Eva Zerz
Viktor Levandovskyy

RWTH Aachen
SS 2010

Algebraische Systemtheorie – Übung 6

(Besprechung am 1.6. **zum Vorlesungstermin** 11.45-13.15, HS V)

1. Sei $\mathcal{D}$ ein Ring, $R \in \mathcal{D}^{g\times q}$ und $\mathcal{M} = \mathcal{D}^{1\times q}/\mathcal{D}^{1\times g}R$.

Zeigen Sie: $\mathcal{M}$ ist genau dann frei, wenn $\operatorname{im}(\cdot R) = \ker(\cdot L)$ für eine links invertierbare $\mathcal{D}$-Matrix L gilt.

Hinweis:

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{M} \arrow[r] & 0 \\ \mathcal{D}^{1\times g} \arrow[r, "\cdot R"] & \mathcal{D}^{1\times q} \arrow[ur] \arrow[dr, "\cdot L"] & & \\ & & \mathcal{D}^{1\times l} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

2. Sei $\mathcal{D}$ ein Noetherscher Bereich, $R \in \mathcal{D}^{g\times g}$ und $\mathcal{M} = \mathcal{D}^{1\times q}/\mathcal{D}^{1\times g}R$.
Sei $R_c \in \mathcal{D}^{g_c\times q}$ so, dass $t\mathcal{M} = \mathcal{D}^{1\times g_c}R_c/\mathcal{D}^{1\times g}R$.

Zeigen Sie: Wenn $t\mathcal{M}$ ein direkter Summand von $\mathcal{M}$ ist, dann gibt es $\mathcal{D}$-Matrizen A, B mit $AR + R_cBR_c = R_c$.

Hinweis: Ist $t\mathcal{M}$ direkter Summand von $\mathcal{M}$, so gibt eine $\mathcal{D}$-lineare Abbildung $\pi : \mathcal{M} \to t\mathcal{M}$ mit $\pi|_{t\mathcal{M}} = \mathrm{id}_{t\mathcal{M}}$. Dieses π muss die Form $\pi([x]) = [xBR_c]$ haben.

Ab jetzt sei $\mathcal{D}$ ein (kommutativer) Hauptidealbereich und $\mathcal{M}$ ein endlich erzeugter $\mathcal{D}$-Modul.

3. Rekapitulieren Sie den Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealbereichen und begründen Sie damit folgende Aussagen: (i) $\mathcal{M}$ torsionsfrei $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ frei. (ii) Der Torsionsuntermodul $t\mathcal{M}$ ist ein direkter Summand von $\mathcal{M}$.

Diskutieren Sie die folgenden "Gegenbeispiele" zu (i):
(a) $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul
(b) $\mathcal{D} = K[s_1, s_2]$, K Körper, $R = [s_1, s_2] \in \mathcal{D}^{1\times 2}$

und (ii):
(c) $\prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul, wobei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen ist (bestimmen Sie den Torsionsuntermodul; ohne Beweis: dieser ist kein direkter Summand des Moduls)
(d) $\mathcal{D} = K[s_1, s_2]$, K Körper, $R = [s_1^2, s_1s_2] \in \mathcal{D}^{1\times 2}$.

Sei $R \in \mathcal{D}^{g \times q}$ eine Matrix mit vollem Zeilenrang und $\mathcal{M} = \mathcal{D}^{1 \times q} / \mathcal{D}^{1 \times g} R$.

4. Zeigen Sie: $\mathcal{M}$ ist torsionsfrei $\Leftrightarrow$ die Smith-Form von R ist $[I, 0]$ $\Leftrightarrow$ R ist rechts invertierbar.

5. Sei $\mathcal{R}$ ein kommutativer Ring, n, m positive ganze Zahlen und $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ so dass $K := [B, AB, \ldots, A^k B] \in \mathcal{R}^{n \times (k+1)m}$ eine Rechtsinverse hat.

(b) Die Matrix $R := [\sigma I - A, -B] \in \mathcal{R}[\sigma]^{n \times (n+m)}$ hat eine Rechtsinverse.

Schließen Sie: Das System $\sigma x = Ax + Bu$ ist als abstraktes lineares System steuerbar (d.h., $\mathcal{M}$ torsionsfrei) genau dann, wenn es im klassischen Sinne (also wie in Übung 2) steuerbar ist.