Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. K. J. Becher
3.7.2007

Übungen zur Topologie

Blatt 12

Definition:
Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn jede absteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Teilmengen von X stationär wird (d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $A_n = A_{n+1} = \dots$ für jedes $n \geq N$).

Aufgabe 50:
Zeigen Sie, dass für einen topologischen Raum X folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i) X ist noethersch.
- (ii) Jedes nichtleere System aus abgeschlossenen Teilmengen von X besitzt ein minimales Element.
- (iii) Jede offene Teilmenge von X ist kompakt.

Aufgabe 51:
Zeigen Sie, dass das Spektrum eines noetherschen Ringes in der Zariski-Topologie ein noetherscher topologischer Raum ist.

Aufgabe 52:
Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X nur endlich viele irreduzible Komponenten hat, und dass, falls $X_1, \dots, X_n$ die irreduziblen Komponenten von X sind, für $1 \leq i \leq n$ jeweils

$$X_i \not\subseteq \bigcup_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} X_j$$

gilt. (Hinweis: Man betrachte das System $\mathcal{M}$ derjenigen abgeschlossenen Teilmengen von X, die nicht Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Teilmengen sind.)

Aufgabe 53:
Zeigen Sie, dass für einen topologischen Raum X folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i) X ist zusammenziehbar.
- (ii) Jede stetige Abbildung $X \longrightarrow Y$ in einen topologischen Raum Y ist unwesentlich (nullhomotop).
- (iii) Jede auf einem topologischen Raum Z definierte stetige Abbildung $Z \longrightarrow X$ ist unwesentlich.

Abgabe: Dienstag 10.7.07 in der Vorlesung.