Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Jan Beran
Sommersemester 2011

Zeitreihenanalyse

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 (Computerübung, 4 Punkte)

1. Laden Sie die Dateien *bodensee.txt* und *korrektur.txt* von der Homepage herunter und kopieren Sie diese in Ihr R Arbeitsverzeichnis. Laden Sie anschließend die Dateien mit dem Befehl `read.table()` in R ein. Die Datei *bodensee.txt* enthält den mittleren Pegel des Bodensees für die Jahre 1976 bis 2009 (Einheit: cm). Die Messungen liegen monatsweise vor. Plotten Sie den Pegel mit Hilfe der Funktion `ts.plot()`. Was kann man über Stationarität und Saisonalität der Daten aussagen?

2. Durch eine Verschiebung des Pegelnullpunktes gibt es für jedes Jahr eine gewissen Abweichung. Die Höhe des Pegelnullpunktes für jedes Jahr ist in der Datei *korrektur.txt* gespeichert (Einheit: Meter über Adria). Addieren Sie die Höhen des Pegelnullpunktes auf die Messwerte und speichern Sie diese Zeitreihe in dem Vektor X. Plotten Sie X und berechnen Sie die empirische Autokovarianzfunktion. Was lässt sich nun über Saisonalität und Stationarität aussagen?

3. Differenzieren Sie die Zeitreihe mit lag 12, d.h. $\nabla_{12} X_t = X_t - X_{t-12}$. Plotten Sie die differenzierte Zeitreihe erneut und berechnen Sie die Autokovarianzfunktion.

4. Fitten Sie mit Hilfe der kleinesten Quadratmethode die Funktion

$$f(t) = \mu + \sum_{j=1}^{5} \beta_j \sin\left(\frac{2\pi j t}{12}\right) + \sum_{j=1}^{6} \alpha_j \cos\left(\frac{2\pi j t}{12}\right)$$

an die Zeitreihe X. Schätzen Sie die Parameter μ, α und β mit Hilfe der kleinsten Quadrat Methode. Verwenden Sie dazu die Funktion `lsfit()`. Zeichnen Sie die Residuen $\hat{\varepsilon}_t$ und berechnen Sie die Autokovarianzfunktion. Zeichnen Sie X zusammen mit der geschätzten Trendfunktion in einen Plot.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)
Sei $\gamma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\gamma(k) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = 0 \\ -\frac{1}{3} & \text{für} \quad |k| = 1 \\ \frac{1}{6} & \text{für} \quad |k| = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass γ die acf einer schwach stationären Zeitreihe ist.

Aufgabe 5.3 (4 Punkte) (Korrektur am 12.5.2011 bei Punkt 2.)
Bestimmen Sie die Spektralverteilung von Z_t, Y_t, X_t wobei

1. die Z_t quadratintegrierbar sind und paarweise unkorreliert mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

2. $Y_t := A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, wobei $\omega \in \mathbb{R}$ und $E[A] = E[B] = 0$ $\mathrm{var}(A) = \mathrm{var}(B) = \sigma^2$, A, B unkorreliert.

3. $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j Z_{t-j}$ (Grenzwert im L^2-Sinne), wobei $|a| < 1$ und die Z_t wie in Teil 1 sind.

Aufgabe 5.4 (4 Punkte)

1. Seien X, Y schwach stationäre, unkorrelierte Zeitreihen (also $\mathrm{cov}(X_t, Y_s) = 0$ für alle $s, t \in \mathbb{Z}$). Seien F_X, F_Y die Spektralverteilungen zu X, Y.
Zeigen Sie: $Z_t := X_t + Y_t$ ist schwach stationär mit Spektralverteilung $F_Z = F_X + F_Y$.
Hinweis: Sie können o. B. d. A. $E[X_t] = E[Y_t] = 0$ annehmen (warum?).

2. Seien $0 < \lambda_1 < \ldots \lambda_k < \pi$ und σ^2 gegeben. Konstruieren Sie eine schwach stationäre Zeitreihe, deren Spektralverteilung ein diskretes Maß mit Punktmassen der Größe $\frac{\sigma^2}{2}$ an den Stellen $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_k$ ist.
Hinweis: $\cos(\lambda k) = \frac{1}{2}\left(e^{i\lambda k} + e^{-i\lambda k}\right)$. Was ergibt $\int e^{ikx} dF(x)$ wenn $dF = d(\delta_{-u} + \delta_u)$, wobei δ_x das Dirac-Maß (Punktmaß mit der Masse 1) ist? Vergleiche auch Aufgabe 5.3.2.

3. Zeigen Sie: Verzichtet man bei der Spektralverteilung auf die Forderung $F(-\pi) = 0$, so ist die Spetralverteilung nicht eindeutig.

Abgabe: Bis Dienstag, 17.5.2011, 12.00 h, in den Briefkasten Nr. 19. Achten Sie bitte auf die Richtlinien für die Computerübungen.