15.05.2006

6. S-Integrierbarkeit (Teil I)

Markus Bördgen

Sei im folgenden $(\Omega, \mathbb{A}, \mu)$ ein Hyperwahrscheinlichkeitsraum und $F : \Omega \to^* \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar und intern. $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ beschreibt den Standardteil von F, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & {}^*\overline{\mathbb{R}} \arrow[d, "\mathrm{st}"] \\ \Omega \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"] & \overline{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

Man kann die komplette Lebesgue Integrationstheorie transferieren und bekommt einen Integralbegriff ${}^*\int\limits_A F(\omega)d\mu(\omega)$ für $\mu-{}^*$Lebesgue integrierbare Funktionen F. Wobei * hier meistens weggelassen wird.
Für fast alle Fälle ist es ausreichend den hyperendlichen Fall zu betrachten:

$$E_A[F] = \int\limits_A F(\omega)d\mu(\omega) = \sum_{\omega \in A} F(\omega)\mu(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} F(\omega)\frac{1}{|\Omega|}$$

Hier ist für die letzte Gleichheit vorausgesetzt, dass μ ein Zählmaß ist.

1 S-Integrierbarkeit

Definition 1.1 (Loeb Integrierbarkeit). *$f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist Loeb integrierbar, genau dann wenn es Lebesgue integrierbar bzgl. des Loeb Maßes μ_L ist.*

Unser Ziel ist es nun die Loeb Integrierbarkeit von f durch Bedingungen an F zu charakterisieren, d.h. einen nicht-standard "Integrierbarkeitsbegriff" zu entwickeln:

Definition 1.2 (S-Integrierbarkeit). *$F : \Omega \to^* \overline{\mathbb{R}}$ intern und μ-messbar.*
F S-integrierbar $:\Leftrightarrow$

1. $E[|F|] < \infty$
2. $E_A[|F|] \approx 0$ *falls* $A \in \mathbb{A}$ *und* $\mu(A) \approx 0$

Satz 1.3 (Hauptsatz). *$f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ Loeb integrierbar $\Leftrightarrow$ f hat S-integrierbare Liftung $F : \Omega \to^* \overline{\mathbb{R}}$*
In diesem Fall gilt:

$$E_A[F] \approx {}^\circ E_A[F] = E_A[{}^\circ F] = \int\limits_A f(\omega) d\mu_L(\omega)$$

Korollar 1.4. *Die Funktion $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ ist Lebesgue integrierbar genau dann wenn sie eine S-integrierbare Liftung $F : \mathbb{T} \to^* \overline{\mathbb{R}}$ hat. Dann gilt:*

$$\sum_{t \in \mathbb{T}} F(t) \Delta t \approx \int_0^1 f(x) dx$$

Hierbei wird die Situation durch folgendes kommutatives Liftungsdiagramm beschrieben:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathrm{st}"] \arrow[dr, "\overline{f}"] & {}^*\overline{\mathbb{R}} \arrow[d, "\mathrm{st}"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "f"] & \overline{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

Definition 1.5 (S-beschränkt). *$F : \Omega \to^* \overline{\mathbb{R}}$. F S-beschränkt $:\Leftrightarrow |F| < \infty$*

Lemma 1.6 (Spezialfall). *$F : \Omega \to^* \overline{\mathbb{R}}$ sei μ-messbar, intern und S-beschränkt. Dann gilt:*

1. *F ist S-integrierbar*
2. *${}^\circ F$ Loeb messbar und $E[F] \approx \int^\circ F d\mu$*