Euklidischer Raum

Kartesisches Koordinatensystem

Man zerlegt die Mathematik in Teildisziplinen: Arithmetik, Algebra, Geometrie und so weiter - , doch diese Einteilung ist ja menschlich. Die Mathematik kennt keine strikten Grenzen zwischen den einzelnen Gebieten. Probleme, die man lange Zeit einem Bereich zuordnete, löst man plötzlich mit einer Methode, die aus einem ganz anderen Bereich stammt.

Spuren von Wechselbeziehungen dieser Art lassen sich schon bei den Griechen ausmachen, etwa in Form von Verbindungen zwischen dem Satz des Pythagoros und den irrationalen Zahlen oder der mechanischen Analogien, mit denen Archimedes zum Volumen der Kugel gelangte.

Ian Stewart, "Meilensteine der Mathematik"

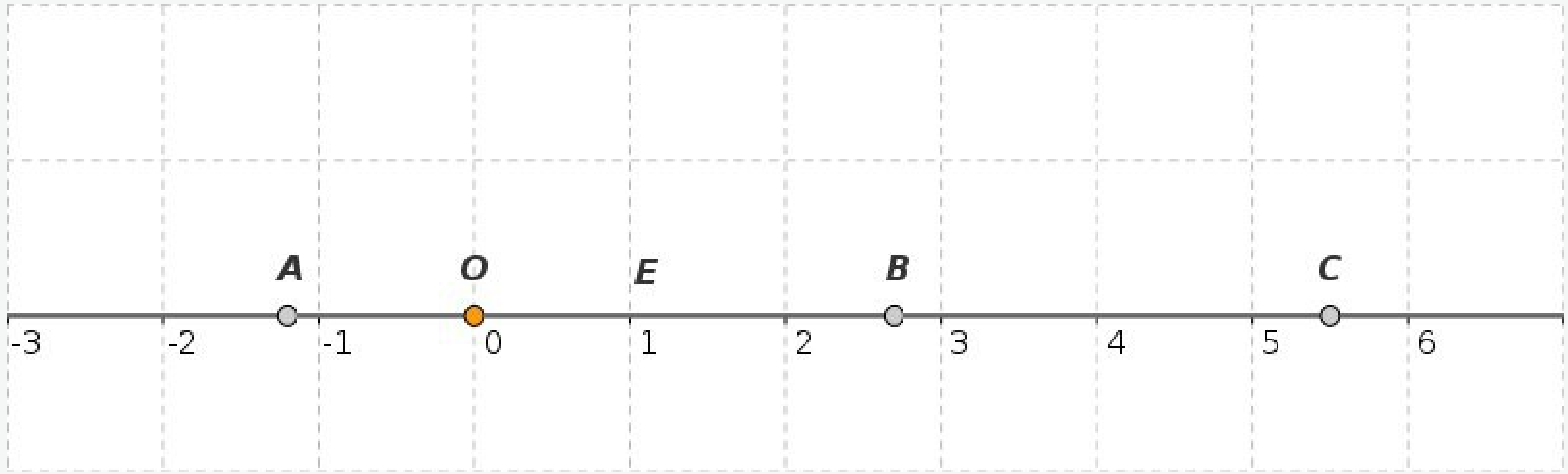


Abb. 1-1: Punkte auf der Zahlengerade

Auf einer Geraden kann man nach Festlegung einer Einheitstrecke alle Punkte durch die Angabe einer Koordinate erfassen. Eine solche Gerade wird Zahlengerade genannt.

$$A\,(-\,1.2),\quad E\,(1),\quad B\,(2.7),\quad C\,(5.5)$$

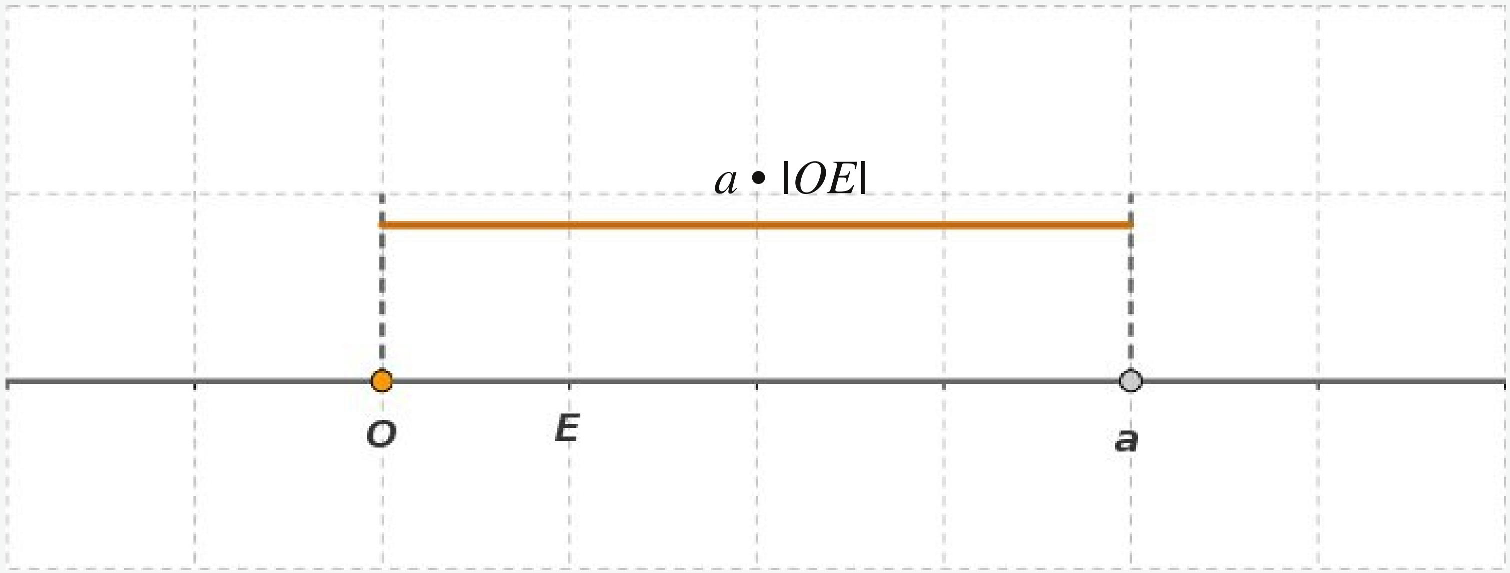


Abb. 1-2: Die Zahlengerade

Die Zahlengerade dient einer Veranschaulichung der reellen Zahlen. Auf einer Geraden wählt man einen Punkt O (Ursprung) und einen Punkt E (Einheitspunkt). Dann stellt man die reelle Zahl a durch einen Punkt auf der Geraden dar, dessen Abstand von O gleich $a\,|OE|$ ist. Ist a positiv, so liegt der zugehörige Punkt von O aus auf der gleichen Seite wie E, andernfalls auf der anderen Seite.

Wir können jeden Punkt der Ebene durch seine Koordinaten identifizieren und die Ebene mit dem zweidimensionalen Raum

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

den wir als die Menge aller geordneter Paare *(x, y)* darstellen:

$$\mathbb{R}^2 = \{\, (x\,,\ y)\,, \quad x\,,\ y \in \mathbb{R}\,\}$$

Eine Ebene, in die sich ein solches Koordinatensystem einzeichnen lässt, können wir uns gut vorstellen. Wir nennen sie Euklidische Ebene.

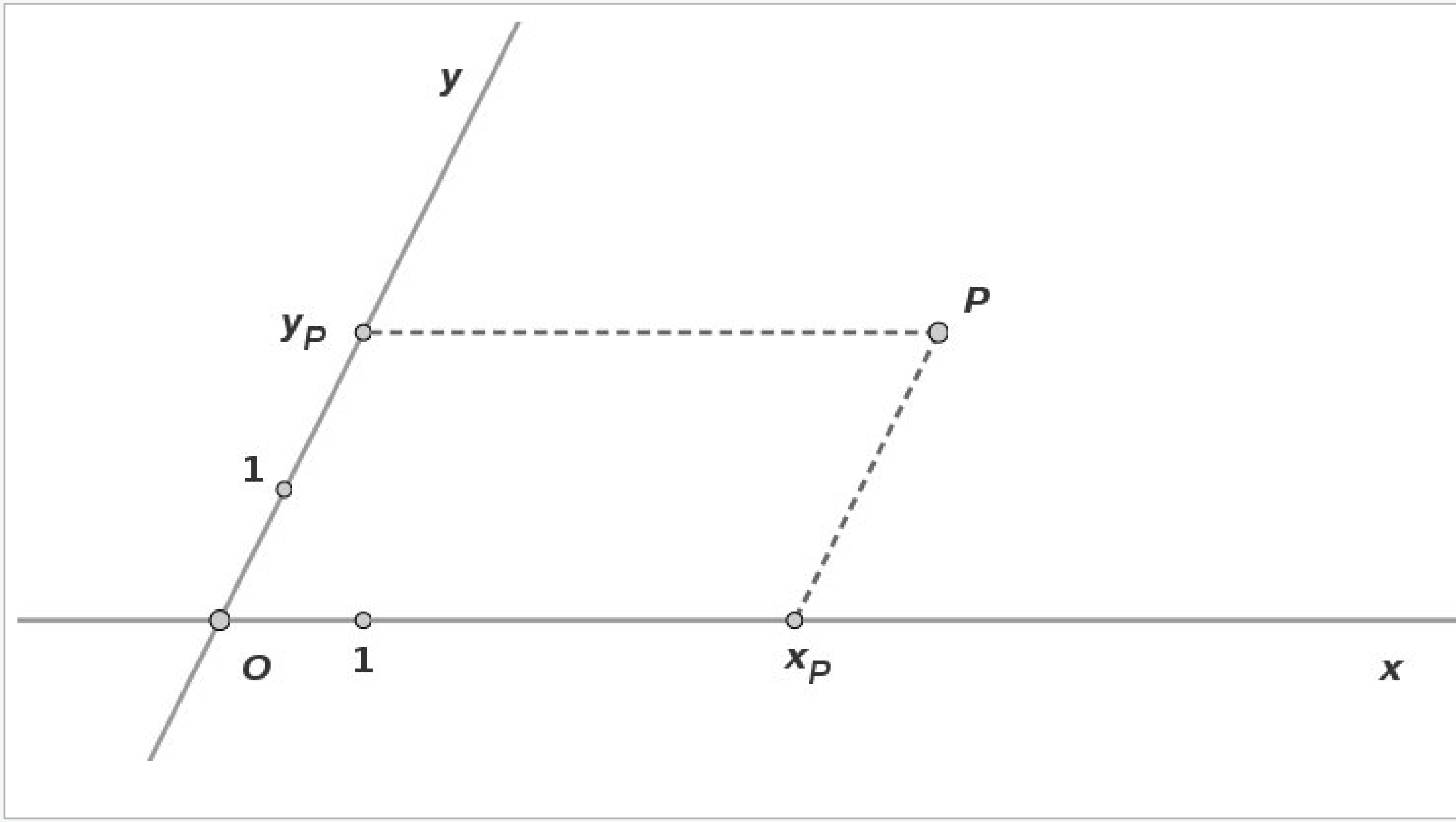
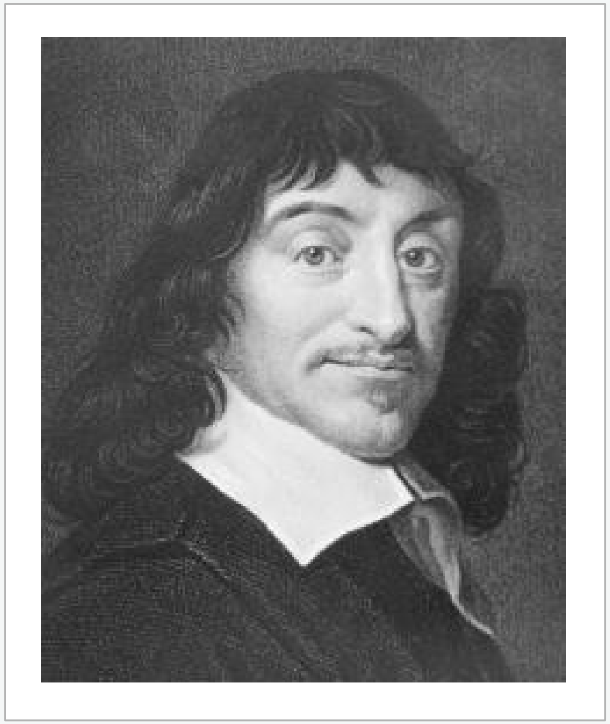


Abb. 2-1: Schiefwinkliges Koordinatensystem

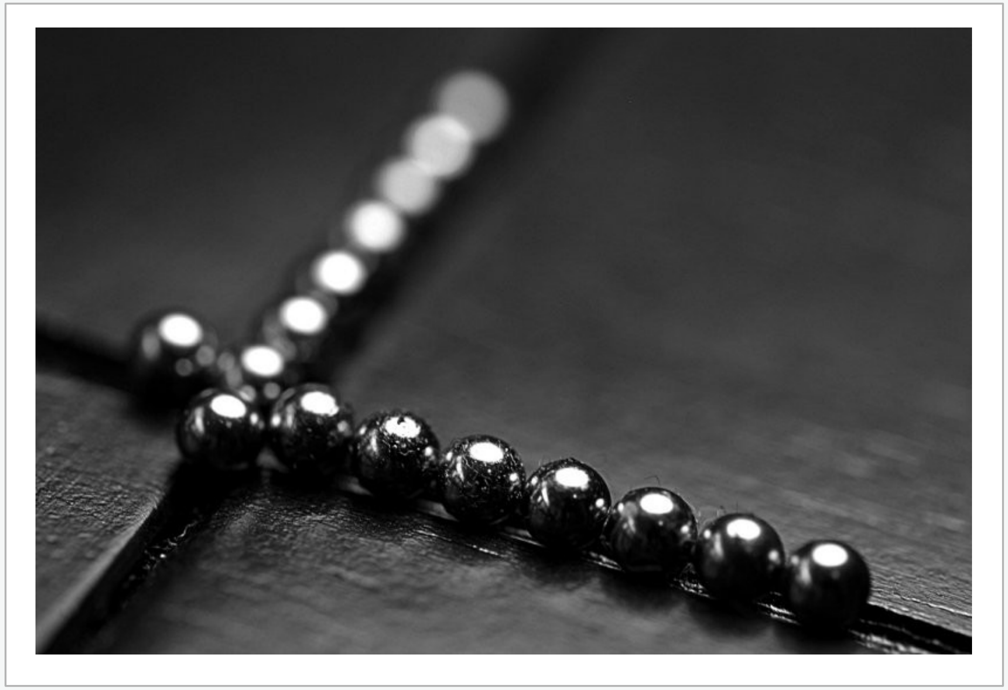
Zeichnet man in der Ebene zwei sich schneidende Zahlengeraden (Koordinatenachsen, x-Achse und y-Achse), dann kann man jeden Punkt der Ebene eindeutig durch ein Zahlenpaar (Koordinatenpaar) festlegen. Schneiden die Parallelen zu den Koordinatenachsen, die durch den Punkt P gehen, die Achsen an den Stellen x_P bzw. y_P, so sind diese Zahlen die Koordinaten von P.



René Descartes (1596-1650)

französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler

Ein kartesisches Koordinatensystem ist ein orthogonales Koordinatensystem. Es ist nach dem latinisierten Namen Cartesius seines Erfinders René Descartes benannt. Im zwei- und dreidimensionalen Raum handelt es sich um das am häufigsten verwendete Koordinatensystem, da sich viele geometrische Sachverhalte in diesem am besten beschreiben lassen.



http://www.pbase.com/enjayel/image/122882382

Für ein kartesisches Koordinatensystem gilt:

- Die Achsen sind zueinander rechtwinklig
- Die Einheiten auf den Achsen sind gleich
- Die x-Achse geht durch Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn in die y-Achse über

Den Schnittpunkt O der Achsen nennt man Ursprung des Koordinatensystems.

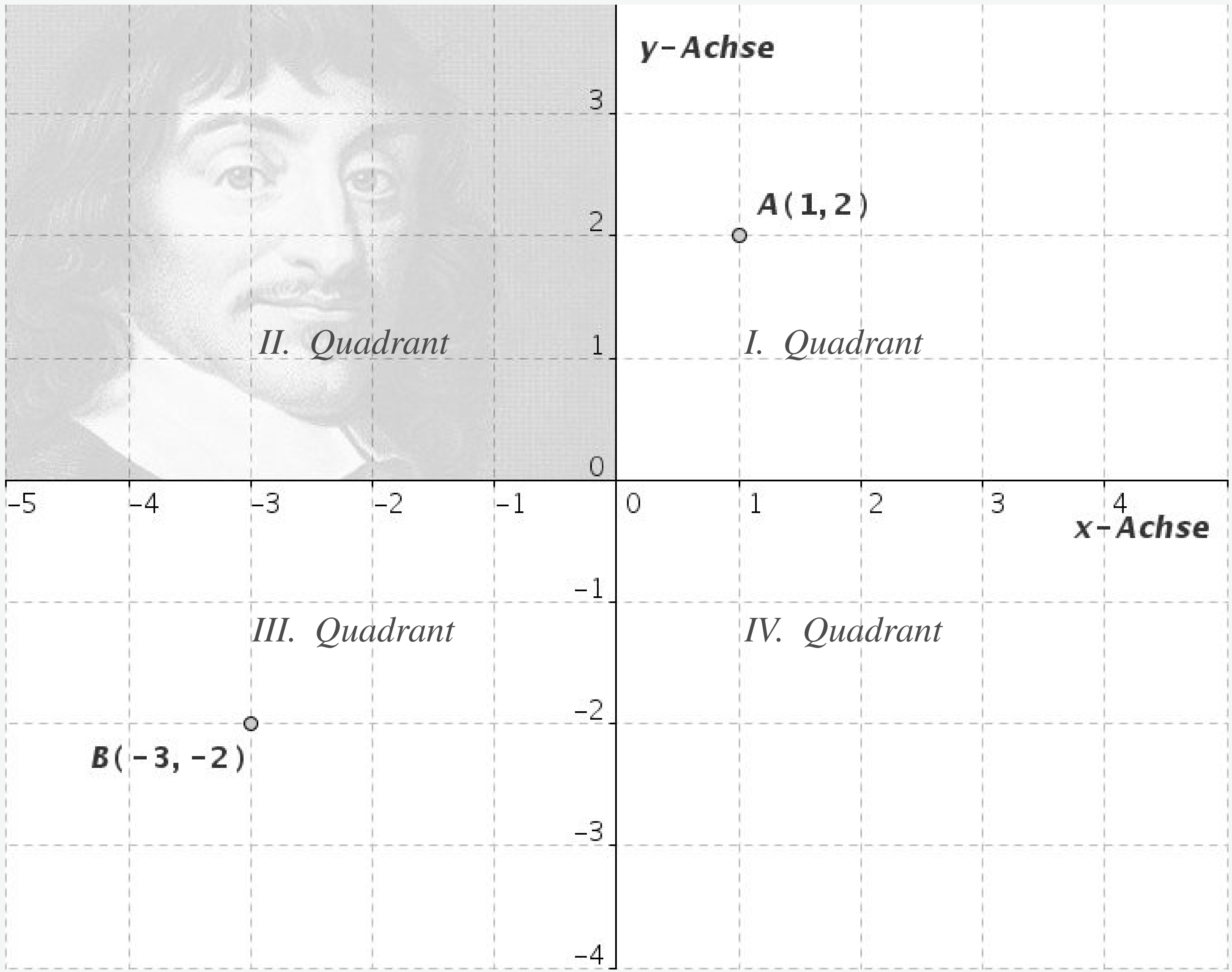


Abb. 2-2: Zweidimensionales Kartesisches Koordinatensystem, Punkte A und B

Durch ein kartesisches Koordinatensystem wird die Ebene in vier Quadranten eingeteilt.

Der Begriff euklidischer Raum bezeichnet den “Raum unserer Anschauung wie er in “Euklids Elementen” durch Axiome und Postulate beschrieben wird. Bis ins 19. Jahrhundert wurde davon ausgegangen, dass dadurch der uns umgebende physikalische Raum beschrieben wird. Der Zusatz “euklidisch” wurde nötig, nachdem in der Mathematik allgemeinere Raumkonzepte entwickelt wurden und es sich im Rahmen der Relativitätstheorie zeigte, dass zur Beschreibung des Raums in der Physik andere Raumbegriffe benötigt werden.

Wikipedia

Euklids Bestreben was es, die Mathematik und insbesondere die Geometrie aus wenigen “offensichtlichen” Tatsachen, Axiome genannt, logisch herzuleiten, ohne dabei die Anschauung zu verwenden. Er entwarf ein System von Axiomen der Geometrie, aus welchem er alle damals bekannten Lehrsätze der Geometrie ableitete. Über Jahrhunderte hinweg lernte man die Mathematik nach Euklid. Nur eines seiner geometrischen Axiome, das Parallelenaxiom, war umstritten. Danach gibt es zu jeder Geraden g und jedem Punkt P außerhalb von g genau eine Gerade h durch P, welche parallel zu g ist, also keinen Punkt mit g gemeinsam hat (Abb. 3).

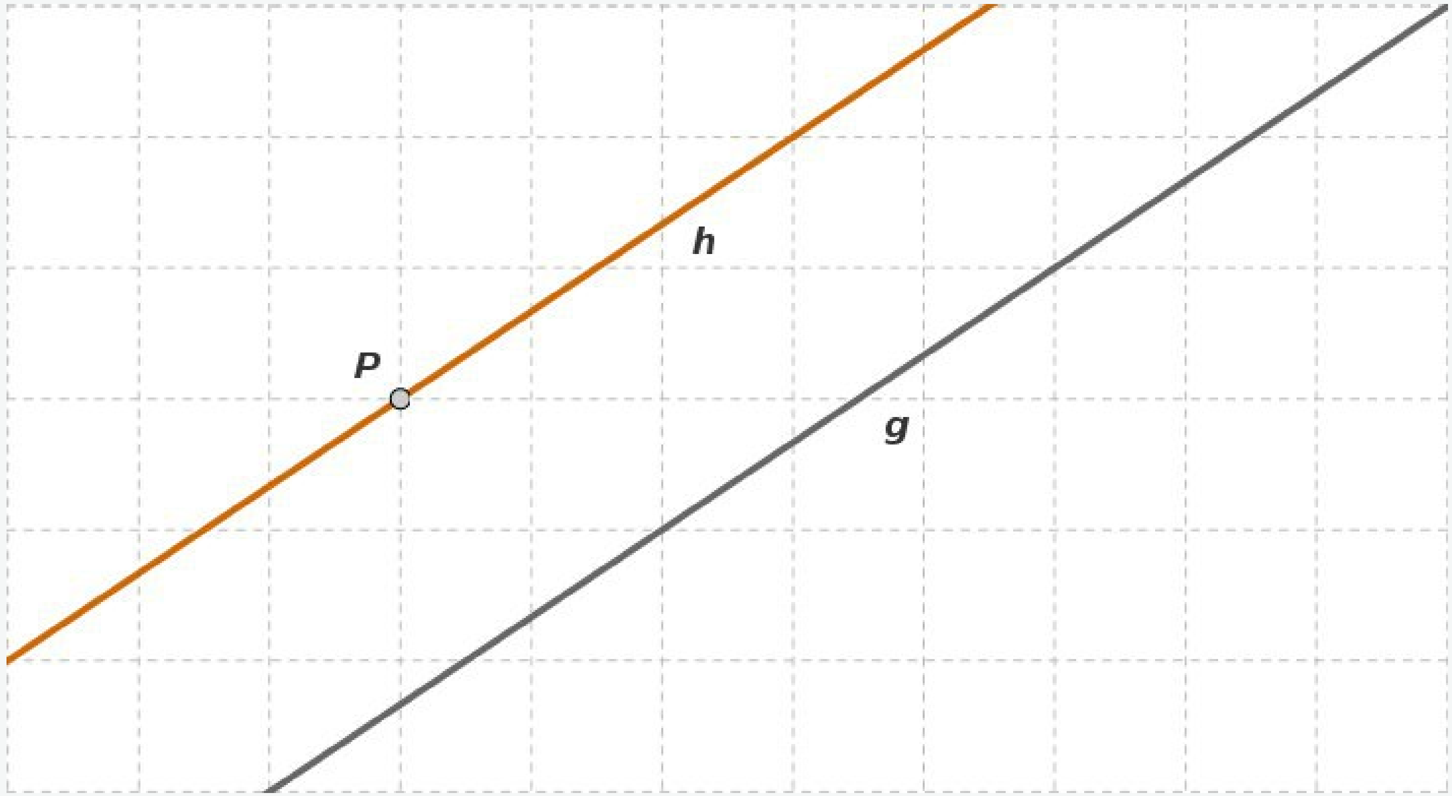


Abb. 3: Parallelenaxiom

Erst nach 1800 wurde gezeigt, dass das Parallelenaxiom unabhängig von den anderen Axiomen ist und dass es aber auch denkbar und vernünftig ist, eine Geometrie zu vereinbaren, in der es nicht gilt. Man nennt heute eine Geometrie, in der das Parallelenaxiom gilt, euklidisch. Es gibt auch nichteuklidische Geometrien. Für nichteuklidische Geometrien gelten alle Axiome, die Euklid für die Geometrie aufgestellt hat, mit Ausnahme des Parallelenaxioms. *(Duden, Mathematik)*