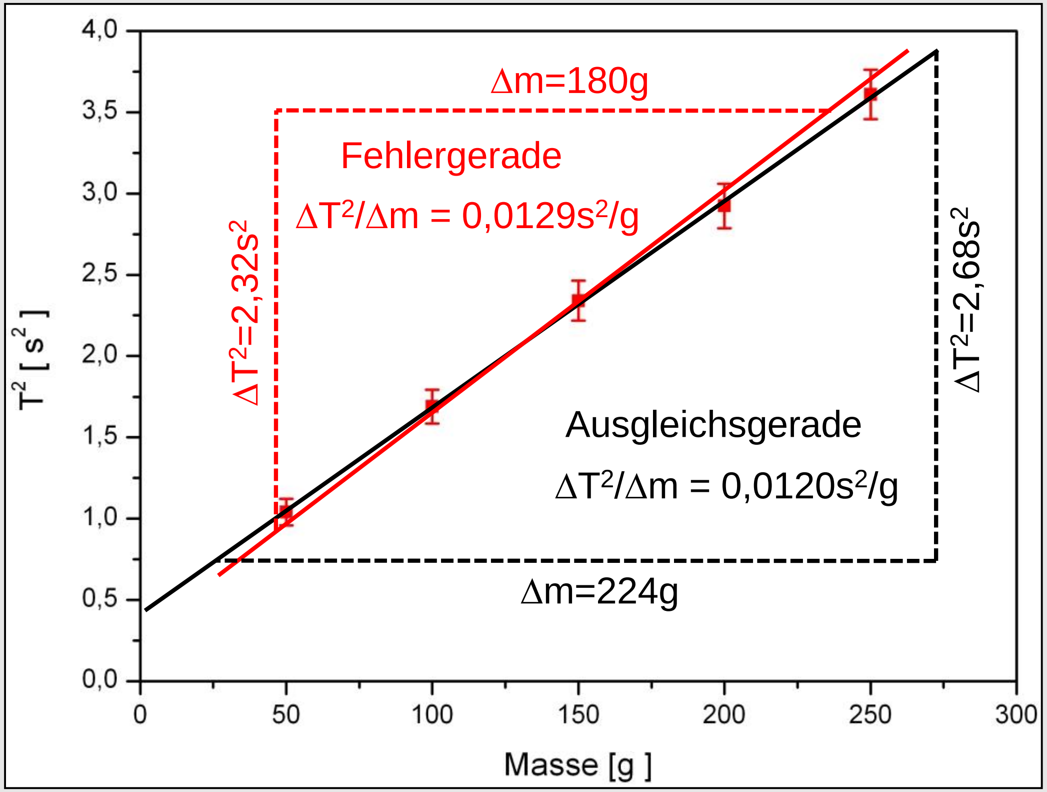
Eintragen von 2 weiteren parallelen nach oben bzw. unten verschobenen Geraden: ca. 70% der Messpunkte innerhalb der Geraden (1σ Abweichung)

Fertigstellen des “Streubereichsrechtecks”

Die Diagonalen in diesem Rechteck liefern in etwa den Fehler der Steigung sowie des Achsenabschnitts

Ausgleichsgerade: graphisch

Im Praktikum auch erlaubt: Min/Max- Abschätzung



Zeichnen der Ausgleichgerade

Zeichnen der Fehlergerade

Berechnung der Steigungen

Berechnung des Fehlers:

$\Delta a = a_{Fehler} - a_{Ausgleich}$

Ergebnis:

$$a = (0{,}0120 \pm 0{,}0009)\frac{s^2}{g}$$

Fehlerabschätzungen -> Augenmaß ausreichend
Eine exakte Fehlerrechnung ist mit einer Hilfe linearen Regression möglich !

Ausgleichgerade: Lineare Regression

Gegeben: N Paare von Messwerten ***(x_i, y_i)*** mit linearer Abhängigkeit ***$y = a \cdot x + b$***
x_i-Werte fehlerfrei, ***y_i***-Werte mit Standardabweichung σ_i

„Prinzip der kleinsten Quadrate" (C.F. Gauß, 1795)

$$\chi^2 = \sum_i \left[\frac{\Delta y_i}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_i \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2 \quad \text{sei minimal}$$

b) mittels linearer Regression (siehe Kapitel VII im Abschnitt „Messgenauigkeit und Fehlerabschätzung" im Praktikumsskript).

$$a = \frac{1}{\xi} \left(\sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum_i \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} - \sum_i \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum_i \frac{y_i}{\Delta y_i^2} \right) \qquad \Delta a^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2}$$

$$b = \frac{1}{\xi} \left(\sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} \sum_i \frac{y_i}{\Delta y_i^2} - \sum_i \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum_i \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} \right) \qquad \Delta b^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2}$$

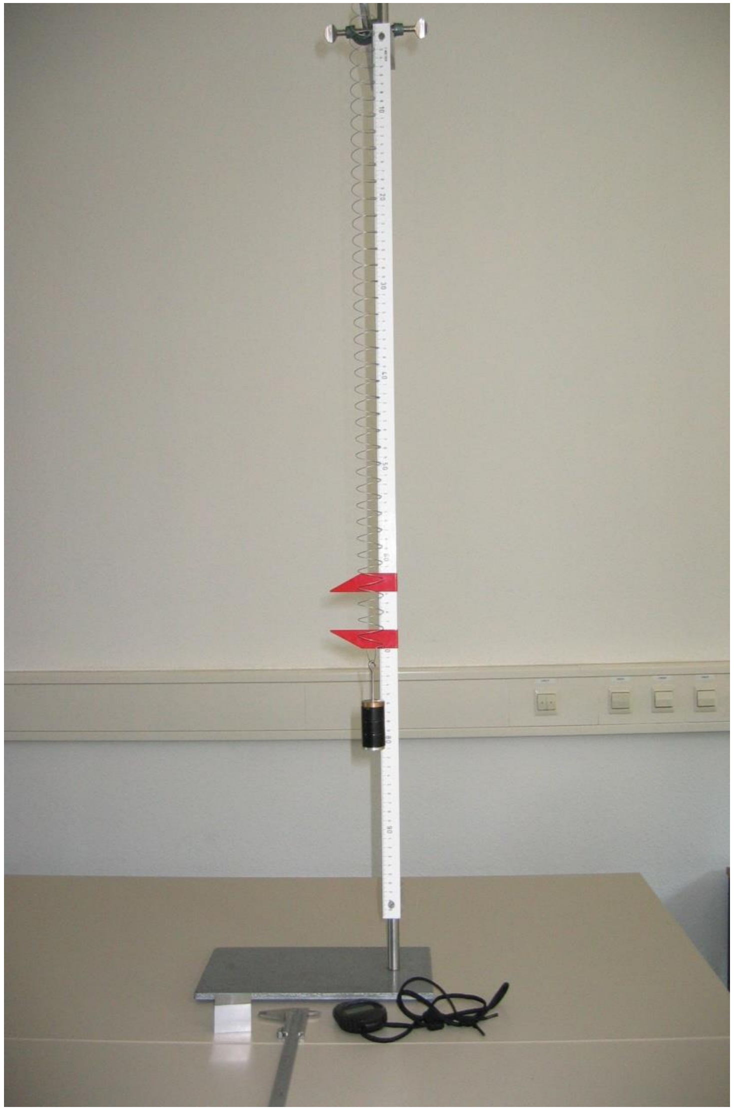
$$\xi = \sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} - \left(\sum_i \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \right)^2$$

Steigung $a = 0.0128\ s^2/g$
Fehler $\Delta a = 0.0007\ s^2/g$

y-Achsenabschnitt $b = 0.41\ s^2$
Fehler $\Delta b = 0.01\ s^2$

Lineare Regression

Einführungsversuch Federpendel



Aufgabe:
Bestimmung der Erdbeschleunigung
mit einem Federpendel

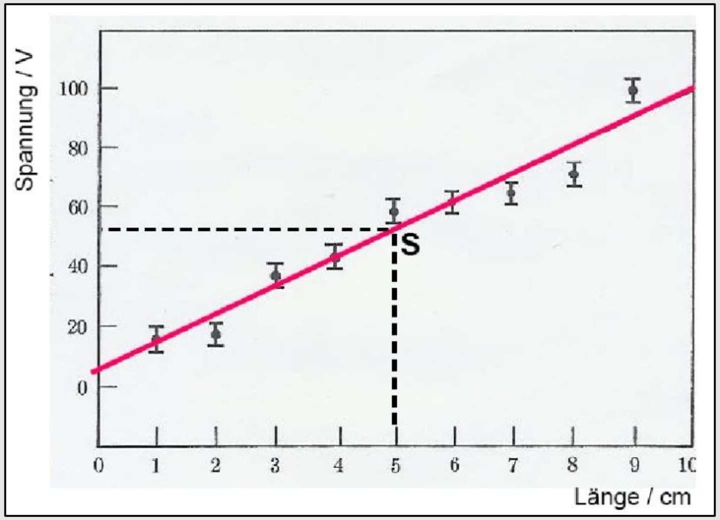
~~Durchführung und Auswertung:~~
~~Gemeinsam mit den Betreuern an den ersten Tagen~~

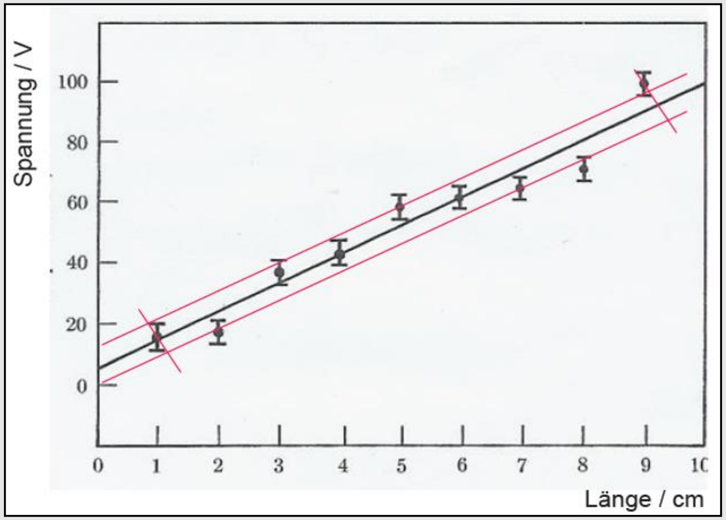
Ziel:
Einführung in das
physikalische Experimentieren,
Protokollführung,
Fehlerabschätzung
und grafische Darstellung

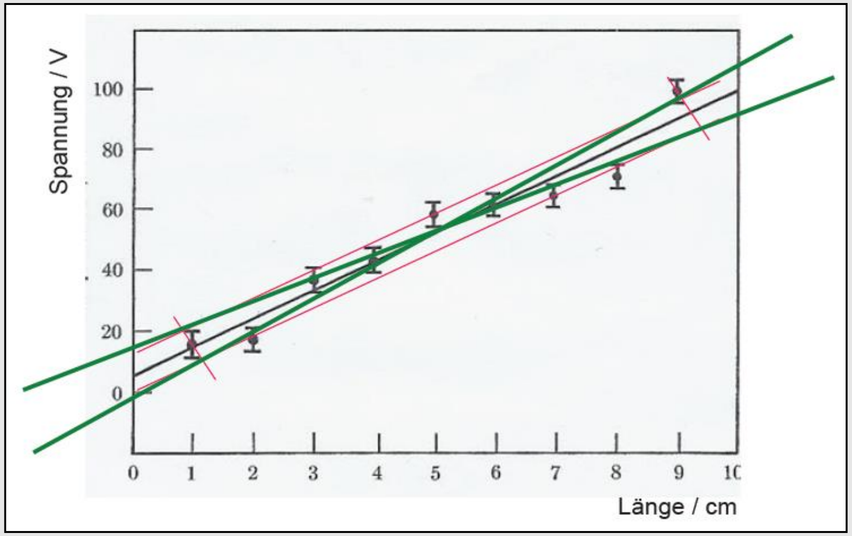
Zusätzliches Material

Ausgleichsgerade „von Hand“

$y = a*x + b$ Gesucht: Steigung a sowie den Achsenabschnitt b und deren Fehler







Zeichnung der Ausgleichsgeraden
(geht bei gleichen Standardabweichungen durch Schwerpunkt S der Daten)

Eintragen von 2 weiteren parallelen nach oben bzw. unten verschobenen Geraden:
ca. 70% der Messpunkte innerhalb der Geraden

Fertigstellen des “Streubereichsrechtecks”.

Die Diagonalen in diesem Rechteck liefern in etwa den Fehler der Steigung sowie des Achsenabschnitts.

Lineare Regression mit χ^2-Fit

$$\chi^2 = \sum_i \left[\frac{\Delta y_i}{\sigma_i}\right]^2 = \sum_i \left[\frac{[y_i - (ax_i + b)]^2}{\sigma_i^2}\right]$$

χ^2 sei minimal (Beispielrechnung für $\sigma_i = \sigma \ \forall \ i$)*

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = \frac{-2}{\sigma^2} \sum_i [y_i - ax_i - b)] \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \frac{-2}{\sigma^2} \sum_i x_i [y_i - ax_i - b)] \overset{!}{=} 0$$

$$\sum_i y_i = \sum_i b + \sum_i ax_i = bN + a\sum_i x_i$$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i bx_i + \sum_i ax_i^2 = b\sum_i x_i + a\sum_i x_i^2$$

* Allgemeiner Fall: siehe Praktikumsanleitung

Aufstellen der Funktion $\chi^2(a,b)$

Partielles Ableiten:

nach *a* & Nullsetzen

nach *b* & Nullsetzen

Gleichungssystem umformen

Lineare Regression mit χ^2-Fit

$$\sum_i y_i = \sum_i b + \sum_i a x_i = bN + a \sum_i x_i$$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i b x_i + \sum_i a x_i^2 = b \sum_i x_i + a \sum_i x_i^2$$

Auflösen nach *a* und *b:*

Achsenabschnitt

$$b = \frac{1}{\Delta}\left[\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i\, y_i\right]$$

Steigung

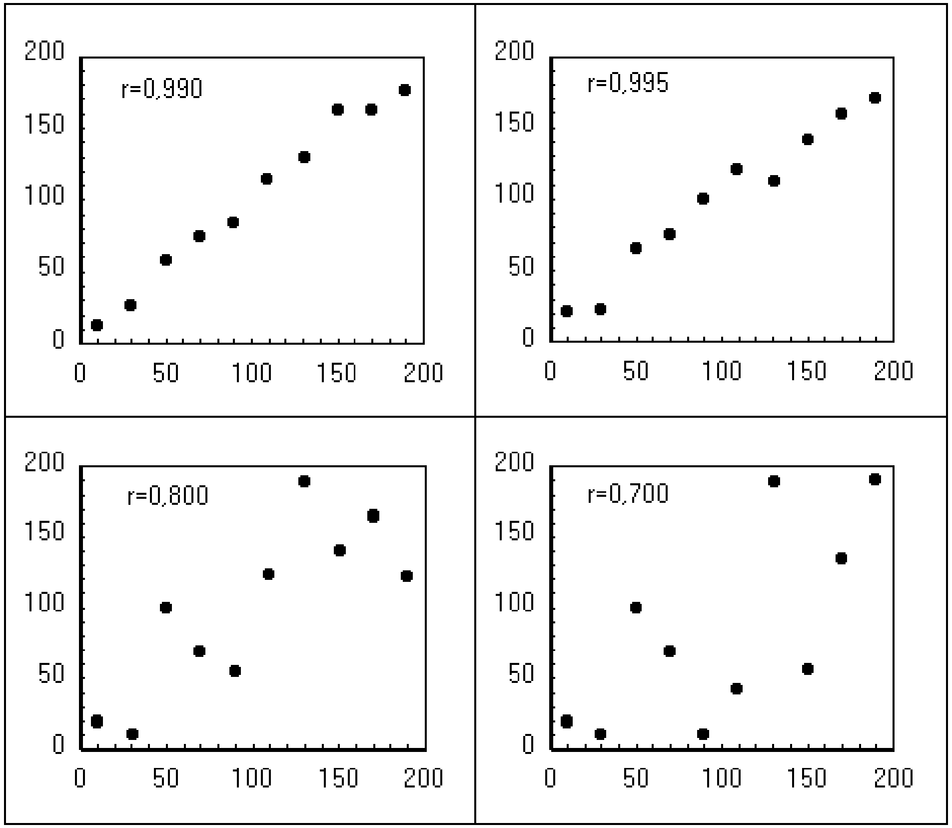
$$a = \frac{1}{\Delta}\left[N \sum_i x_i\, y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i\right]$$

$$mit\ \ \Delta = N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2$$

Varianz

$$o^2 \approx s^2 = \frac{1}{N-2} \sum_i \left[y_i - a x_i - b\right]^2$$

Korrelationskoeffizient (nach Pearson)



$$\rho(x,y) := \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var\ x} \cdot \sqrt{Var\ y}}$$

$$r_{xy} := \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

dimensionsloses Maß für den Grad des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Merkmalen. Bei einem Wert von +1 (bzw. −1) besteht ein vollständig positiver (bzw. negativer) linearer Zusammenhang zwischen den betrachteten Merkmalen. Wenn der Korrelationskoeffizient den Wert 0 aufweist, hängen die beiden Merkmale überhaupt nicht linear voneinander ab.

Quadrat des Korrelationskoeffizienten r^2 : Bestimmtheitsmaß

Es gibt an, wie viel Prozent der Varianz, d. h. an Unterschieden der einen Variable durch die Unterschiede der anderen Variable erklärt werden können.

Beispiel: Bei *r=0,3* bzw. *0,8* werden *9%* bzw. *64%* der gesamten auftretenden Varianz im Hinblick auf einen statistischen Zusammenhang erklärt.

Regressionsanalyse

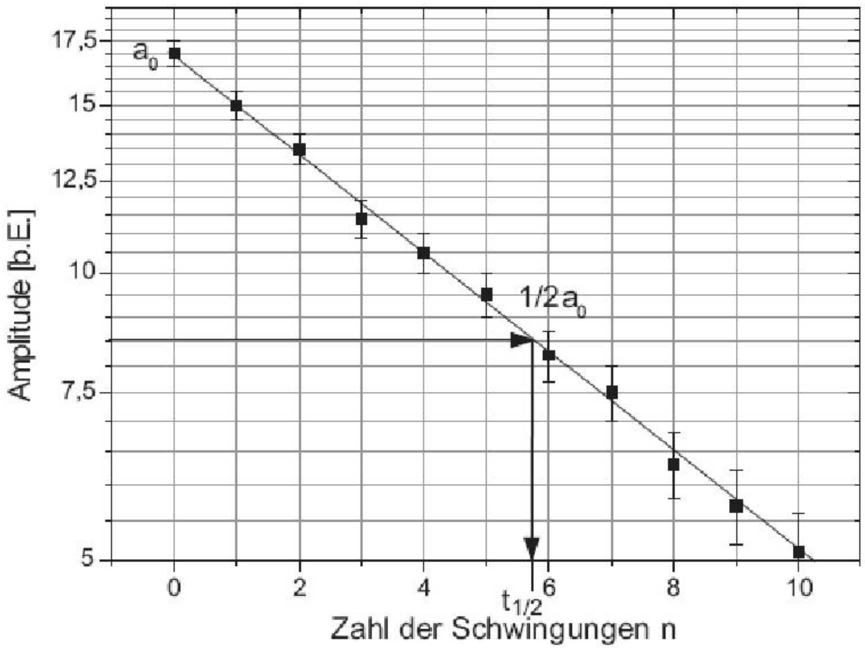
Per Hand bzw. mit Taschenrechner mit überschaubarem Aufwand durchführbar bei linearen Funktionen mit wenigen Stichproben.

Beispiel:

Linearisierung von Funktionen

$$y = a\, e^{bx}$$

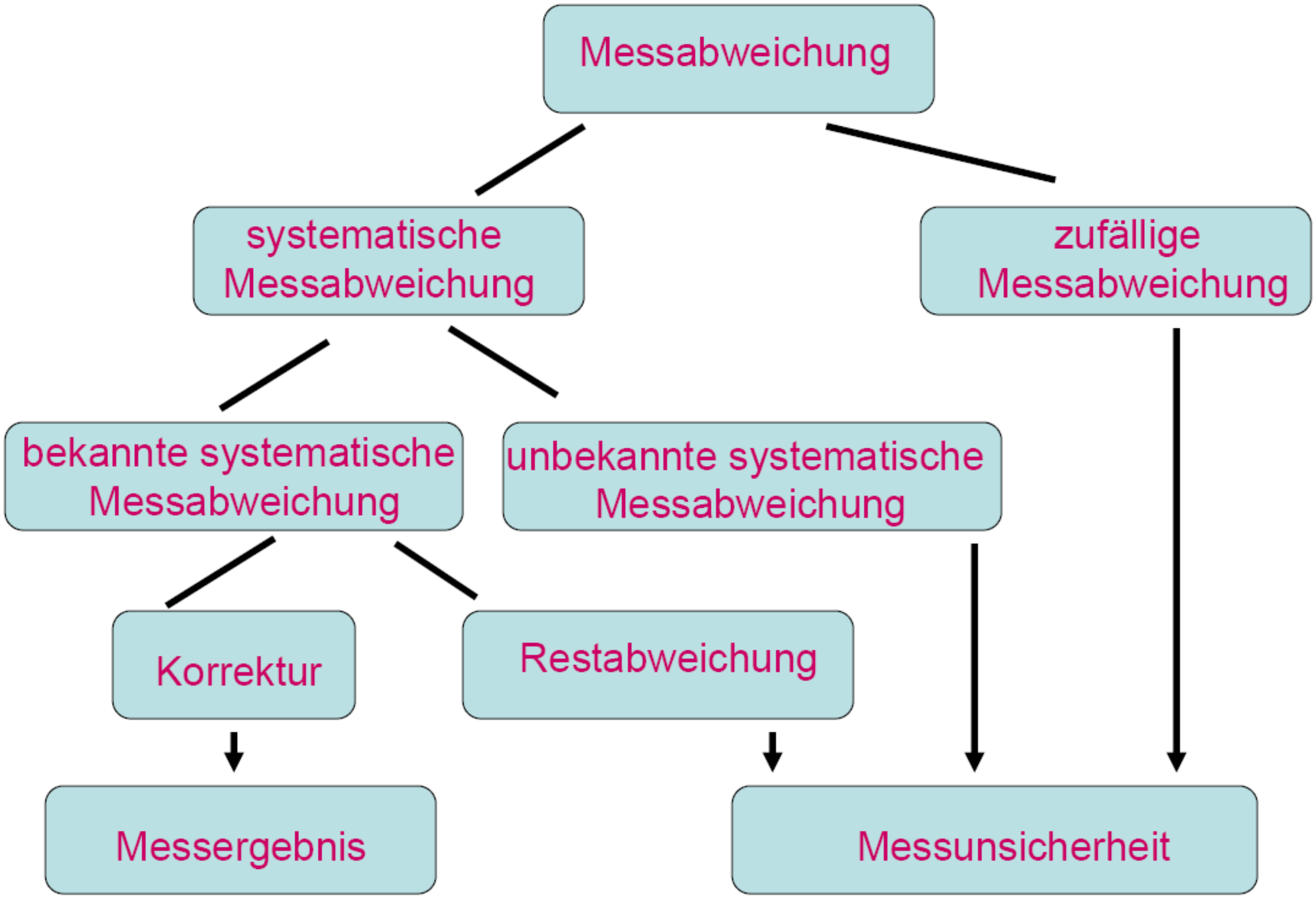
$$\ln y = \ln a + bx$$



„multiple“ Regression:

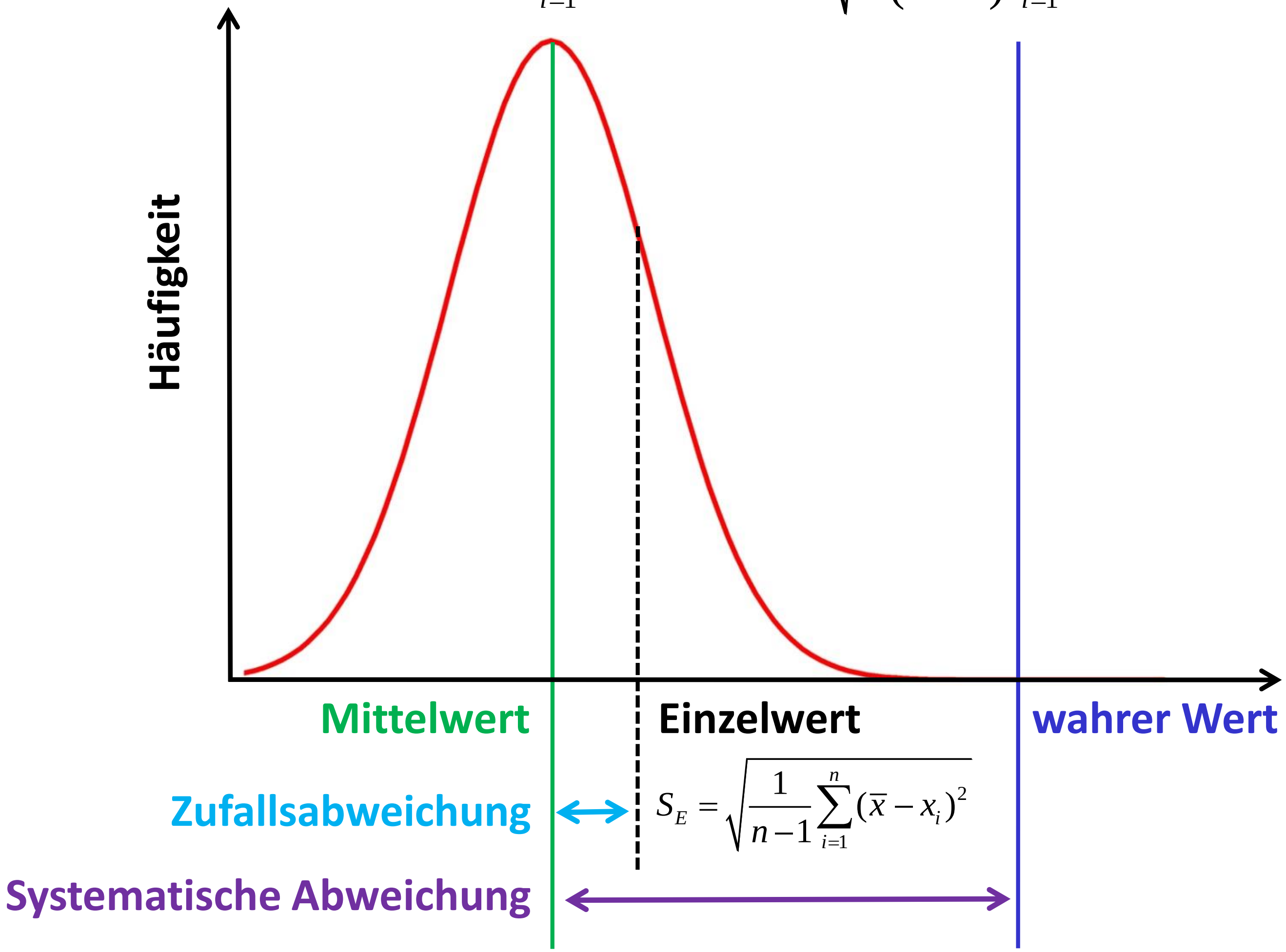
Für komplexere Funktionen mit mehreren Variablen (alle mit Fehler behaftet) ist es sinnvoll geeignete Statistik Software verwenden (z.B. Mathematica, Maple, Origin, SPSS, Stata, SAS, …).

Prinzipielle Vorgehensweise



nach M.Hemla, OZ 41 (1995) 1156

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad S_M = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}$$



Messergebnis:

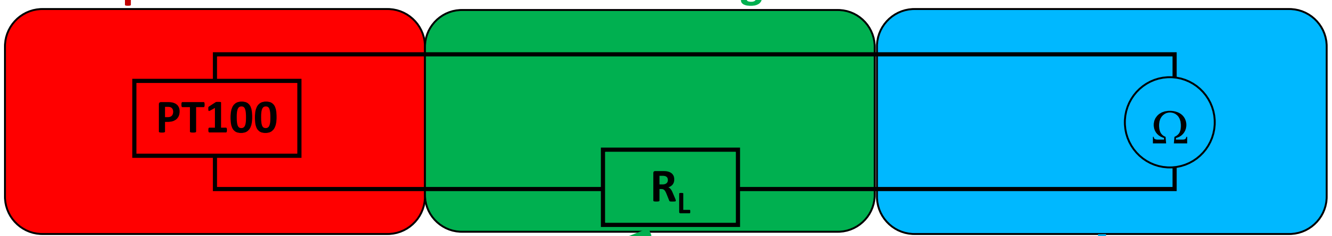
$$x = \overline{x} \pm k \cdot u$$

$$u = \sqrt{\left(\sigma_M\right)^2 + \left(\sigma_{Sys}\right)^2}$$

k=1 für
68% Konfidenz
und hinreichende
Anzahl *n* von
Einzelmessungen

Beispiel Temperaturmessung mit PT100

Temperatursensor | **Zuleitung** | **Ohmmeter** | **Anzeigewerte**



Anzeigewerte
140.12Ω
140.13Ω
140.19Ω
140.08Ω
140.11Ω
140.12Ω
140.09Ω
140.10Ω
140.11Ω

Systematischer Fehler (Zuleitungswiderstand)

$sys = R_L = 1.00\ \Omega$

Arithmetischer Mittelwert

$m = 140.10\ \Omega$

Herstellerangabe (Genauigkeit Messgerät)

$a = 0.15\ \Omega$

Standardabweichung Des Mittelwerts

$sm = 0.10\ \Omega$

Korrektur des Mittelwertes m mit dem bekannten systematischen Fehler

$m_{korrig} = m - sys = 139.10\ \Omega$

Kombinierte Messunsicherheit Messgerät und Messunsicherheit

$u_{res}^2 = sm^2 + a^2 \quad u_{res} = 0.18\ \Omega$

Vollständiges Messergebnis:

$(m - sys) \pm u_{res} = 139.10\ \Omega \pm 0.18\ \Omega$

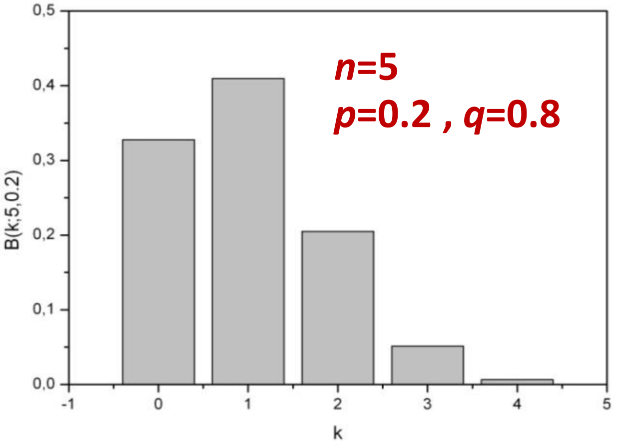
Binomial-Verteilung

$$B(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ausfallwahrscheinlichkeit

Trefferwahrscheinlichkeit

Anzahl der Möglichkeiten (Permutationen)



Normierung: $\sum_{k=0}^{\infty} B(k;n,p) = 1$

Mittelwert: $\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot B(k;n,p) = np$

Varianz: $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot B(k;n,p) - \langle k \rangle^2 = np(1-p)$

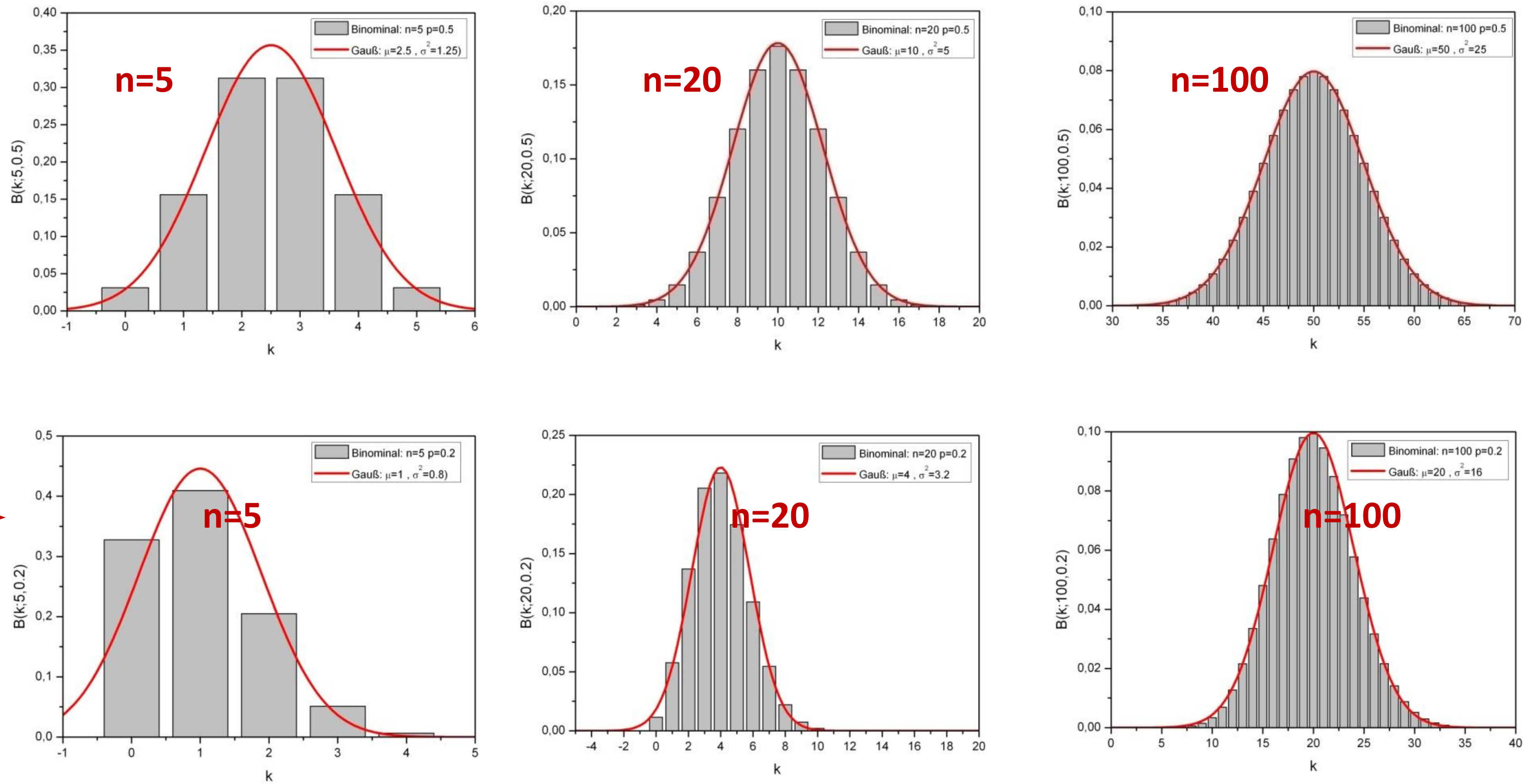
Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis genau k-mal bei n voneinander unabhängigen Versuchen eintritt, wobei p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses, und (1-p) die Wahrscheinlichkeit für das nicht Eintreten des Ereignisses darstellt.

Zentraler Grenzwertsatz

p=0.5 ►

p=0.2 ►



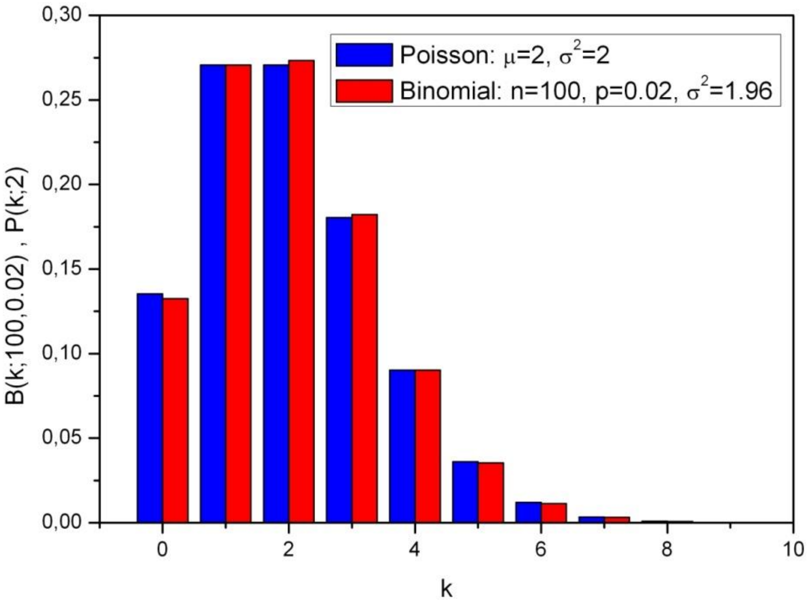
Konvergenz der Binomialverteilung an die Normalverteilung (Gauß) für $n \to \infty$

$$B(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \exp\left(-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2} \right)$$

Poisson-Verteilung

Eine asymptotisch asymmetrische Binomialverteilung, deren Erwartungswert *np* für große *n* und kleine *p* gegen eine von *n* unabhängige Konstante λ konvergiert, kann durch die Poisson-Verteilung angenähert werden.

$$P(k;\mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$



Normierung: $\sum_{k=0}^{\infty} P(k;\mu) = 1$

Mittelwert: $\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k;\mu) = \mu$

Varianz: $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k;\mu) - \langle k \rangle^2 = \mu$

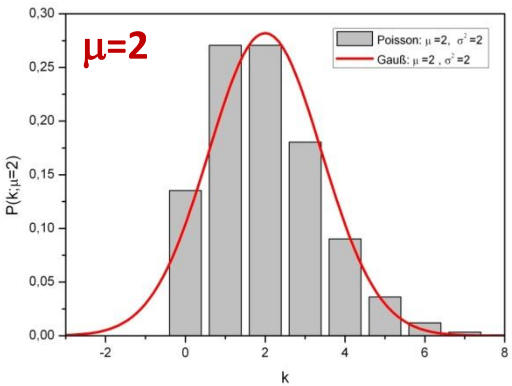
Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\mu}$

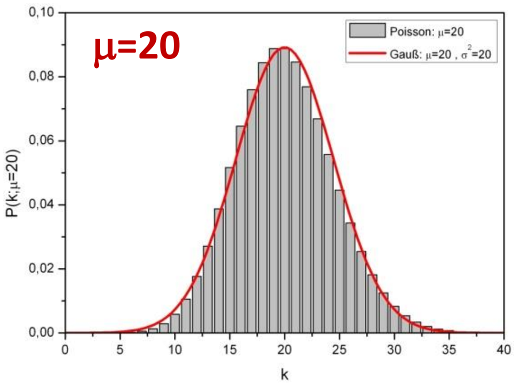
Die Poisson-Verteilung ist also die Grenzverteilung der Binomialverteilung für große *n* und kleine *p*. Die Verteilung wird durch einen Parameter $\boldsymbol{\mu}$ (Erwartungswert) beschrieben. $P(k;\mu) = \lim\ (k; n \to \infty, p \to 0)\ ;\ np \to \lambda$

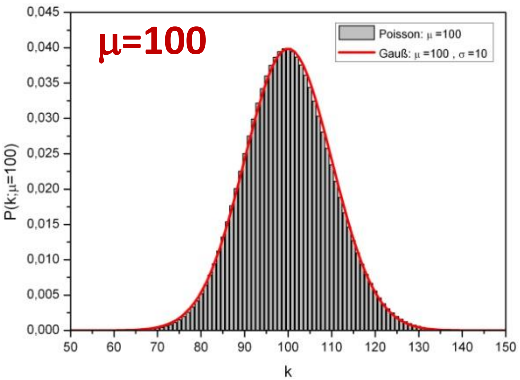
Poisson-Verteilung & „Wurzel N Gesetz“

Für einen großen Mittelwert μ (μ >30) lässt sich die Poisson-Verteilung in guter Näherung durch eine Gaußverteilung approximieren.

$$G(k;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}} \quad mit \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$







G(μ,k) ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine sehr lange Messreihe den Mittelwert μ ergeben würde, wobei das Resultat *k* einer einzigen Messung gegeben ist. Näherungswert für die Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{k}$

Beispiel (z.B. Zählrate beim radioaktiver Zerfall):

Interpretation einer Messung als Schätzung des Mittelwerts: N=4711 „counts“

Schätzung der Standardabweichung (absoluter Fehler): $\sqrt{N}$

Relativer Fehler : $\sqrt{N}\,/\,N = 1/\sqrt{N}$

Messunsicherheiten

Zufällige oder Statistische Fehler

► Wiederholung von Messungen (unter gleichen Bedingungen): einzelne Messwerte werden sich voneinander unterscheiden.

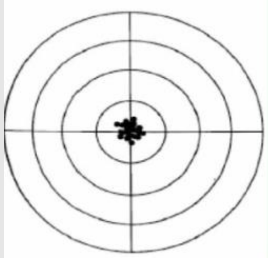
► Statistische Fehler streuen „links“ und „rechts“ um den wahren Wert (in vielen Fällen sogar symmetrisch um den wahren Wert).

► Zufällige Abweichungen sind unvermeidlich und nicht exakt erfassbar.

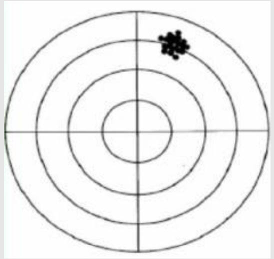
► sind statistischer Analyse zugänglich:
Die Größe zufälliger Messabweichungen kann mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsaussagen bestimmt werden.

Durch Mehrfachmessungen können statistische Fehler prinzipiell beliebig klein gehalten werden !

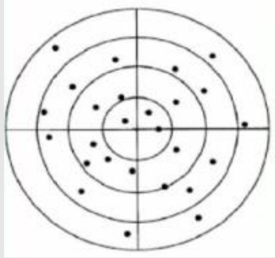
Beispiel syst. und stat. Fehler: Position eines Sterns



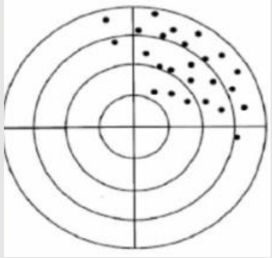
Stat. Fehler: klein
Syst. Fehler: klein



Stat. Fehler: klein
Syst. Fehler: groß



Stat. Fehler: groß
Syst. Fehler: klein



Stat. Fehler: groß
Syst. Fehler: groß

Messunsicherheiten

Beispiele für zufällige Messabweichungen:

- ► Abweichungen beim Ablesen (Parallaxe)
- ► Reaktionsvermögen (z.B. bei Zeitmessung)
- ► Unsicherheit der Skaleninterpolation
- ► variable Umgebungsbedingungen (Druck, Temperatur, ...)
- ► statistischer Charakter der Messgröße (Rauschen, Radioaktivität,...)

Experiment zur Bestimmung des Schwerpunktes von Bierdosen
(Experimental Physik I, WS 2007/08)

Literatur

P.R. Bevington
Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences
McGraw-Hill, New York,1969, Lib Congress 69-16942

C.B. Lang & N. Pucker
Mathematische Methoden in der Physik
Spektrum, Akad. Verlag, Heidelberg, 1998, ISBN 3-8274-0225-5

W. Gränicher
Messung beendet was nun?
Teubner Verlag, Stuttgart, 1996, ISBN 3-519-13659-7

<u>Praktikumsanleitung!</u>

“Wir wollen richtige Fehler” , J.Stiewe in der Praktikumsanleitung