UNIVERSITÄT BREMEN - SS 2013
- Übungen zur Vorlesung Analysis 2 -

Aufgabenblatt 9

(Themen der Woche 9: Totales Differential, Richtungsableitung, partielle Differenzierbarkeit; Jacobi-Matrix; Holomorphie; Cauchy-Riemannsch Differentialgleichungen).

1. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_F(x,y,z)$ der Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch **[10]**

$$F((x,y,z)) := \left(e^{2x} + z, x + y^2 + \cos z^3, xy + y + (\sinh z)^2\right), \text{ für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

2. Verwenden Sie das Beispiel der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die gegeben ist, für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, durch

$$f((x,y)) :=:= \left\{ \begin{array}{rl} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ (x^2+y^2)\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \end{array} \right.$$

um zu beweisen, dass eine differenzierbare Funktion im Allgemeinen nicht notwendig stetig partiell differenzierbar ist. **[10]**

3. Es sei die Abbildung $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$G((x,y)) := (x^2 - y^2, 2xy), \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

   (a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_G(x,y)$ der Abbildung G. **[5]**

   (b) Berechnen Sie die Inverse der Jacobi-Matrix $J_G(x,y)$, zumindest für *die* Punkte wo diese existiert. **[5]**

4. Beweisen Sie den folgenden *Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Veränderlicher*:

Es sei V eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, und es sei $T : V \to \mathbb{R}$ eine in V differenzierbare Abbildung. Ausserdem seien $x, y \in V$ so gewählt, dass die Verbindungsstrecke $\ell(x,y)$ zwischen x und y ganz in V enthalten ist. Unter diesen Voraussetzungen existiert dann ein $z \in \ell(x,y)$ mit $z \neq x$ und $z \neq y$, so dass gilt

$$T(y) - T(x) = DT(z)(x-y)$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, die für alle $s \in [0,1]$ gegeben ist durch $h(s) := T(x + s(y-x))$, und wenden Sie den *Ersten Mittelwertsatz für Funktionen einer Veränderlichen (Lagrange)* an). **[10]**

5. Es seien $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die zwei Komponentenfunktionen der auf einer offenen Teilmenge U der Menge der komplexen Zahlen holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ (d.h. $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, für alle $(x,y) \in \tilde{U} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + i\,y \in U\}$). Zeigen Sie, dass wenn u und v auf $\tilde{U}$ zweimal stetig partiell differenzierbar sind, dann ist sowohl u als auch v eine *harmonische Funktion auf* $\tilde{U}$. **[10]**

Der hierbei verwendete Begriff *harmonisch* ist wie folgt definiert:
Eine Funktion $\phi : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ heisst *harmonisch auf* $\tilde{U}$, falls für alle $(x,y) \in \tilde{U}$ gilt, dass

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x}((x,y)) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial y}((x,y)) = 0$$