1.8. Zusammenfassung der Sprachelemente

Insgesamt enthält unsere Modellierungssprache nur wenige grundlegende Sprachelemente, sowie einige nützliche Ersatznotationen, die intuitive Formulierungen erlauben. In diesem Abschnitt sollen die Konstrukte nocheinmal zusammengefasst werden. Der Schwerpunkt liegt dabei zunächst nur auf der äußerlichen Form. Ob eine konkrete Formulierung zulässig ist, hängt von weiteren Bedingungen ab, die sich aus dem bereits formulierten Text ergeben. Zum Beispiel darf man einer Zeichenkette in einer Definition nur dann eine Bedeutung zuordnen, wenn sie nicht bereits vorher benutzt wurde. Umgekehrt dürfen nur definierte Zeichenketten in Ausdrücken verwendet werden. Solche zustandsabhängigen Regeln werden im Kapitel 2 genauer eingeführt.

1.8.1. Sprachliche Grundformen

In der folgenden Auflistung sind die Grundbegriffe zum Sprechen über die Sprache jeweils kursiv dargestellt. Daneben gibt es eine kurze Erläuterung und konkrete Beispiele. Die Zeichenketten bla, blupp dienen als Platzhalter für Begriffe der Sprache. Schlüsselwörter sind fett gedruckt.

Zeichenkette	ein einzelnes Zeichen (nicht das Leerzeichen und kein Sonderzeichen der Sprache wie $=, \exists, :, \ldots$) oder eine Kette solcher Zeichen ohne Zwischenraum, ohne Hoch- oder Niedrigstellung und ohne Akzente. Beispiele sind reelleFunktion, γ oder $\aleph$.
*Sequenz(*bla*)*	kommagetrennte Aneinanderreihung von bla (kann auch einzelnes bla sein oder die leere Sequenz). Beispiel für *Sequenz(Zeichenkette)* ist a, b, c.
bla | blupp	Die Aussprache für | ist *oder*.

Da die Grundbegriffe eng miteinander verknüpft sind, können sie nicht der Reihe nach eingeführt werden, d.h. Vorgriffe auf später erläuterte Begriffe sind unvermeidlich. Wir beginnen mit dem Konzept der Definition.

Definition	*Zeichenkette* := *Beschreibung*. Beispiele für Definitionen sind Folge := $\lceil a$ mit $a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})\rfloor$ oder $\beta := \arcsin(\pi/3)$. Die Aussprache für := ist *ist definiert als*.
Beschreibung	*Abstraktion* | *Aussage* | *Zuordnung* | *Zuordnungsergebnis* | *Zeichenkette* | *Liste*. Beispiele zu den einzelnen Möglichkeiten werden im Folgenden vorgestellt.
Liste	[*Sequenz(Beschreibung)*]. Listenbeispiele sind $[G, op]$ oder $[\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}]$.

Zur Schaffung neuer Begriffe sind die Konzepte der *Abstraktion* und der *Zuordnung* ganz wesentlich. Mit Abstraktionen lassen sich Modellrahmen schaffen, in denen gewisse Strukturen mit spezifizierten Eigenschaften zur Verfügung stehen. Zuordnungen funktionieren wie variable Beschreibungen, die von angebbaren Parametern abhängen.

Abstraktion	$\lceil$ *Sequenz(Zeichenkette)* **mit** *Sequenz(Aussage* | *Definition* | *Notation* | *Interpretation)*$\rfloor$. Ein Beispiel für eine Abstraktion ist $\lceil a, b$ mit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, d := (a+b)/2, d > 0\rfloor$. Die Aussprache für $\lceil$ ist *eine Abstraktion bestehend aus*.
Zuordnung	*Abstraktion* $\mapsto$ *Beschreibung*. Beispiel für eine Zuordnung ist $\lceil M$ mit M : Menge $\rfloor \mapsto M \cap \mathbb{R}$. Die Aussprache ist *Zuordnung von ... auf ...* .
Zuordnungsergebnis	*Zuordnung(Beschreibung)*. Beispiele für Zuordnungsergebnisse sind $F(x)$ oder $F((x+y)/2)$ oder auch $(\lceil x$ mit $x > 0\rfloor \mapsto 1/x)(2)$. Die Aussprache für (ist *von* oder *angewendet auf*.

Im speziellen Fall einer Abstraktion mit nur einem einzigen Beispiel lässt sich dieses folgendermaßen ansprechen.

Beispielextraktion	$\downarrow$*Abstraktion*. So ist $\downarrow \lceil x$ mit $x \in \mathbb{R}_{<0}, x^2 = 9\rfloor$ die reelle Zahl -3. Die Aussprache für $\downarrow$ ist *das Beispiel von*.

Zur Angabe von Eigenschaften werden *Aussagen* benutzt. Es gibt folgende Grundtypen von Aussagen.

Aussage	*Beschreibung* : *Abstraktion* | $\exists$ *Abstraktion* | **In** *Abstraktion* **gilt** *Aussage* | *Aussage* $\wedge$ *Aussage* | *Aussage* $\vee$ *Aussage* | $\neg$ *Aussage* .
	Beispiele für *ist*-Aussagen sind f : reelleFunktion oder auch $[1, 2] : \lceil u, v$ mit $u > 0, v = u + 1\rfloor$. Dabei wird : als *ist ein Beispiel für* ausgesprochen.
	Die Aussprache für $\exists$ lautet *es gibt ein Beispiel für*. Beispielhafte Existenzaussagen sind $\exists$reelleFunktion, $\exists\lceil N$ mit $N \in \mathbb{N}, N \geq c\rfloor$.
	Als Beispiel für eine Satzaussage dient In $\lceil x, y$ mit $x > 0, y > x\rfloor$ gilt $y^2 > x^2$.
	Die Aussprache für $\wedge$ ist *und* zum Beispiel in $(x > 0) \wedge (y > 0)$.
	Die Aussprache für $\vee$ ist *oder* zum Beispiel in $(z \in \mathbb{N}) \vee (-z \in \mathbb{N})$.
	Die Aussprache für $\neg$ ist *nicht* zum Beispiel in $\neg(x \in \mathbb{R})$.

Neben den hier vorgestellten sprachlichen Grundformen möchte man besonders für häufig benutzte Formulierungen auch knappere klammerarme und intuitive Notationen ermöglichen. Diese Notationsvereinbarungen folgen der Konvention

Notation	**Notation** *<Zeichenanordnung mit eingerahmten Platzhaltern>* **für** *Beschreibung*. Beispielsweise schreibt man bei einer Folge, einem Zahlentupel oder einer Matrix die Argumente gerne mit unteren Indizes statt in der Form eines Zuordnungsergebnisses. Eine entsprechende Vereinbarung wäre Notation $\boxed{a}_{\boxed{n}}$ für $a(n)$.

Schließlich lassen sich Beispiele gewisser Abstraktionen unter Umständen auch als Beispiele anderer Abstraktionen interpretieren, wie etwa ein Vektorraum V als Menge interpretiert werden kann, so dass $x \in V$ eine gültige Schreibweise ist.

Interpretation	**Interpretation** *Abstraktion Zeichenkette* **als** *Abstraktion Beschreibung*. Eine entsprechende Vereinbarung wäre Interpretation Vektorraum V als Menge X_V.

1.8.2. Alternativen zu Grundformen

Zur besseren Lesbarkeit und zur Vermeidung von unnötig vielen Klammern, werden zu den Grundformen in bestimmten Situationen auch andere Schreibweisen eingeführt. Um den Zusammenhang zwischen Grund- und Alternativform zu beschreiben, geben wir jeweils beide Versionen an, wobei wir kursiv geschriebene Platzhalter für Sprachobjekte benutzen.

Wir beginnen mit alternativen Definitionsformen im Fall von Abstraktionen. Hat die Abstraktion einen einzelnen Platzhalter, so können wir schreiben

X : *Name* :⇔ *Abstraktionsbeschreibung* □
Aussprache(:⇔) *definitionsgemäß genau dann, wenn*
Beispiel a : Folge :⇔ $a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ □
Grundform *Name* := ⌈X mit *Abstraktionsbeschreibung*⌋

Umfasst die Abstraktion mehrere Platzhalter, dann ist die Form entsprechend

$[X, \ldots, Y]$: *Name* :⇔ *Abstraktionsbeschreibung* □
Beispiel $[A, B]$: Inklusionspaar :⇔ A : Menge, B : Menge, $A \subset B$ □
Grundform *Name* := ⌈$X, \ldots, Y$ mit *Abstraktionsbeschreibung*⌋

Bei der Definition einer Zuordnung, ist folgende Schreibweise suggestiver als die Grundform

Name(*Platzhalter* mit *Bedingungen*) := *Ergebnis*
Aussprache(() *zu*
Beispiel Mittelwert(a, b mit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) := $(a + b)/2$
Grundform *Name* := ⌈ *Platzhalter* mit *Bedingungen*⌋ ↦ *Ergebnis*

Ist das Ergebnis wieder eine Abstraktion, so kann man die Formen kombinieren, wie in folgendem Beispiel

w : Wurzel(x mit $x \in \mathbb{R}$):⇔ $w \in \mathbb{R}, w^2 = x$ □

Da Abstraktionen ohne Platzhalter eine Situation beschreiben, die sich nur auf bereits vorhandene Abstraktionen bezieht, ist es naheliegend, folgende Alternativnotation zu wählen. Im Beispiel ist x als reelle Zahl bereits eingeführt worden.

Fall(*Bedingungen*)
Beispiel Fall($x > 0$, $\ln(x) = x$)
Grundform ⌈ mit *Bedingungen*⌋

Bei der Formulierung von Satzeigenschaften eignet sich die Grundform besonders dann, wenn die Voraussetzung eine Abstraktion mit Namen ist. Allerdings ist in vielen Fällen eine solche Namensvergabe unnötig, so dass die Voraussetzung direkt im Satz angegeben wird. Folgende Alternativnotation spart in dieser Situation die Abstraktionsklammern

∀*Platzhalter* mit *Bedingungen* gilt *Folgerung*
Aussprache(∀) *für alle*
Beispiel $\forall\epsilon$ mit $\epsilon > 0$ gilt $a + \epsilon \geq b$
Grundform In ⌈*Platzhalter* mit *Bedingungen*⌋ gilt *Folgerung*

Ist die Voraussetzung ein Fall mit einer einzelnen Aussage als Fallbeschreibung, dann können wir auch folgende Schreibweise wählen

Voraussetzung ⇒ *Folgerung*
Aussprache(⇒) *impliziert* oder *aus . . . folgt . . .*
Beispiel $a \in (-1, 1) \Rightarrow \cos(a) > 0$
Grundform In ⌈ mit *Voraussetzung*⌋ gilt *Folgerung*

Schließlich gibt es häufig auftretende Aussagen, die sich aus den Grundformen darstellen lassen, und für die eigene Abkürzungen zur Verfügung stehen.

Notation $\boxed{A}::\boxed{B}$ für $\forall x$ mit $x : A$ gilt $x : B$
Aussprache(::) *spezialisiert* oder *jedes Beispiel von ... ist ein Beispiel von ...*
Beispiel $\lceil x \text{ mit } x \in \mathbb{Q}\rfloor :: \lceil x \text{ mit } x \in \mathbb{R}\rfloor$

Die Gleichbedeutung von zwei Abstraktionen wird auf die zugehörigen Beispiele zurückgeführt.

Notation $\boxed{A}=\boxed{B}$ für $(A :: B) \wedge (B :: A)$
Aussprache(=) *ist gleich* oder *ist gleichbedeutend mit*
Beispiel $\lceil x \text{ mit } x \in \mathbb{R}, x > 0\rfloor = \lceil x \text{ mit } x \in \mathbb{R}, \neg(x \leq 0)\rfloor$

Die beiden letzten Notationen handeln von Eindeutigkeit der Beispiele einer Abstraktion.

Notation $!\boxed{A}$ für $\forall u, v$ it $u : A, v : A$ gilt $u = v$
Aussprache(!) *... ist eindeutig*
Beispiel $!\lceil x \text{ mit } x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 = 2\rfloor$

Da die Eindeutigkeit nicht impliziert, dass überhaupt ein Beispiel existiert, benutzen wir schließlich noch folgende Abkürzung.

Notation $\exists!\boxed{A}$ für $(\exists A) \wedge (!A)$
Aussprache($\exists!$) *es gibt genau ein Beispiel zu*
Beispiel $\exists!\lceil x \text{ mit } x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 = 2\rfloor$