Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, M.Carl

WS 10/11
10. 01. 2011
Blatt 11

Übungen zur Mengenlehre

1. Zeigen Sie, dass jeder normale Filter auf einer überabzählbaren, regulären Kardinalzahl κ, der alle Komplemente von beschränkten Teilmengen von κ enthält, κ-vollständig ist.

2. Sei κ regulär und überabzählbar, ferner $\lambda < \kappa$ regulär. Setzen Sie $E^{\kappa}_{\lambda} := \{\alpha < \kappa : cf(\alpha) = \lambda\}$. Zeigen Sie, dass E^{κ}_{λ} stationär in κ ist.

3. Zeigen Sie: Es existieren stationäre Teilmengen $S_1, S_2 \subseteq \omega_1$ mit $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Nehmen Sie dazu an, die Behauptung wäre falsch und folgern Sie:
a) Jede stationäre Teilmenge von ω_1 ist Obermenge eines Clubs.
(2 Punkte)
Sei nun zu jeder Limesordinalzahl $\alpha < \omega_1$ ein (in α) konfinales $f_\alpha : \omega \to \alpha$ gewählt. Definieren Sie $g_n(\alpha) = f_\alpha(n)$.
b) Wenden Sie den Satz von Fodor auf die g_n an, um einen Widerspruch zu erhalten.
(6 Punkte)

4. Ein Zug fährt von 0 zu einer überabzählbaren, regulären Kardinalzahl κ. An jeder Ordinalzahl $\alpha < \kappa$ hält er. Falls möglich (d.h. falls sich mindestens eine Person im Zug befindet), steigt eine Person aus, anschließend steigen in jedem Fall α viele Personen ein. Zeigen Sie, dass der Zug leer ist, wenn er κ erreicht.
(Tipp: Satz von Fodor.)

Zusatzaufgabe für Interessierte: (Das Banach-Tarski-Paradoxon 4)
Wie immer bezeichnet K die dreidimensionale Einheitssphäre, also die Menge aller Punkte, die im $\mathbb{R}^3$ Abstand 1 zum Ursprung 0 haben. Ferner sei B die dreidimensionale Einheitskugel, also die Menge aller Punkte, die im $\mathbb{R}^3$ höchstens Abstand 1 vom Ursprung haben.
a) Folgern Sie aus den Ergebnissen der Zusatzaufgabe vom letzten Zettel: K ist zerlegungsäquivalent zu zwei disjunkten Kopien ihrer selbst.
(2 Punkte)

b) Folgern Sie aus a): $B - \{0\}$, also die Einheitskugel ohne Mittelpunkt, ist zerlegungsäquivalent zu zwei disjunkten Kopien ihrer selbst. (4 Punkte)

c) Folgern Sie nun, dass auch B selbst zu zwei disjunkten Kopien ihrer selbst zerlegungsäquivalent ist.
(2 Punkte)

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 19. 01. 2011 in der Vorlesung

Hinweis: Nicht vergessen: Am 18.01.2011 findet die Semesterparty der Fachschaft Mathematik ab 22.00 Uhr in der N8Schicht Bonn statt.