

Karo auf Nachfolgerkardinalzahlen.

Karen Räsch

07.04.2008

In diesem Vortrag wird für jede überabzählbare Kardinalzahl λ bewiesen, dass $2^\lambda = \lambda^+$ impliziert \diamond_{λ^+} . Damit sind für solche $2^\lambda = \lambda^+$ und \diamond_{λ^+} äquivalent. Dies ist das wichtigste Resultat aus Shelah's 922. Artikel. Diese Darstellung orientiert sich maßgeblich an dem Vortrag von Assaf Rinot auf dem Young Set Theory Workshop unter dem Titel „Diamond on successor cardinals“. Seine Präsentation basiert auf einem Vortrag von Péter Komjáth.

ERINNERUNG. Sei κ eine Kardinalzahl und $S \subseteq \kappa$ stationär in κ . Dann ist \diamond_S erfüllt genau dann, wenn es eine Folge $\langle S_\delta \mid \delta \in S \rangle$ von Mengen $S_\delta \subseteq \delta$ gibt, so dass für jedes $X \subseteq \lambda^+$ die Menge $\{\delta \in S \mid X \cap \delta = S_\delta\}$ stationär in λ^+ ist.

Offenbar folgt aus \diamond_S auch $\diamond_{S'}$ für jedes $S' \supseteq S$.

Ebenfalls leicht nachzuvollziehen ist: \diamond_{λ^+} impliziert $2^\lambda = \lambda^+$.

Sei dazu $Y \subseteq \lambda$ beliebig. Dann ist $\{\delta < \lambda^+ \mid S_\delta = Y \cap \delta\}$ stationär und damit unbeschränkt in λ^+ , womit ein $\delta^* \geq \lambda$ mit $S_{\delta^*} = Y \cap \delta^* = Y$ existiert. Es gibt also höchstens λ^+ viele Teilmengen von λ .

THEOREM (Shelah). Sei λ eine Kardinalzahl mit $2^\lambda = \lambda^+$. Dann ist \diamond_S für jedes stationäre $S \subseteq \{\delta < \lambda^+ \mid \text{cf}(\delta) \neq \text{cf}(\lambda)\}$ erfüllt.

Beweis. Seien λ und S wie oben. Dann ist die Behauptung für abzählbares λ trivialerweise erfüllt. Sei also im Folgenden λ überabzählbar. Ohne Einschränkung ist $S \cap \lambda = \emptyset$ und S enthält nur Limesordinalzahlen.

Setze $\kappa := \text{cf}(\lambda)$. Für jedes $\delta \in S$ sei $\{A_i^\delta \mid i < \kappa\}$ eine aufsteigende Kette von Elementen aus $[\delta]^{<\lambda}$ mit $\delta = \bigcup_{i < \kappa} A_i^\delta$. Diese erhält man beispielsweise, indem man eine surjektive Abbildung $f : \lambda \rightarrow \delta$ sowie eine konfinale Folge $\langle \nu_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ in λ betrachtet und $A_i^\delta := \bigcup_{\alpha < i} f[\nu_\alpha]$ setzt. Außerdem können wir für alle $\delta \in S$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\sup(A_0^\delta) = \delta$.

Bezeichne für $X \subseteq I \times Y$ und $i \in I$ die Projektion $\{y \in Y \mid (i, y) \in X\}$ auf die i -te Komponente mit $(X)_i$.

LEMMA 1. Sei $\{X_\beta \mid \beta < \lambda^+\}$ eine Aufzählung von $[\kappa \times (\lambda \times \lambda^+)]^{\leq \lambda}$. Dann gibt es ein $i < \kappa$, so dass für alle $Z \subseteq \lambda \times \lambda^+$ die Menge

$$S_{i,Z} := \{ \delta \in S \mid \sup\{ \alpha \in A_i^\delta \mid \exists \beta \in A_i^\delta (Z \cap (\lambda \times \alpha) = (X_\beta)_i) \} = \delta \}$$

stationär in λ^+ ist.

Beweis. Angenommen nicht, so wähle für jedes $i < \kappa$ ein $Z_i \subseteq \lambda \times \lambda^+$ und eine club Menge $D_i \subseteq \lambda^+$ mit $S_{i,Z_i} \cap D_i = \emptyset$. Betrachte

$$f: \lambda^+ \rightarrow \lambda^+, \quad \alpha \mapsto \min\{ \beta < \lambda^+ \mid \bigcup_{j < \kappa} \{j\} \times (Z_j \cap (\lambda \times \alpha)) = X_\beta \}.$$

Es ist $D := \{ \delta \in \bigcap_{i < \kappa} D_i \mid \forall \alpha < \delta (f(\alpha) < \delta) \}$ eine club Menge. Wäre dem nicht so, erhielten wir für die wohldefinierte und regressive Abbildung

$$h: (\bigcap_{i < \kappa} D_i) \setminus D \rightarrow \lambda^+, \quad \delta \mapsto \min\{ \alpha < \lambda^+ \mid f(\alpha) \geq \delta \}$$

auf einer stationären Menge nach dem Satz von Fodor eine stationäre – insbesondere unbeschränkte – Menge $T \subseteq (\bigcap_{i < \kappa} D_i) \setminus D$ und ein $\nu < \lambda^+$, so dass für alle $\delta \in T$ gilt $h(\delta) = \nu$. Aber dann wäre $f(\nu) \geq \lambda^+$, was nicht möglich ist.

Offenbar ist für jedes $\delta \in D \cap S$

$$A_0^\delta = \{ \alpha \in A_0^\delta \mid \exists \beta < \delta \forall j < \kappa (Z_j \cap (\lambda \times \alpha) = (X_\beta)_j) \}.$$

Sei nun $\delta \in D \cap S$ fest gewählt. Setze für alle $i < \kappa$

$$B_i^\delta := \{ \alpha \in A_0^\delta \mid \exists \beta \in A_i^\delta \forall j < \kappa (Z_j \cap (\lambda \times \alpha) = (X_\beta)_j) \}.$$

Da $A_0^\delta = \bigcup_{i < \kappa} B_i^\delta$, $\sup(A_0^\delta) = \delta$, $\text{cf}(\delta) \neq \kappa$ und die B_i aufsteigend sind, existiert ein $i < \kappa$ mit $\sup(B_i^\delta) = \delta$. Insbesondere $\sup\{ \alpha \in A_i^\delta \mid \exists \beta \in A_i^\delta (Z_i \cap (\lambda \times \alpha) = (X_\beta)_i) \} = \delta$, also $\delta \in S_{i,Z_i}$. Widerspruch, da $\delta \in D_i$. \square

KOROLLAR 2. Es existieren eine Aufzählung $\{X_\beta \mid \beta < \lambda^+\}$ von $[\lambda \times \lambda^+]^{\leq \lambda}$ und eine Folge $\langle A^\delta \mid \delta \in S \rangle$ in $[\delta]^{< \lambda}$, so dass für alle $Z \subseteq \lambda \times \lambda^+$ die Menge

$$S_Z := \{ \delta \in S \mid \sup\{ \alpha \in A^\delta \mid \exists \beta \in A^\delta (Z \cap (\lambda \times \alpha) = X_\beta) \} = \delta \}$$

stationär in λ^+ ist.

Beweis. Wähle ein $i < \kappa$ wie in Lemma 1 und setze $X_\beta := (X_\beta)_i$ und $A^\delta := A_i^\delta$. \square

Wähle entsprechend $\langle A^\delta \mid \delta \in S \rangle$ und $\{X_\beta \mid \beta < \lambda^+\}$ mit dieser Eigenschaft.

Definiere rekursiv eine Folge $\langle Y_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ von Teilmengen von λ^+ und eine \subseteq -absteigende Folge $\langle E_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ von club Mengen in λ^+ .

Setze $Y_0 = E_0 = \lambda^+$.

Seien für $\gamma < \lambda$ Folgen $\langle Y_\xi \mid \xi < \gamma \rangle$ und $\langle E_\xi \mid \xi < \gamma \rangle$ bereits definiert, so definiere für alle $\delta \in S$

$$V_\gamma^\delta := \{ (\alpha, \beta) \in A^\delta \times A^\delta \mid \forall \xi < \gamma (Y_\xi \cap \alpha = (X_\beta)_\xi) \}.$$

Offenbar ist unabhängig von der Wahl von Y_γ immer $V_\gamma^\delta \supseteq V_{\gamma+1}^\delta$ erfüllt.

Wenn es ein $Y_\gamma \subseteq \lambda^+$ und eine club Menge $E_\gamma \subseteq \bigcap_{\xi < \gamma} E_\xi$ gibt, so dass für jedes $\delta \in E_\gamma \cap S$ gilt

$$\sup\{ \alpha < \delta \mid \exists \beta < \delta ((\alpha, \beta) \in V_\gamma^\delta) \} = \delta \quad \text{impliziert} \quad V_\gamma^\delta \neq V_{\gamma+1}^\delta$$

so setze die Rekursion fort.

BEHAUPTUNG 3. Die Rekursion terminiert für ein $\gamma^* < \lambda$.

Beweis. Angenommen nicht, so seien $\langle Y_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ und $\langle E_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ das Ergebnis. Setze $E := \bigcap_{\xi < \lambda} E_\xi$ und $Z := \bigcup_{\xi < \lambda} \{\xi\} \times Y_\xi$.

Für jedes $\delta \in E \cap S_Z$ und alle $\gamma < \lambda$ ist nach Definition von V_γ^δ , Z und S_Z

$$\begin{aligned} & \sup\{ \alpha < \delta \mid \exists \beta < \delta ((\alpha, \beta) \in V_\gamma^\delta) \} \\ &= \sup\{ \alpha \in A^\delta \mid \exists \beta \in A^\delta \forall \xi < \lambda (Y_\xi \cap \alpha = (X_\beta)_\xi) \} \\ &= \sup\{ \alpha \in A^\delta \mid \exists \beta \in A^\delta (Z \cap (\lambda \times \alpha) = X_\beta) \} = \delta. \end{aligned}$$

Für jedes fest gewählte $\delta \in E \cap S_Z \subseteq E \cap S$ gilt $V_\gamma^\delta \subsetneq V_{\gamma+1}^\delta$ für alle $\gamma < \lambda$. Dann ist $\langle V_\gamma^\delta \mid \gamma < \lambda \rangle$ eine echt absteigende Folge von Teilmengen von $A^\delta \times A^\delta$, aber dies widerspricht $|A^\delta| < \lambda$. \square

Sei also $\gamma^* < \lambda$ die Stelle, an der die Rekursion terminiert sowie $\langle Y_\xi \mid \xi < \gamma^* \rangle$ und $\langle E_\xi \mid \xi < \gamma^* \rangle$ die entstandenen Folgen. Definiere $E := \bigcap_{\xi < \gamma^*} E_\xi$ und für jedes $\delta \in S \cap E$

$$S_\delta := \bigcup \{ (X_\beta)_{\gamma^*} \mid (\alpha, \beta) \in V_{\gamma^*}^\delta \}.$$

BEHAUPTUNG 4. Es ist $\langle S_\delta \mid \delta \in E \cap S \rangle$ eine $\diamond_{E \cap S}$ -Folge.

Beweis. Angenommen nicht, so existieren ein $Y \subseteq \lambda^+$ und eine club Menge $C \subseteq E$, so dass $S_\delta \neq Y \cap \delta$ für alle $\delta \in C \cap S$. Zeige, dass die Rekursion hätte fortgesetzt werden können.

Setze dazu $Y_{\gamma^*} := Y$, $E_{\gamma^*} := C$ und $Z := \bigcup_{\xi \leq \gamma^*} \{\xi\} \times Y_\xi$. Angenommen, es gibt ein $\delta \in E_{\gamma^*} \cap S$ mit

$$\sup\{ \alpha < \delta \mid \exists \beta < \delta ((\alpha, \beta) \in V_{\gamma^*}^\delta) \} = \delta$$

und $V_{\gamma^*}^\delta = V_{\gamma^*+1}^\delta$. Dann erhalten wir den Widerspruch

$$\begin{aligned} Y \cap \delta &= \bigcup \{ Y \cap \alpha \mid (\alpha, \beta) \in V_{\gamma^*+1}^\delta \} = \bigcup \{ (X_\beta)_{\gamma^*} \mid (\alpha, \beta) \in V_{\gamma^*+1}^\delta \} \\ &= \bigcup \{ (X_\beta)_{\gamma^*} \mid (\alpha, \beta) \in V_{\gamma^*}^\delta \} = S_\delta. \end{aligned}$$

Also ist für alle $\delta \in E_{\gamma^*} \cap S$ mit $\sup\{\alpha < \delta \mid \exists \beta < \delta ((\alpha, \beta) \in V_{\gamma^*}^\delta)\} = \delta$ wie gewünscht $V_{\gamma^*}^\delta \neq V_{\gamma^*+1}^\delta$. Ein Widerspruch, denn die Rekursion hätte fortgesetzt werden können. \square

Insgesamt erhalten wir durch triviale Wahl für $\delta \in S \setminus (E \cap S)$ eine \diamond_S -Folge. \square

Dass im obigen Theorem die Einschränkung auf stationäre Mengen, deren Schnitt mit der Menge $\{\delta < \lambda^+ \mid \text{cf}(\delta) \neq \text{cf}(\lambda)\}$ stationär ist, sowohl für reguläres als auch singuläres λ notwendig ist, belegen die folgenden beiden Resultate:

THEOREM (Shelah). Es ist $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$ konsistent mit dem Versagen von \diamond_S für $S = \{\delta < \omega_2 \mid \text{cf}(\delta) = \aleph_1\}$.

THEOREM (Magidor). Folgendes ist konsistent: Ausgehend von GCH und der Existenz einer messbaren Kardinalzahl λ , gilt in der Prikry-Erweiterung GCH und λ^+ ist dort der Nachfolger einer singulären Kardinalzahl mit Konfinalität ω . Weiterhin ist \diamond_S für $S = \{\delta < \kappa \mid \text{cf}(\delta) = \aleph_0\}$ nicht erfüllt.