Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Jan Beran
Sommersemester 2011

Zeitreihenanalyse

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1

1. Sei $q \in \mathbb{N}_{n\geq 1}$ und sei $\epsilon_i,\ i \in \mathbb{Z}$, eine Folge paarweise unkorrelierter Zufallsvariablen mit konstanten Erwartungswerten und Varianzen, $E[\epsilon_i] = \mu_\epsilon$ und $\mathrm{var}(\epsilon_i) = \sigma_\epsilon$ für alle i. Sei, für gegebene Koeffizienten $a_0, \ldots, a_q$, die Zeitreihe X_t erklärt als $X_t = \sum_{j=0}^{q} a_j \epsilon_{t-j},\ t \in \mathbb{Z}$.
   Zeigen Sie:
   Die Autokovarianzfunktion (kurz: *acf*) γ von (X_t) ist
   $$\mathrm{cov}(X_t, X_{t+k}) = \gamma(t, t+k) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^{q-|k|} a_j a_{j+|k|} & \text{für} \quad |k| \leq q, \\ 0 & \text{für} \quad |k| > q, \end{cases}$$
   $t, k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist (X_t) schwach stationär.
2. Seien $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $u \leq v$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass
   $$\sum_{t=u}^{v} e^{i\lambda t} = \begin{cases} v - u + 1 & \text{falls} \quad \lambda \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ \dfrac{\sin(\frac{v-u+1}{2}\lambda)}{\sin(\frac{\lambda}{2})} \exp(i\lambda \dfrac{u+v}{2}) & \text{falls} \quad \lambda \notin 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Aufgabe 1.2

Sei U eine auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gleichverteilte Zufallsvariable, und sei A eine reelle, von U unabhägige Zufallsvariable mit $E[A] = 0$ und $\mathrm{var}(A) = \sigma_A^2 < \infty$. Wir setzen für $t \in \mathbb{N}$

$$X_t := A \cos\left(\frac{2\pi}{12} t + U\right).$$

Zeigen Sie, dass

$$\gamma(k) = \frac{1}{2}\sigma_A^2 \cos\left(\frac{2\pi}{12} k\right)$$

die acf zu (X_t) ist.

Aufgabe 1.3

Sei $(H, < \cdot, \cdot >)$ ein reeller oder komplexer Hilbertraum. Die Folgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergent bezglich der zugehörigen Norm $\|u\| = | < u, u > |^{\frac{1}{2}}$ mit den Grenzwerten v beziehungsweise w. Zeigen Sie

$$\|v_n\| \to \|v\|, \quad n \to \infty,$$
$$< v_n, w_n > \to < v, w >, \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 1.4
Sei $f : \mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{u,v=1}^{n} f(u,v) = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-|h|} f(t+|h|,t) + \sum_{h=-(n-1)}^{-1} \sum_{t=1}^{n-|h|} f(t,t+|h|).$$

Folgern Sie, dass falls f symmetrisch (also $f(u,v) = f(v,u)$), gilt

$$\sum_{u,v=1}^{n} f(u,v) = \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-|h|} f(t+|h|,t).$$

Zeigen Sie weiterhin: Ist $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $f(u,v) := g(u-v)$, so besteht die Gleichheit

$$\sum_{u,v=1}^{n} g(u-v) = \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} (n-|h|)g(h).$$

Die kommenden Übungsblätter werden auf

http://www.math.uni-konstanz.de/~buerkel/

bereitgestellt.