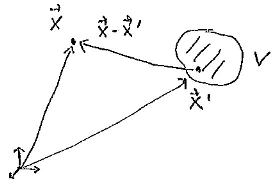
2.2 Greensche Funktionen [TF 7]



Einführung:

Im Kapitel 2.1 haben wir schon das Skalarpotential ϕ bestimmt, mit der Antwort (vgl. Seite 6)

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}'\, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad .$$

Jetzt soll dies aus der Poisson-Gleichung (Seite 5) hergeleitet werden:

$$\nabla^2\phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x}) .$$

Schreibe die rechte Seite als

$$-4\pi\rho(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' \left[-4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\right]\rho(\vec{x}') .$$

Sei $G(\vec{x},\vec{x}')$, genannt eine Greensche Funktion, die Lösung von

$$\nabla^2_{\vec{x}}\, G(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') . \qquad (*)$$

Dann ist

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}'\, G(\vec{x},\vec{x}')\,\rho(\vec{x}')$$

eine Lösung der Poisson-Gleichung.

Behauptung 1: $G(\vec{x},\vec{x}') = \dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ ist Lösung von Gleichung $(*)$.

Beweis 1: Um alles regulär zu halten, ersetze

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(\vec{x}-\vec{x}')^2+\varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \quad \text{mit } \varepsilon\to 0^+ .$$

$\vec{x}-\vec{x}' =: \vec{r}$

Benutze folglich ∇^2 in Kugelkoordinaten:

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \longrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} = \left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2}{r}\right)\left(-\frac{r}{(r^2+\varepsilon^2)^{3/2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{(r^2+\varepsilon^2)^{3/2}} + 3\,\frac{r^2}{(r^2+\varepsilon^2)^{5/2}} - \frac{2}{(r^2+\varepsilon^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-3\varepsilon^2}{(r^2+\varepsilon^2)^{5/2}} . \qquad (**)$$

Für $r\neq 0$ ergibt $\varepsilon\to 0$ null, genau wie in $(*)$.

Wenn wir aber ein Volumenintegral über $(**)$ durchführen, erhalten wir

$$\int_{|\vec{r}|\le\delta} d^3\vec{r}\, \frac{-3\varepsilon^2}{(r^2+\varepsilon^2)^{5/2}} = -12\pi\,\varepsilon^2 \int_0^\delta dr\, r^2\, \frac{1}{(r^2+\varepsilon^2)^{5/2}}$$

$$\overset{!}{=} -4\pi \int_0^\delta dr\, \frac{d}{dr}\,\frac{r^3}{(r^2+\varepsilon^2)^{3/2}}$$

$$= -4\pi\,\frac{\delta^3}{(\delta^2+\varepsilon^2)^{3/2}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} -4\pi \quad \square .$$

Behauptung 2: Die Lösung von (*) ist <u>nicht</u> eindeutig.

Beweis 2: Seien G_1 und G_2 zwei Lösungen, und $F := G_1 - G_2$.

$$\Rightarrow \nabla_{\vec{x}}^2 F = \nabla_{\vec{x}}^2 (G_1 - G_2) = -4\pi \left[\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') - \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \right] = 0 .$$

Falls es nichttriviale <u>harmonische Funktionen</u> gibt (vgl. Seite 5), mit $\nabla_{\vec{x}}^2 F(\vec{x},\vec{x}') = 0$, ist die Behauptung bewiesen worden. Und es gibt solche, z.B. $\sin(x) e^y \Rightarrow \square$.

Behauptung 3: Im $\mathbb{R}^3$ ist die einzige <u>überall endliche</u> harmonische Funktion gleich null.

Begründung 3*: Schreibe $f(\vec{x}) := F(\vec{x},\vec{x}')$ mit Ansatz $f(\vec{x}) = f_1(x) f_2(y) f_3(z)$, wie in einer Fourier-Darstellung: $\tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \underbrace{\tilde{f}(\vec{k}) e^{ik^1 x}}_{f_1} \underbrace{e^{ik^2 y}}_{f_2} \underbrace{e^{ik^3 z}}_{f_3}$.

* Wegen Benutzung eines Ansatzes ist dies ohne weitere Schritte noch kein vollständiger Beweis.

$$\Rightarrow \nabla_{\vec{x}}^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f_1(x) f_2(y) f_3(z) = 0$$

dividiere durch f

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{f_1}\frac{d^2 f_1}{dx^2}}_{\text{Funktion von } x} + \underbrace{\frac{1}{f_2}\frac{d^2 f_2}{dy^2}}_{\text{Funktion von } y} + \underbrace{\frac{1}{f_3}\frac{d^2 f_3}{dz^2}}_{\text{Funktion von } z} = 0 .$$

Die einzige Möglichkeit, die Gleichung zu erfüllen, ist, dass alle drei Terme Konstanten sind. Folglich muss mindestens eine Konstante nichtnegativ sein.

z.B. $\frac{1}{f_1}\frac{d^2 f_1}{dx^2} = \alpha > 0 \Rightarrow \frac{d^2 f_1}{dx^2} = \alpha f_1$

$$\Rightarrow f_1 = \underbrace{A \exp(\sqrt{\alpha}\, x)}_{\text{Unendlich für } x \to +\infty} + \underbrace{B \exp(-\sqrt{\alpha}\, x)}_{\text{unendlich für } x \to -\infty} \quad ↯$$

Oder $\frac{1}{f_1}\frac{d^2 f_1}{dx^2} = 0 \Rightarrow f_1 = \underbrace{A + Bx}_{\text{Unendlich für } x \to \pm\infty} \quad ↯$

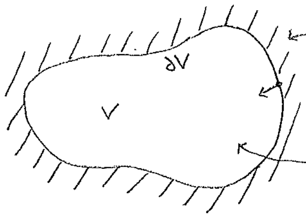
Zwischenbilanz: Falls wir die Ladungsdichte im $\mathbb{R}^3$ kennen, ist $G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ die einzige mögliche Greensche Funktion, und wir finden das Ergebnis

$$\phi(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

wieder (vgl. Seite 6).

— o —

Randwertproblem: Die Fragestellung sei jetzt umgedreht: welche Informationen braucht man an einer Oberfläche ∂V, um die Poisson-Gleichung innerhalb des Volumens lösen zu können?



eine komplizierte Materie, z.B. Metall mit Oberflächenladungen

ein leeres Gebiet, wo wir die Lösung kennen wollen

Häufig kommen zwei Möglichkeiten in Frage:

* **Dirichlet:** $\phi(\vec{x})\big|_{\vec{x}\in\partial V}$ sei gegeben
* **Neumann:** $\partial_n\phi(\vec{x})\big|_{\vec{x}\in\partial V} := \vec{n}\cdot\nabla\phi(\vec{x})\big|_{\vec{x}\in\partial V}$ sei gegeben

Behauptung 4: Die beiden genannten Randbedingungen führen zu einer eindeutigen Lösung der Poisson-Gleichung, abgesehen von einer physikalisch unwichtigen additiven Konstanten.

(Die Existenz einer Lösung wird angenommen; könnte ja mit einer Greenschen Funktion konstruiert werden, auch wenn diese im endlichen Volumen nicht eindeutig ist.)

Hilfsmittel: Wir beweisen zuerst die „erste Greensche Identität".

Seien f, g zwei reelle differenzierbare Funktionen.

$$\Rightarrow \nabla\cdot(f\nabla g) = \nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g$$

$$\Rightarrow \int_V d^3\vec{x}\,\left[\nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g\right] = \int_V d^3\vec{x}\,\nabla\cdot(f\nabla g)$$

$$\underset{\text{Gaußscher Satz}}{=} \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot(f\nabla g)$$

$$\underset{\text{Definitionen oben}}{=} \int_{\partial V} |d\vec{f}|\, f\,\partial_n g\,.$$

Beweis 4: Seien ϕ_1, ϕ_2 zwei Lösungen der Poisson-Gleichung, und $U := \phi_1 - \phi_2$ deren Differenz. Es gelten:

$$\nabla^2 U(\vec{x}) = 0 \quad \forall\ \vec{x} \in V \qquad \text{(Laplace)}$$

eines davon
$$\left\{ \begin{array}{ll} U(\vec{x})\big|_{\vec{x}\in\partial V} = 0 & \text{(Dirichlet)} \\ \partial_n U(\vec{x})\big|_{\vec{x}\in\partial V} = 0 & \text{(Neumann)} \end{array} \right.$$

Wir betrachten die erste Greensche Identität (Seite 11) mit der Wahl $f = g = U$:

$$\int_V d^3\vec{x} \left[|\nabla U|^2 + \underbrace{U \nabla^2 U}_{\text{verschwindet wegen Laplace}} \right] = \underbrace{\int_{\partial V} |d\vec{f}|\, U \partial_n U}_{\text{verschwindet wegen Dirichlet oder Neumann}}$$

$$\Rightarrow \int_V d^3\vec{x}\, |\nabla U|^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \underline{\nabla U = 0 \quad \forall\ \vec{x} \in V\ !}$$

Folglich ist $U = \phi_1 - \phi_2$ eine Konstante $\Rightarrow \square$.
(Mit Dirichlet ist die Konstante wegen Randbedingungen sogar null.)

Beispiel: <u>Faradayscher Käfig</u>

Es geht um ein ladungsfreies Volumen, eingeschlossen von einer Metallfläche.
Im Metall gibt es freie Elektronen
$\Rightarrow$ im statischen Limes muss $\vec{E} = \vec{0}$ sein, sonst gäbe es Ströme
$\Rightarrow$ ϕ ist konstant im Metall, und folglich auf ∂V.

Was passiert innerhalb des Volumens?

<u>Eine</u> Lösung von $\nabla^2 \phi = 0 \ \forall \vec{x} \in V$, mit der Randbedingung $\phi|_{\vec{x}\in\partial V} =$ Konstante, ist $\phi =$ Konstante $\forall \vec{x} \in V$.

Da die Lösung eindeutig ist, ist dies auch schon die gesuchte Lösung! Hieraus folgt $\vec{E} = \vec{0}$ <u>auch innerhalb</u> des Faradayschen Käfigs.

— · —