Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. K. J. Becher
15.5.2007

Übungen zur Topologie

Blatt 5

Aufgabe 18:
Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann hausdorffsch ist, wenn im Produkt $X \times X$ die Diagonale $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ einen abgeschlossenen Unterraum bildet.

Aufgabe 19:
Zeigen Sie, dass der Einheitskreis $\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ als Unterraum von $\mathbb{R}^2$ homöomorph ist zu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, dem Quotientenraum von $\mathbb{R}$ bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$ definiert durch $x \sim y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Aufgabe 20:
Sei $(X, \leq)$ eine wohlgeordnete, überabzählbare Menge mit einem größten Element η derart, dass für jedes $a \in X \setminus \{\eta\}$ die Menge $\{x \in X \mid x \leq a\}$ abzählbar ist. (Vgl. Aufgabe 2) Sei X mit der Ordnungstopologie zu $\leq$ versehen. (Vgl. Blatt 3) Sei $A = X \setminus \{\eta\}$. Zeigen Sie:

(a) Es ist $\overline{A} = X$, also $\eta \in \overline{A}$, aber für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ gilt $x_n \not\to \eta$.
(b) Ist die Menge $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie versehen, so ist die charakteristische Funktion $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ nicht stetig, aber für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gilt mit $x_n \to x$ auch $\chi_A(x_n) \to \chi_A(x)$.
(c) X erfüllt keines der beiden Abzählbarkeitsaxiome und ist nicht metrisierbar.

Aufgabe 21:
Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen X, Y und sei $c \in X$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig in c ist, wenn für jedes Netz $(x_i)_{i\in I} \subset X$ mit $(x_i)_{i\in I} \longrightarrow c$ in X auch $(f(x_i))_{i\in I} \longrightarrow f(c)$ in Y gilt.

Abgabe: Dienstag 22.5.07 in der Vorlesung