Übungsblatt 9 zur Vorlesung

"Statistische Methoden"

Schätztheorie und Konfidenzintervalle

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 18, Abgabe der Lösungen: Woche 19 (bis Freitag, 1615 Uhr), Besprechung: Woche 20

Must

Aufgabe 37 [Eigenschaften von Schätzern]

Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Stichprobe aus einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung. Geben Sie *einfache* Beispiele für:

a) einen Schätzer für μ, der zwar erwartungstreu, aber nicht konsistent ist.

b) einen Schätzer für μ, der zwar konsistent, aber nicht erwartungstreu ist.

Aufgabe 38 [$MSE = V + b^2$, Lemma 5.6]

Zeigen Sie: Mit den Bezeichnungen aus 5.1.3 gilt:

$$MSE(\hat{\mu}_n, \mu) = V[\hat{\mu}_n] + b^2.$$

Aufgabe 39 [Eindeutigkeit von KI's]

Konfidenzintervalle sind nicht eindeutig (zB gibt es immer das vollrandomisierte KI). Geben Sie eine (einfache, bekannte) Situation an, in der Sie dann 2 nichttriviale KI's angeben.

Aufgabe 40 [Konfidenzintervalle]

Der Durchmesser der von einer bestimmten Maschine gefertigten Stahlkugeln für Kugellager seien ungefähr normalverteilt. Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 30$ erhält man einen mittleren Durchmesser $\bar{x} = 10.2$ mm und eine Streuung

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{30}(x_i - \bar{x})^2} = 0.62\,\text{mm}.$$

Bestimmen Sie hieraus Konfidenzintervalle für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 zum Niveau $1-\alpha = 0.95$.

Aufgabe 41 [Konfidenzintervalle]

Es wird angenommen, dass die Durchmesser der auf einer bestimmten Anlage hergestellten Stahlkugeln durch die Realisationen einer normalverteilten Zufallsgrösse mit $\sigma = 1.04$ mm beschrieben werden können. Aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 300$ ergab sich $\bar{x} = 12.14$ mm. Bestimmen Sie für die Vertrauenswahrscheinlichkeit von 0.99 die Grenzen des KI für den mittleren Durchmesser dieser Kugeln.

Standard

Aufgabe 42 [MLE bei der Poissonverteilung] [2 Punkte]

Berechnen Sie den MLE, wenn die Daten $x_1, \dots, x_n$ aus einer Poissonverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ stammen. Macht das Resultat Sinn? Tipp: Benutzen Sie *unbedingt* den Logarithmus an geeigneter Stelle.

Aufgabe 43 [MLE bei der Exponentialverteilung] [2 Punkte]

Berechnen Sie den MLE, wenn die Daten $x_1, \dots, x_n$ aus einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ stammen. Macht das Resultat Sinn? Tipp: Benutzen Sie *unbedingt* den Logarithmus an geeigneter Stelle.

Aufgabe 44 [Erwartungstreuer Schätzer der Varianz] [3 Punkte]

Sei $(X_i)_{i=1}^n$ eine Folge von iid-Zufallsgrössen mit $E[X_1^2] < \infty$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2$$

ist ein erwartungstreuer Schätzer der Varianz. Dieses Resultat gilt übrigens für beliebige Verteilungen! "Tipp": einfach drauflosrechnen.

Aufgabe 45 [Momentenmethode] [2 Punkte]

Sei $x_1, \dots, x_k$ eine Stichprobe aus einer Gamma(n, λ)-Verteilung, $n \in \mathbb{N}, \lambda > 0$. Schätzen Sie mit Hilfe der Momentenmethode n und λ.

Aufgabe 46 [Cramer-Rao-Schranke im diskreten Fall] [2+2 Punkte]

Formulieren Sie die Cramer-Rao-Schranke für diskrete Zufallsgrössen und berechnen Sie die Schranke im Fall der Poisson-Verteilung.

Honours

Aufgabe 47 [Uniformverteilung und MLE] [1+1+1 Punkte]

a) Sei $x_1, \dots, x_n$ eine Stichprobe aus einer $U[0, \theta]$-Zufallsgrösse. Geben Sie den MLE für diese Verteilungsfamilie an. Schreiben Sie dazu die gemeinsame Dichtefunktion exakt auf und maximieren Sie diese ohne abzuleiten.

b) Suchen Sie eine reelle Zahl a, damit der MLE-Schätzer aus a) mit a multipliziert erwartungstreu ist (mit Beweis).

c) Sei $x_1, \dots, x_n$ eine Stichprobe aus einer $U[\theta, \theta + 1]$-Verteilung. Geben Sie einen sinnvollen Schätzer für θ an, welcher $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$ benutzt/kombiniert. Überprüfen Sie diesen Schätzer auf Erwartungstreue.

Aufgabe 48 [Vervollständigung des Beweises der Cramer-Rao-Schranke] [6 Punkte]

Vervollständigen Sie den Beweis der Cramer-Rao-Schranke (Ableitungen unter dem Integral) mit Hilfe des Satzes der majorisierten Konvergenz von Lebesgue im stetigen Fall.