Eva Zerz
Viktor Levandovskyy

RWTH Aachen
SS 2010

Algebraische Systemtheorie – Übung 1

(Besprechung am 20.4.)

Eine partielle Ordnung $\leq$ auf einer Menge X ist eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation. Seien X und Y partiell geordnete Mengen und seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ zwei Abbildungen. Man nennt f, g eine *Galois-Korrespondenz*, wenn

(G1) f, g ordnungsumkehrend sind, d.h., $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ und analog für g,

(G2) $x \leq g(f(x))$ für alle $x \in X$ und $y \leq f(g(y))$ für alle $y \in Y$.

Zeigen Sie:

1. Es gilt $f \circ g \circ f = f$ und $g \circ f \circ g = g$.
2. Die Abbildung $f_1 := f|_{\mathrm{im}(g)}$ ist injektiv und $\mathrm{im}(f_1) = \mathrm{im}(f)$. Also ist $\mathrm{im}(g) \to \mathrm{im}(f)$, $x \mapsto f(x)$ eine Bijektion mit Umkehrabbildung $y \mapsto g(y)$.
3. Definiert man $\overline{x} := g(f(x))$ für alle $x \in X$, so gilt
$$x \leq \overline{x}, \qquad \overline{\overline{x}} = \overline{x}, \qquad x_1 \leq x_2 \Rightarrow \overline{x_1} \leq \overline{x_2}.$$
Daher nennt man $\overline{x}$ den *Abschluss* von x bzgl. der Galois-Korrespondenz.
Dann ist $\overline{x}$ die kleinste obere Schranke von x in $\mathrm{im}(g)$.
Außerdem gilt: x ist abgeschlossen (d.h., $x = \overline{x}$) $\Leftrightarrow x \in \mathrm{im}(g)$.
4. Folgendes ist ein Beispiel für eine Galois-Korrespondenz: Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sei $X = Y$ die Menge aller Unterräume von V (partiell geordnet durch Inklusion), und sei $f = g$ die Abbildung $U \mapsto U^\perp$, wobei $U^\perp = \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$. Welche Bedingungen oder Gegenbeispiele für $U = U^{\perp\perp}$ kennen Sie?
5. Formulieren Sie die Galois-Korrespondenz der Algebraischen Geometrie (Hinweis: die Abbildungen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{J}$).

Bemerkung: Namenspatron ist die Galois-Korrespondenz der Galois-Theorie. Dort ist X die Menge aller Teilkörper eines Körpers L, und Y die Menge aller Untergruppen der Automorphismengruppe G von L, beide partiell geordnet durch Inklusion. Man bildet einen Teilkörper $K \subseteq L$ auf $\mathrm{Gal}(L/K)$ ab, und eine Untergruppe $H \subseteq G$ auf den Fixkörper von H.