Thorsten Heidersdorf
Universität Bonn

Sommersemester 2019

Übungen zur Vorlesung Algebra 1
—Blatt 8—

Aufgabe 1 (5 Punkte). (Produkte) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ affine Varietäten. Zeigen Sie:

(i) $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{m+n}$ zusammen mit der Teilraumtopologie ist eine affine Varietät. Es ist $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \cong \mathbb{A}^{m+n}$, dh. es existieren Abbildungen $f : \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{m+n}$ and $g : \mathbb{A}^{m+n} \to \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n$ welche invers zueinander sind.

(ii) Die Zariskitopologie auf $X \times Y$ ist im Allgemeinen nicht die Produkttopologie auf $X \times Y$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). (Noethersch oder nicht) Sei R ein noetherscher Ring. Welche der folgenden Ringe sind noethersch? Beweisen oder widerlegen Sie.

(i) Der Potenzreihenring in n Variablen $R[\![x_1, \dots, x_n]\!]$,

(ii) Ein Unterring von R,

(iii) Eine endlich erzeugte R-Algebra,

(iv) Der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\overline{\mathbb{Q}}$, dem algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$,

(v) Der Ring der $\mathbb{Z}$-wertigen, rationalen Polynome

$$\mathrm{Int}(\mathbb{Z}) := \{ \ f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(a) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } a \in \mathbb{Z} \ \}.$$

Aufgabe 3 (15 Punkte). (Artinsch) Sei R ein Ring. Zeigen Sie:

(i) Ist R artinsch, so ist $Specm(R)$ endlich.

(ii) Ist R ein artinscher Integritätsbereich, so ist R ein Körper. Insbesondere ist jedes Primideal in einem artinschen Ring maximal.

(iii) Ist R ein Ring sodass $(0) = \prod_{i=1}^n m_i$ mit $m_i \in Specm(R)$, so ist R artinsch genau dann wenn R noethersch ist. Insbesondere gilt diese Äquivalenz wenn $(0) = \bigcap_{i=1}^n m_i$.

(iv) Ein Ring R ist artinsch genau dann wenn er noethersch ist und alle Primideale in R maximal sind.

Aufgabe 4 (10 Punkte). (Endliche Fasern) Sei R ein Ring und A eine endlich erzeugte R-Algebra welche ganz über R ist. Zeigen Sie, dass es für $p \in Spec(R)$ nur endlich viele Primideale in A gibt, die über p liegen (Geometrisch bedeutet dass, dass die induzierte Abbildung zwischen den Spektren endliche Fasern hat).

Hinweis: Lokalisieren Sie, um das Problem auf die vorherige Aufgabe zurückzuführen..

Aufgabe 5 (15 Punkte). (Kein noetherscher Ring) Sei $R = C[0,1]$ der Ring der stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

(i) Ist dieser Ring noethersch?

(ii) Für jedes $c \in [0,1]$ definiere $M_c = \{f \in R \mid f(c) = 0\}$. Zeigen Sie, dass M_c ein maximales Ideal in R ist.

(iii) Ein Ideal $m \subset R$ ist maximal genau dann wenn $m = M_c$ für ein $c \in [0,1]$.

Abgabe: Montag, 03.06.2019, um 14 Uhr vor der Vorlesung.