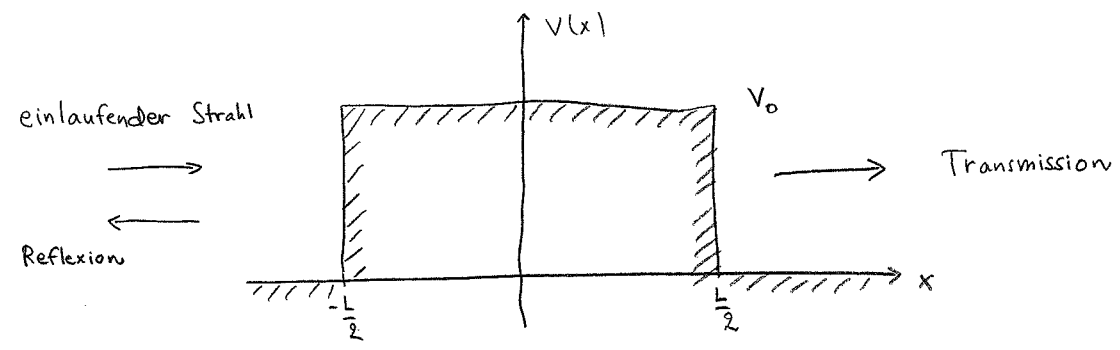


2.4 Tunneleffekt

[Münster 3.3, 3.4; Fließbach 21, 22]

Betrachtet wird eine Potentialbarriere statt Kastenpotential.



Klassisch: $E < V_0$: $R = 1, T = 0$.
 $E > V_0$: $R = 0, T = 1$.

Quantenmechanisch:
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \Psi_E(x) = E \Psi_E(x)$$

Einzigster Unterschied bzgl. Kapitel 2.3 ist was bei $|x| < L/2$ passiert.

Früher: $\Psi_E'' = -k^2 \Psi_E$; $k^2 := \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} > 0$.
 Jetzt: $\Psi_E'' = \kappa^2 \Psi_E$; $\kappa^2 := \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} > 0$.
 für $0 < E < V_0$

Früher:
$$\frac{C}{A} = e^{-ik_0L} \left[\frac{e^{ikL} + e^{-ikL}}{2} + \left(\frac{k_0}{k} + \frac{k}{k_0} \right) \frac{e^{-ikL} - e^{ikL}}{4} \right]^{-1}$$

Jetzt $k \rightarrow i\kappa$:
$$\frac{C}{A} = e^{-ik_0L} \left[\cosh(\kappa L) + i \left(\frac{\kappa}{k_0} - \frac{k_0}{\kappa} \right) \frac{\sinh(\kappa L)}{2} \right]^{-1}$$

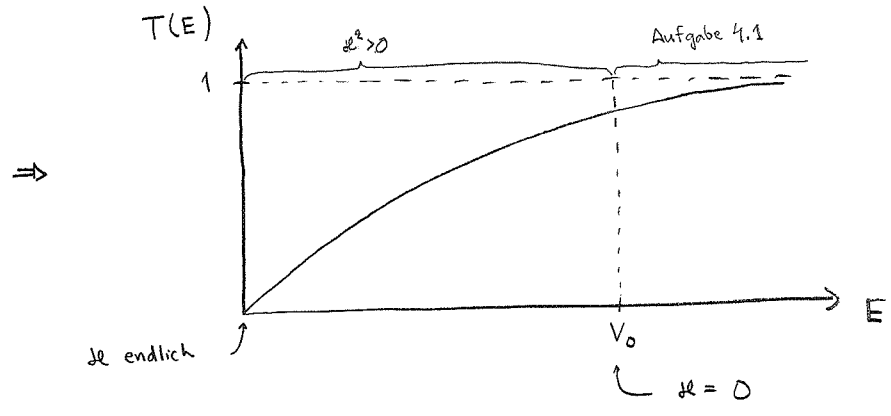
$$\Rightarrow T(E) = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \left\{ \cosh^2(\kappa L) + \left[\left(\frac{\kappa}{k_0} - \frac{k_0}{\kappa} \right) \frac{\sinh(\kappa L)}{2} \right]^2 \right\}^{-1}$$

$$= \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\kappa}{k_0} + \frac{k_0}{\kappa} \right) \frac{\sinh(\kappa L)}{2} \right]^2 \right\}^{-1}$$

 $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

Hier ist $\left(\frac{\hbar}{k_0} + \frac{k_0}{\hbar}\right)^2 = \frac{(\hbar^2 + k_0^2)^2}{k_0^2 \hbar^2} = \frac{V_0^2}{E(V_0 - E)}$ (*)

$k_0^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$; $\hbar^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$



(Es gibt keine Resonanzen weil $\sinh(\hbar L)$ keine Nullstellen, außer $\hbar L = 0$, besitzt.)

Also quantenmechanisch ist $T > 0$ auch für $E < V_0$; dies wird Tunneleffekt genannt, und $T(E)$ heißt Tunnelwahrscheinlichkeit.

Betrachten wir genauer das Verhalten bei $E \ll V_0$.

$\left(\frac{\hbar}{k_0} + \frac{k_0}{\hbar}\right)^2 \approx \frac{V_0}{E} \gg 1$

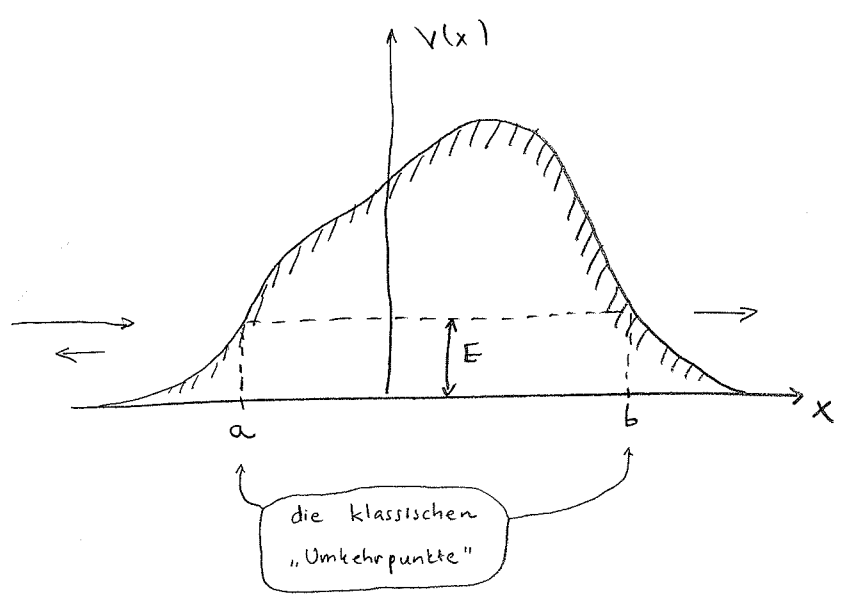
$\Rightarrow T(E) \approx \frac{4E}{V_0} \sinh^{-2}(\hbar L)$

Falls weiterhin $\hbar L \gg 1$ gilt, ist $\sinh(\hbar L) \approx \frac{e^{\hbar L}}{2}$, und

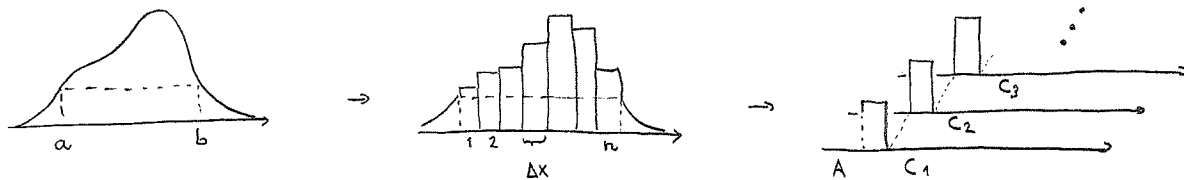
$T(E) \approx 16 \frac{E}{V_0} e^{-2 \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} L}$

Im klassischen Limes $\hbar \rightarrow 0$ ist also tatsächlich $T(E) = 0!$

Verallgemeinerung:



Eine Näherung:



$$T(E) = \frac{|C|^2}{|A|^2} \approx \frac{|C_1|^2}{|A|^2} \cdot \frac{|C_2|^2}{|C_1|^2} \cdots \frac{|C|^2}{|C_{n-1}|^2} = T_1(E) T_2(E) \cdots T_n(E)$$

Nehmen wir weiterhin an, dass der Koeffizient der Exponentialfunktion weniger wichtig ist als das Argument (\approx Sattelpunktnäherung). Dann gilt

$$T(E) \approx \prod_{i=1}^n T_i(E) \approx \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{2}{\hbar} \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{2m[V(x)-E]} dx \right\}$$

Für $n \rightarrow \infty$ und $\Delta x \rightarrow 0$ wird von der Summe ein Integral:

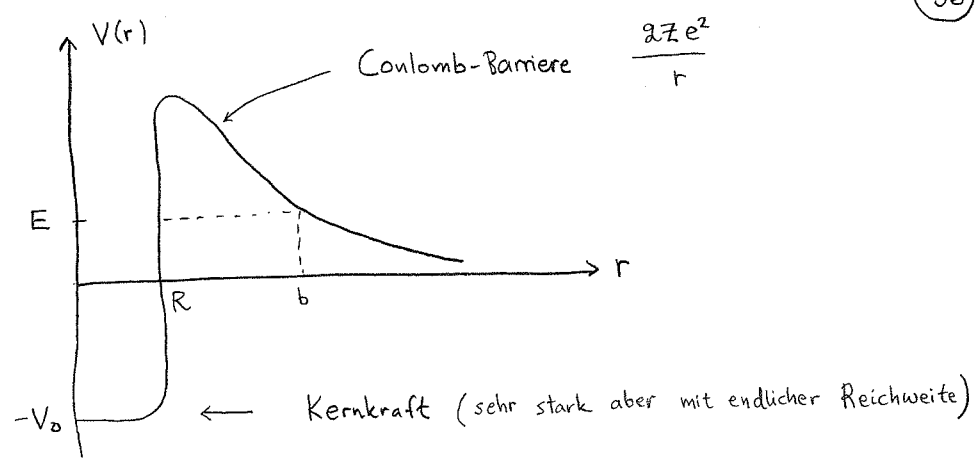
$$T(E) \approx \exp \left\{ - \frac{2}{\hbar} \int_a^b dx \sqrt{2m[V(x)-E]} \right\} \quad (*)$$

Diese Formel nennen wir den Gamow-Faktor; die Integrationsgrenzen sind die klassischen Umkehrpunkte.

Bemerkungen:

- (i) Es gibt eine alternative Herleitung des Gamow-Faktors sowie des Koeffizienten der Exponentialfunktion durch die Pfadintegralformulierung der Quantenmechanik [QM II]. Man findet, unter anderem, dass (*) eine zuverlässige Näherung dann ist, wenn $T(E) \ll 1$ gilt (d.h. in einem "semiklassischen" Bereich; "völlig klassisch" wäre ja $T(E) = 0$.)
- (ii) Der Tunneffekt hat viele wichtige Anwendungen, wie Rastertunnelmikroskopie, Josephson-Effekt in Supraleitern, Diode, usw. Wir betrachten ein Beispiel von der Kernphysik, den α -Zerfall.

α -Zerfall



Die klassischen Umkehrpunkte: $a = R \quad (\propto Z^{1/3})$
 $b \approx \frac{2Ze^2}{E}$

Für kleine Energien gilt $b \gg a$.

Gamow-Faktor:

$$G = \frac{2}{\hbar} \int_a^b dr \sqrt{2m \left[\frac{2Ze^2}{r} - E \right]}$$

$$= \frac{2}{\hbar} \sqrt{4mZe^2} \int_a^b dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}$$

$r = b \cdot x$

$$= \frac{2}{\hbar} \cdot 2Ze^2 \cdot \sqrt{\frac{2m}{E}} \cdot \int_{a/b}^1 dx \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$\frac{\pi}{2} - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^{3/2} + \mathcal{O}\left(\frac{a}{b}\right)^{5/2} \quad \text{für } \frac{a}{b} \ll 1,$$

wobei $\frac{a}{b} = \frac{ER}{2Ze^2} \left(\propto \frac{E}{Z^{2/3}} \right)$

Damit findet man eine bestimmte Beziehung zwischen

- der Zerfallsrate $\Gamma(E) \propto T(E) \propto \exp[-G(E)]$;
- der Energie E des auslaufenden α -Teilchens ;
- der Ladungszahl Z des Restkerns..

Die Übereinstimmung mit Experiment ist sehr gut, was als einer der frühen großen Erfolge der Quantenmechanik gilt.

* Substitution $x = \sin^2 \theta$; $dx = 2 \sin \theta \cos \theta$; $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{\frac{1-\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
 $\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \int_0^{\pi/2} d\theta (\cos^2 \theta + \cos^2(\frac{\pi}{2}-\theta)) = \frac{\pi}{2}$