2.9 Optimierung

Definition

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R},\ x \in U$.

x heißt *lokales Maximum*, falls eine Umgebung $V \subseteq U$ von x existiert mit $\forall y \in V : f(x) \geq f(y)$.

x heißt *lokales Minimum*, falls eine Umgebung $V \subseteq U$ von x existiert mit $\forall y \in V : f(x) \leq f(y)$.

Gilt $f(x) = f(y)$ nur für $x = y$, so heißt x ein *isoliertes, lokales Maximum (Minimum)*.

Lokale Maxima und Minima werden als *lokale Extremstellen* bezeichnet.

x heißt *Sattelpunkt*, falls $f'(x) = 0$ und x ist kein Extremum ist.

Satz (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Seien $f \in \mathfrak{C}^1(U, \mathbb{R}),\ x \in U$. Hat f eine lokales Maximum bzw. Minimum in x, so gilt $f'(x) = 0$.

Beweis

Sei $f \in \mathfrak{C}^1(U, \mathbb{R}),\ x \in U$ lokale Extremstelle, o.B.d.A. lokales Maximum, $\xi \in \partial B_1(0)$. Dann gilt:

$$f'(x)\xi = D_\xi f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x + \epsilon\xi) - f(x)}{\epsilon} \leq 0$$

und genauso für $-\xi$:

$$f'(x)(-\xi) = D_{-\xi} f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x - \epsilon\xi) - f(x)}{\epsilon} \leq 0,$$

d.h. $f'(x)\xi = 0$ für alle $\xi \in \partial B_1(0)$. Also $f'(x) = 0$.

In Koordinaten bedeutet dies gerade, dass in Extremstellen gilt: $\nabla f(x) = 0$.

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathfrak{C}^2(U, \mathbb{R})$. Die $n \times n$-Matrix

$$\mathfrak{H}_f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x) \cdots \partial_1\partial_n f(x) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \partial_1\partial_n f(x) \cdots \partial_n\partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

wird Hesse-*Matrix* von f genannt.

Bemerkung

Die Hesse-Matrix ist symmetrisch, d.h. $\mathfrak{H}_f(x) = (\mathfrak{H}_f(x))^T$, vgl. Satz von Schwarz.

Satz (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f \in \mathfrak{C}^1(U, \mathbb{R}),\ x \in U$. Hat f eine lokales Maximum bzw. Minimum in x, so ist $\mathfrak{H}_f(x)$ *negativ* bzw. *positiv semidefinit*, d.h.

$$\forall w \in U : w^T \mathfrak{H}_f(x) w \leq 0 \text{ bzw. } \forall w \in U : w^T \mathfrak{H}_f(x) w \geq 0.$$

Bemerkung

Taylorentwicklung von f im Punkt x liefert:

$$f(x+h) - f(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \partial_i \partial_j f(x)}_{\text{relevanter Term an Extremstelle}} + R(x,h),$$

wobei $R(x,h)$ für $h \to 0$ schneller verschwindet als $||h||^2$.

Einsetzen der HESSE-Matrix liefert

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2} h^T \mathfrak{H}_f(x) h + R(x,h) \leq 0,$$

da f bei x ein lokales Maximum besitzt. Damit folgt ...

SATZ (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)
Sei $f \in \mathfrak{C}^2(U, \mathbb{R}),\ x \in U$ mit $f'(x) = 0$. Dann gilt:
f hat in x ein lok., isol. Maximum, falls $\forall w \in U : w^T \mathfrak{H}_f(x) w < 0$ (d.h. falls $\mathfrak{H}_f(x)$ *negativ definit*).
f hat in x ein lok., isol. Minimum, falls $\forall w \in U : w^T \mathfrak{H}_f(x) w > 0$ (d.h. falls $\mathfrak{H}_f(x)$ *positiv definit*).
f hat in x einen Sattelpunkt, falls $\exists v, w \in U : v^T \mathfrak{H}_f(x) v < 0,\ w^T \mathfrak{H}_f(x) w > 0$ (d.h. falls $\mathfrak{H}_f(x)$ *indefinit*).

BEMERKUNG

In der Linearen Algebra wurden zwei Kriterien zur Definitheit von Matrizen gezeigt:

(1) Jede reelle, symmetrische Matrix ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. Berechne die Eigenwerte (Nullstellen des charakteristischen Polynoms), dann gilt:

Alle Eigenwerte positiv	$\Rightarrow$	Matrix positiv definit.
Alle Eigenwerte negativ	$\Rightarrow$	Matrix negativ definit.
Alle Eigenwerte positiv oder 0	$\Rightarrow$	Matrix positiv semidefinit.
Alle Eigenwerte negativ oder 0	$\Rightarrow$	Matrix negativ semidefinit.
Es gibt positive und negative Eigenwerte	$\Rightarrow$	Matrix indefinit.

Problem: Berechnung der Eigenwerte großer Matrizen ist sehr aufwendig.

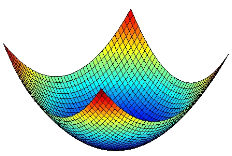
(2) *(Kriterium von* HURWITZ*)*

Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Dann wird $A_k := (a_{ij})_{1 \leq i \leq k}^{1 \leq j \leq k}$ der *k-te Hauptminor* von A genannt, $1 \leq k \leq n$, und es gilt:

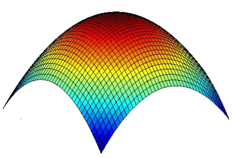
$$A \text{ positiv definit} \Leftrightarrow \det(A_k) > 0 \text{ für alle } k \in \{1, ..., n\}.$$

Dies funktioniert auch gut in höheren Dimensionen.

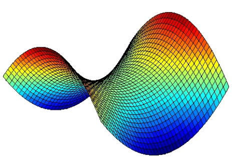
BEISPIELE



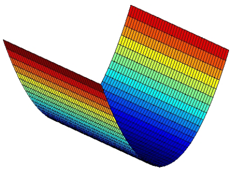
$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, dann $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
$\mathfrak{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, d.h. f besitzt bei $(0,0)$ lok., isol. Minimum.
Mit dem Kriterium von HURWITZ: $\det(1) = 1 > 0$ und $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$.
Über Definition: $\forall w \neq 0 : w^T \mathfrak{H}_f(x,y) w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_1^2 + w_2^2 > 0$.



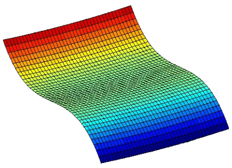
$f(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, dann $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
$\mathfrak{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ negativ definit $\Rightarrow f$ besitzt bei $(0,0)$ ein lok., isol. Maximum.
HURWITZ liefert keine Antwort: $\det(-1) = -1 < 0$ und $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 > 0$.
Über Definition: $\forall w \neq 0 : w^T \mathfrak{H}_f(x,y) w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = -w_1^2 - w_2^2 < 0$.



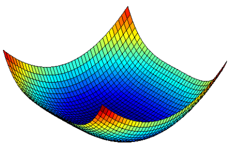
$f(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, dann $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
Dann ist $\mathfrak{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ indefinit, d.h. f besitzt bei $(0,0)$ einen Sattelpunkt.
f hat in x-Richtung ein Minimum und in y-Richtung ein Maximum.
f hat aber keine lokale Extremstelle.



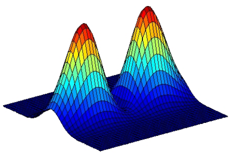
$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2$, dann $\nabla f(x,y) = \binom{x}{0} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
$\mathfrak{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist positiv semidefinit.
f besitzt bei $(0,0)$ ein lokales, nicht isoliertes Minimum.



$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^3)$, dann $\nabla f(x,y) = \binom{x}{\frac{3}{2}y^2} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
$\mathfrak{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$; $\mathfrak{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ positiv semidefinit.
Allerdings besitzt f keinen Extrempunkt.



$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^4)$, dann $\nabla f(x,y) = \binom{x}{2y^3} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
$\mathfrak{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6y^2 \end{pmatrix}$; $\mathfrak{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ positiv semidefinit.
Hier besitzt f bei $(0,0)$ ein lokales, isoliertes Minimum.



$f(x,y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}$, dann $\nabla f(x,y) = e^{-x^2-4x^2} \begin{pmatrix} -2x(4x^2+y^2-4) \\ -2y(16x^2+4y^2-1) \end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= 0 \Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0), (0,\tfrac{1}{2}), (0,-\tfrac{1}{2}), (1,0), (0,-1)\} \qquad \text{und} \\ \mathfrak{H}_f(x,y) &= e^{-x^2-4y^2} \begin{pmatrix} 16x^4 - 40x^2 + 4x^2y^2 - 2y^2 + 8 & 4xy(16x^2+4y^2-17) \\ 4xy(16x^2+4y^2-17) & 64y^4 - 40y^2 + 256x^2y^2 - 32x^2 + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten für die „kritischen Punkte“:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_f(0,0) &= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} && \Rightarrow \text{lokales Minimum.} \\ \mathfrak{H}_f(0,\tfrac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} 7,5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \tfrac{1}{e} && \Rightarrow \text{Sattelpunkt.} \\ \mathfrak{H}_f(0,-\tfrac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} 7,5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \tfrac{1}{e} && \Rightarrow \text{Sattelpunkt.} \\ \mathfrak{H}_f(1,0) &= \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix} \tfrac{1}{e} && \Rightarrow \text{lokales Maximum.} \\ \mathfrak{H}_f(-1,0) &= \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix} \tfrac{1}{e} && \Rightarrow \text{lokales Maximum.} \end{aligned}$$

Satz (Extrema unter Nebenbedinungen)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathfrak{C}^1(U,\mathbb{R})$, $\Psi \in \mathfrak{C}^1(U,\mathbb{R}^n)$ mit $r < n$ und $\text{Rang}(\Psi'(x)) = r$ für alle $x \in U$.

Hat f in $\overline{x}$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $\Psi = 0$, so gibt es ein $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^r$, so dass die Funktion

$$F: \begin{array}{rcl} U \times \mathbb{R}^r & \to & \mathbb{R} \\ (x,\lambda) & \mapsto & f(x) + \lambda_1\Psi_1(x) + ... + \lambda_r\Psi_r(x) \end{array}$$

in $(\overline{x},\overline{\lambda})$ einen *kritischen Punkt* hat, d.h. $F'(\overline{x},\overline{\lambda}) = 0$.

Die λ_i werden als *Lagrange-Multiplikatoren* bezeichnet.

Beispiel (Extremwertaufgabe)

Eine kreisförmige Platte

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overbrace{x^2 + y^2 - 1}^{:=\Phi(x,y)} \leq 0\}$$

trage die Temperaturverteilung

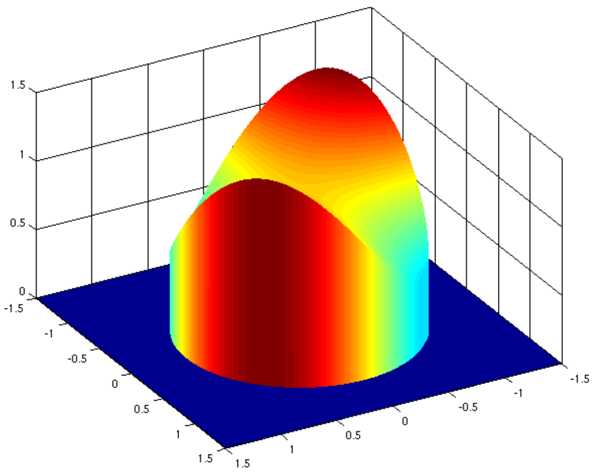
$$T: \begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy + 1. \end{array}$$

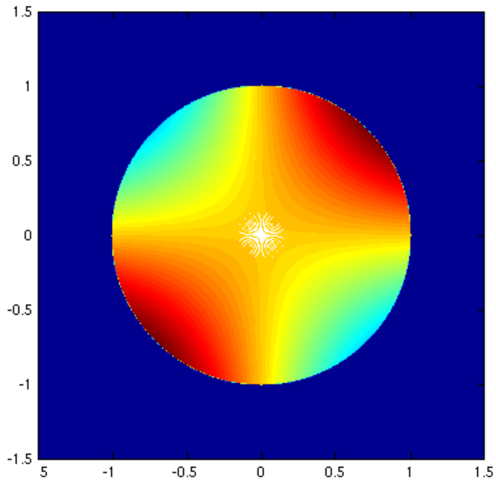
Gesucht sind die Stellen höchster bzw. niedrigster Temperatur.

Wir gehen dabei wie in 1D vor:

(1) Aufspüren kritischer Punkte mit Hilfe der Ableitung.

(2) Überprüfen der Funktionswerte an kritischen Punkten, um Maxima und Minima zu finden.





Suche zunächst kritische Punkte in $\overset{\circ}{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$. Dann gelten:

$$\begin{aligned} \nabla T(x,y) &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0; \\ \mathfrak{H}_T(x,y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ P_{\mathfrak{H}_T}(\lambda) &= \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1. \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{H}_T$ einen positiven und einen negativen Eigenwert hat, ist $\mathfrak{H}_T$ indefinit, d.h. T hat in $(0,0)$ einen Sattelpunkt und auf $\overset{\circ}{D}$ keine Extrempunkte.

Da T stetig auf Kompaktum, nimmt T Maximum und Minimum an, also müssen auf dem Rand der Platte $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(x,y) = 0\}$ Extrempunkte von T liegen: T hat Extrempunkte unter der Nebenbedingung $\Phi(x,y) = 0$.

Definiere *Lagrange-Funktion* $F(x,y,\lambda) = xy + 1 + \lambda(x^2+y^2-1)$, dann

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} y + 2\lambda \\ x + 2\lambda \\ x^2+y^2-1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -2\lambda x \\ x + 2\lambda(-2\lambda x) &= 0 \Leftrightarrow x(1-4\lambda^2) = 0 \\ x^2+y^2-1 &= 0 \end{cases}.$$

Auflösen des Gleichungssystems ergibt:

(1) $x = 0 \Rightarrow y = 0$, aber $0^2 + 0^2 - 1 \neq 0$, d.h. $(0,0)$ ist kein kritischer Punkt.
(2) $1 - 4\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1 \Leftrightarrow x = y$.
(3) $x = y$, dann $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
(4) $x = -y$, dann $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Wir erhalten die kritischen Punkte $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Einsetzen in T ergibt: Maxima bei $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ und Minima bei $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Also Höhenlinien *(Isothermen)* von T erhalten wir:

$$T(x,y) = c \Leftrightarrow y(x) = \frac{c}{x}.$$

Bemerkung

(1) In den Extrempunkten berühren sich Höhenlinie und Kurve der Nebenbedingung(en).

(2) Beachte: $\nabla T \perp$ Isotherme und $\nabla \Phi \perp$ Kurve der Nebenbedingung(en), also $\nabla T \parallel \nabla \Phi$ und damit

$$\nabla F = \nabla T + \lambda \nabla \Phi = 0.$$

Beispiel (Geometrische Optimierung)

Seien a, b, c, d Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit $b, d \neq 0$. Wir definieren zwei Geraden

$$\begin{aligned} x(s) &:= a + sb; \\ y(t) &:= c + td; \end{aligned}$$

wobei s, t Parameter aus $\mathbb{R}$. Wir untersuchen die *Abstandsfunktion*

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (s,t) & \mapsto & ||x(s) - y(t)||_2^2 \end{array}$$

auf Extremstellen.

Allgemein gilt für $x, y, h, k \in \mathbb{R}^n$ und ein Skalarprodukt $s(\cdot,\cdot) := \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\langle x+h, y+k \rangle = \langle x, y \rangle + \underbrace{\langle x, k \rangle + \langle y, h \rangle}_{=(\langle x,\cdot\rangle + \langle y,\cdot\rangle)(h,k)} + \underbrace{\langle h, k \rangle}_{\to 0 \text{ für } h,k \to 0},$$

d.h. das totale Differenzial $\mathrm{d}s := s'$ von s ist gegeben durch

$$s'(x,y)(h,k) = (\langle x, \cdot \rangle + \langle y, \cdot \rangle)(h,k) = \langle x, k \rangle + \langle y, h \rangle.$$

Damit erhalten wir als Bedingungen erster Ordnung von $\Phi(s,t) = \langle x(s) - y(t), x(s) - y(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s,t) &= (\langle x(s) - y(t), \cdot \rangle + \langle x(s) - y(t), \cdot \rangle) \left(\frac{\partial}{\partial s}(x(s) - y(t)), \frac{\partial}{\partial s}(x(s) - y(t)) \right) \\ &= \langle x(s) - y(t), x'(s) \rangle + \langle x(s) - y(t), x'(s) \rangle \\ &= 2\langle a + bs - c - td, b \rangle \text{ und analog} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(s,t) &= 2\langle x(s) - y(t), y'(t) \rangle \\ &= -2\langle a + bs - c - dt, d \rangle. \end{aligned}$$

Mögliche Extremstellen (s^*, t^*) müssen $\nabla\Phi(s^*, t^*) = 0$ erfüllen, also das System $(*)$

$$\begin{aligned} +s\langle b, b \rangle - t\langle d, b \rangle &= \langle c - a, b \rangle \\ -s\langle b, d \rangle + t\langle d, d \rangle &= \langle c - a, d \rangle \end{aligned}$$

lösen. Die Koeffizientenmatrix des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems ist

$$A := \begin{pmatrix} \langle b, b \rangle & -\langle b, d \rangle \\ -\langle b, d \rangle & \langle d, d \rangle \end{pmatrix}.$$

Genau dann ist A invertierbar und damit $(*)$ eindeutig lösbar, wenn

$$\det(A) = \langle b, b \rangle \langle d, d \rangle - \langle b, d \rangle^2 = ||b||^2 ||d||^2 - |\langle b, d \rangle|^2 \neq 0.$$

Nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz ist $\det(A) > 0 \Leftrightarrow b, d$ linear unabhängig. In diesem Fall erhalten wir also als mögliche Extremstelle ein eindeutig bestimmtes Paar (s^*, t^*).

Bedingung zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(s,t) &= 2(\langle a + sb - c - td, \cdot \rangle + \langle b, \cdot \rangle)(b, 0) \\ &= 2\langle b, b \rangle; \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(s,t) &= 2(\langle a + sb - c - td, \cdot \rangle + \langle b, \cdot \rangle)(-d, 0) \\ &= -2\langle b, d \rangle; \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(s,t) &= 2(\langle a + sb - c - td, \cdot \rangle + \langle d, \cdot \rangle)(-d, 0) \\ &= 2\langle d, d \rangle \end{aligned}$$

Damit ist die HESSE-Matrix

$$\mathfrak{H}_\Phi(s,t) = 4\begin{pmatrix} \langle b,b\rangle & -\langle b,d\rangle \\ -\langle b,d\rangle & \langle d,d\rangle \end{pmatrix}$$

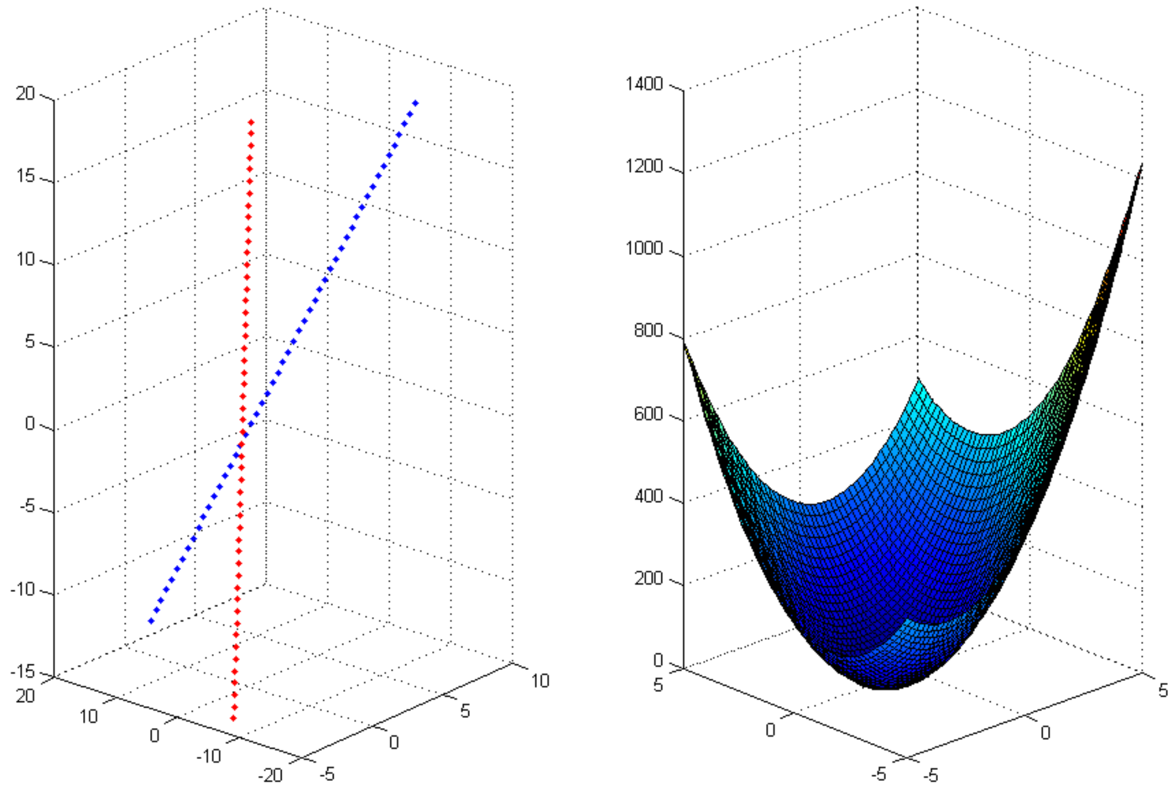
positiv definit, denn für die Determinanten der Hauptminoren H_1, H_2 gelten

$$\begin{array}{lclcll} \det(H_1) & = & \det(\langle b,b\rangle) & = & \langle b,b\rangle & > & 0; \\ \det(H_2) & = & \det(\mathfrak{H}_\Phi(s^*,t^*)) & = & ||b||^2||d||^2 - |\langle b,d\rangle|^2 & > & 0 \text{ nach CAUCHY-SCHWARZ}, \end{array}$$

also hat Φ in (s^*,t^*) ein lokales, isoliertes Minimum. Wegen

$$\lim_{s,t\to\infty} \Phi(s,t) = \lim_{s,t\to\infty} s^2\langle b,b\rangle + t^2\langle d,d\rangle - 2st\langle b,d\rangle \overset{\text{Œ } s\geq t}{\geq} \lim_{t\to\infty} t^2 \underbrace{(||b||^2 + ||d||^2 - 2\langle b,d\rangle)}_{=||b-d||_2^2>0} = \infty$$

ist (s^*,t^*) sogar ein globales Minimum.



Bleibt noch der Fall zu untersuchen, dass b,d linear abhängig sind, d.h. dass $d = \mu b$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$. Setze

$$\Phi(s,t) := \Psi(s-\mu t) \text{ mit } \Psi(x) := ||a-c+xb||_2^2.$$

Dann ist Ψ eine 1D-Funktion und wir erhalten durch Differenzieren nach x die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} \Psi'(x) & = & 2\langle a-c+xb, b\rangle \\ \Psi''(x) & = & \langle b,b\rangle. \end{array}$$

Aus Ersterem erhalten wir als einziges mögliches Extremum von Ψ den Wert

$$x^* = \frac{\langle c-a,b\rangle}{\langle b,b\rangle}$$

und da $\Psi''(x^*) = ||b||^2 > 0$, besitzt Ψ in x^* ein lokales (sogar globales), isoliertes Minimum. Also nimmt Φ bei allen (s^*,t^*) sein globales Minimum an, für die gilt $s^* - \mu t^* = x^*$.