Spezialfälle

1) Quotienten-Topologie

Es seien $(\mathfrak{R}, \mathbb{O})$ ein TR und ϱ eine *Äquivalenzrelation** auf $\mathfrak{R}$.

$$\begin{aligned}
\varrho(a) &:= \{b \in \mathfrak{R} : (a,b) \in \varrho\} \quad \text{„\textit{Äquivalenzklasse} (zu } a\text{)“} \quad (a \in \mathfrak{R}) \\
\mathfrak{R}/_{\varrho} &:= \{\varrho(a) : a \in \mathfrak{R}\}, \ \ \pi : \mathfrak{R} \ni a \longmapsto \varrho(a) \in \mathfrak{R}/_{\varrho} \quad \text{„\textit{(kanonische) Projektion}“} \\
\mathbb{O}(\varrho) &:= \left\{Q \subset \mathfrak{R}/_{\varrho} : \pi^{-1}(Q) \in \mathbb{O}\right\}
\end{aligned}$$

Nach (6.1) hat man:

6.2 Bemerkung

a) $\left(\mathfrak{R}/_{\varrho}, \mathbb{O}(\varrho)\right)$ *ist ein TR.* *(„(topologischer) Quotientenraum“;* $\mathbb{O}(\varrho)$ *„Quotiententopologie“)*

b) $\mathbb{O}(\varrho)$ *ist die feinste Topologie auf* $\mathfrak{R}/_{\varrho}$ *derart, daß* π *stetig ist.*

c) $(\mathfrak{S}, \mathbb{T})$ *TR,* $f : \mathfrak{R}/_{\varrho} \longrightarrow \mathfrak{S}$*:* f *stetig* $\iff$ $f \circ \pi$ *stetig*

2) Summen-Topologie

Es seien I eine nicht-leere Menge und $(\mathfrak{R}_i, \mathbb{O}_i)$ TRe $(i \in I)$ mit
$\mathfrak{R}_i \cap \mathfrak{R}_j = \emptyset \quad i \neq j \quad (i,j \in I)$**.

$$\mathfrak{R} := \bigcup_I \mathfrak{R}_i\,; \qquad f_i : \mathfrak{R}_i \ni x \longmapsto x \in \mathfrak{R} \qquad \text{(„\textit{kanonische Injektion}“)}$$

$\mathfrak{R}$ mit der zugehörigen finalen Topologie heißt *„topologische Summe“* (der $(\mathfrak{R}_i, \mathbb{O}_i)_I$).

3) Infimum von Topologien

Es seien I eine nicht-leere Menge und $(\mathfrak{R}, \mathbb{O}_i)$ TRe $\quad (i \in I)$.
Mit $E_i := F := \mathfrak{R}$ und $f_i := \mathrm{id}_{\mathfrak{R}}$ $(i \in I)$:
Die zugehörige finale Topologie auf $\mathfrak{R}$ ist — man beachte (4.10) — gerade die *feinste Topologie auf* $\mathfrak{R}$*, die gröber als alle* $\mathbb{O}_i$ *ist*; sie ist offenbar $\bigcap_I \mathbb{O}_i$ (daher auch als *„Durchschnitt der Topologien* $\mathbb{O}_i$*“* bezeichnet).

* $\varrho \subset \mathfrak{R}^2$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv

** Ist diese Voraussetzung nicht gegeben, dann kann z. B. $\left(\mathfrak{R}_i \times \{i\}\right)_I$ betrachtet werden.

7 Offene Abbildungen und Homöomorphismen

Es seien $(\mathfrak{R}_\nu, \mathbb{O}_\nu)$ topologische Räume $\quad(\nu = 1,2)\quad$ und $\quad f\colon \mathfrak{R}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_2$.

Definition *f „offen“*: $\iff f(\mathbb{O}_1)\ \big(:= \{f(O) : O \in \mathbb{O}_1\}\big) \subset \mathbb{O}_2$

f „topologisch“ („Homöomorphismus“): $\iff$ *f bijektiv* $\wedge\ f(\mathbb{O}_1) = \mathbb{O}_2$

$(\mathfrak{R}_1, \mathbb{O}_1)$ und $(\mathfrak{R}_2, \mathbb{O}_2)$ heißen genau dann „homöomorph“, wenn eine topologische Abbildung $g\colon \mathfrak{R}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_2$ existiert.

7.1 Bemerkung

$$\boxed{\begin{aligned} f \text{ topologisch} &\iff f \text{ bijektiv, stetig, offen} \\ &\iff f \text{ bijektiv, stetig und } f^{-1} \text{ stetig} \end{aligned}}$$

Beweis: *Für f bijektiv* und $M_\nu \subset \mathfrak{R}_\nu$ gelten:

$$f(f^{-1}(M_2)) = M_2, \quad f^{-1}(f(M_1)) = M_1 \quad \text{und} \quad (f^{-1})^{-1}(M_1) = f(M_1)$$

also $\big[\mathbb{O}_2 \subset f(\mathbb{O}_1) \iff f \text{ stetig}\big]$ und $\big[\, f \text{ offen} \iff f^{-1} \text{ stetig}\big]$ □

Homöomorphe topologische Räume sind hinsichtlich ihrer Topologie nicht zu unterscheiden. Wichtige Aufgabe: Aufsuchen *‚topologischer Invarianten‘*.

8 Vollständigkeit

‚Vollständigkeit‘ läßt sich in beliebigen topologischen Räumen gar nicht definieren; dafür geeignete Objekte sind *‚uniforme Räume‘*. Diese (sehr wichtigen) Räume wollen wir allerdings in dieser Vorlesung — aus Zeitgründen — *nicht einführen*, sondern uns für diese Fragestellung auf semimetrische Räume beschränken:

Es sei $(\mathfrak{R}, \delta)$ ein SMR.

Definition

$\alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{R}$ „Cauchy-*Folge*“* $:\iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n,m \geq N \quad \delta(\alpha_n, \alpha_m) < \varepsilon$

$(\mathfrak{R}, \delta)$ *„vollständig“* $:\iff$ *Jede CF $\alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{R}$ ist konvergent (in $\mathfrak{R}$).*

8.1 Bemerkung *Für $\alpha\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{R}$: $\quad \alpha$ konvergent $\implies \alpha$ CF*

Beweis: □□□ □

8.2 Bemerkung

Vor.: $(\mathfrak{R}, \delta)$ *MR,* $\emptyset \neq A \subset \mathfrak{R}$, $\big(A, \delta_{/}\big)$ *vollständig*

Beh.: *A abgeschlossen*

* wir notieren wieder kurz *„CF“*; in uniformen Räumen definiert man allgemeiner Cauchy-*Filter*.

Beweis: Zu $p \in \overline{A}$ existiert — nach (4.2) — $(x_k) \in A^{\mathbb{N}}$ mit $x_k \longrightarrow p$; nach (8.1) ist (x_k) eine CF (in A), daher existiert $a \in A$ mit $x_k \longrightarrow a$. Da δ Metrik ist, gilt $p = a$. □

8.3 Bemerkung

Vor.: $(\mathfrak{R}, \delta)$ *vollständig;* $\emptyset \neq A$ *abgeschlossen* $(\subset \mathfrak{R})$

Beh.: $(A, \delta_{/})$ *vollständig*

Beweis: Ist α eine CF in A, dann existiert ein $p \in \mathfrak{R}$ mit $A \ni \alpha(n) \longrightarrow p$; nach (4.2) folgt: $p \in \overline{A} = A$ □

Für zwei beliebige Mengen A, B bezeichnen wir wieder

$$\mathfrak{F}(A, B) \;:=\; \big\{ f \mid f \colon A \longrightarrow B \big\}\,.$$

Für $A \subset \mathfrak{R}$:

$$\mathrm{Dm}(A) \;:=\; \sup_{x,y \in A} \delta(x,y) \quad \big(\text{mit } \sup \emptyset := 0\big) \qquad \text{„}\textit{Durchmesser (von A)}\text{“}$$

$$A \text{ „}\textit{beschränkt}\text{“} :\Longleftrightarrow \mathrm{Dm}(A) < \infty$$

Für eine nicht-leere Menge $\mathfrak{S}$ seien

$$\ell_\infty \;:=\; \ell_\infty(\mathfrak{S}, (\mathfrak{R}, \delta)) \;:=\; \{ f \in \mathfrak{F}(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}) : f(\mathfrak{S}) \text{ beschränkt}\}^*$$

$$\text{und} \quad \Delta(f,g) \;:=\; \sup_{x \in \mathfrak{S}} \delta(f(x), g(x)) \quad \text{für } f, g \in \ell_\infty\,.$$

8.4 Satz

a) (ℓ_∞, Δ) *ist ein SMR.*
a') δ *Metrik* $\Longrightarrow$ Δ *Metrik*
b) $(\mathfrak{R}, \delta)$ *vollständig* $\Longrightarrow$ (ℓ_∞, Δ) *vollständig*

Beweis: a), a'): □□□

b): Es sei $\ell_\infty^{\mathbb{N}} \ni (f_n)$ Δ-CF: Für $x \in \mathfrak{S}$ ist dann $(f_n(x))$ δ-CF, also existiert ein $y_x \in \mathfrak{R}$ mit $f_n(x) \longrightarrow y_x$; (für jedes $x \in \mathfrak{S}$ sei ein solches y_x fest gewählt, damit:) $f(x) := y_x$ $(x \in \mathfrak{S})$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\Delta(f_n, f_m) \leq \varepsilon$ für $n, m \geq N$; also für $x \in \mathfrak{S}$:

$$\delta(f_n(x), f(x)) \leq \delta(f_n(x), f_m(x)) + \delta(f_m(x), y_x) \leq \varepsilon + \delta(f_m(x), y_x)$$

---

* Mit $\mathfrak{S} := \mathbb{N}$ und $\mathfrak{R} = \mathbb{K}$ erhält man $\ell_\infty(\mathbb{K})$ (man vergleiche Seite 4).

$(N \le n$ *fest*, $N \le m \to \infty$:) $\delta(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon$; somit für $x, y \in \mathfrak{S}$

$$\begin{aligned}\delta(f(x), f(y)) &\le \delta(f(x), f_n(x)) + \delta(f_n(x), f_n(y)) + \delta(f_n(y), f(y))\\ &\le 2\varepsilon + \mathrm{Dm}(f_n(\mathfrak{S})),\end{aligned}$$

also $f \in \ell_\infty$ und dann $\Delta(f_n, f) \le \varepsilon$. □

Ist zusätzlich $(\mathfrak{S}, \mathbb{O})$ ein TR, dann setzen wir

$$C_b(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}) := \{f \in \ell_\infty(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}) : f \text{ stetig}\}$$

und erhalten:

8.5 Folgerung $(\mathfrak{R}, \delta)$ *vollständig* $\Longrightarrow$ $C_b(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})$ *vollständig*

Beweis: Nach (8.3) und (8.4 b) ist nur *zu zeigen:* $C_b(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})$ *ist abgeschlossen (in* ℓ_∞*):* Es seien $(f_n) \in C_b(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})^{\mathbb{N}}$ und $f \in \ell_\infty$ mit $\Delta(f_n, f) \longrightarrow 0$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Delta(f_n, f) \le \varepsilon$; für $a \in \mathfrak{S}$ existiert ein $U \in \mathbb{U}_a$ mit $\delta(f_n(a), f_n(x)) \le \varepsilon$ für $x \in U$ (da f_n (in a) stetig ist); damit $\delta(f(a), f(x)) \le \cdots \le 3\varepsilon \quad (x \in U)$. □

Beispiele

(B1) $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty)$ ist *vollständig.*
$\big($bekannt; oder z. B. aus (8.4) mit der Vollständigkeit von $(\mathbb{K}, |\ |)\big)$

(B2) $(\mathbb{Q}, |\ |)$ ist *nicht* vollständig.
(bekannt)

(B3) $-\infty < a < b < \infty$: $\mathfrak{R}([a, b]) := \{f \in \mathfrak{F}([a, b], \mathbb{R}) : f \text{ R-integrierbar}\}$
$\|h\|_R := \int_a^b |h(x)|\, dx \ \big(h \in \mathfrak{R}([a, b])\big)$ liefert eine *Halbnorm* $\|\ \|_R$: ✓
Mit zugehöriger Semimetrik δ_R gilt:

$$\big(\mathfrak{R}([a, b]), \delta_R\big) \quad \text{ist } \textit{nicht} \text{ vollständig.}$$

Dazu seien Œ $a := 0, b := 1$:

$$f_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} & , 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ t^{-1/2} & , \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Für $n < m$ hat man

$$\delta_R(f_n, f_m) \le \int_0^{1/m} \sqrt{m}\, dt + \int_{1/m}^{1/n} t^{-1/2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{m}} + 2\sqrt{t}\,\Big|_{1/m}^{1/n} \le \frac{3}{\sqrt{n}},$$

also ist (f_n) eine δ_R-CF. Ist $h \in \mathfrak{R}([a,b])$, dann ist h beschränkt, also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|h(t)| \;\le\; \frac{1}{2}\sqrt{N}\;\; (0 \le t \le 1)$. Für $n \ge N$ ist dann

$$\delta_R(f_n, h) \;\ge\; \int\limits_0^{1/N} |f_n(t) - h(t)|\, dt \;\ge\; \int\limits_0^{1/N} \frac{1}{2}\sqrt{N}\, dt \;=\; \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{N}}\,.$$

Das gewählte Beispiel ist einfach, aber nicht besonders schön; denn es läßt sich (bei entsprechender Erweiterung von δ_R) zumindest eine *uneigentlich R-integrierbare* Grenzfunktion finden. Mit einem raffinierteren Beispiel läßt sich aber auch zeigen: Es existiert eine δ_R-CF eigentlich R-integrierbarer Funktionen, die auch keine uneigentlich R-integrierbaren Funktionen als Grenzwert hat. (Man vgl. dazu z. B. Hoffmann/Schäfke *„Integrale“*.)

(B4) $\|\;\|_1 := \|\;\|_{R/C[a,b]}$ ist eine *Norm* (✓).

Mit der zugehörigen Metrik δ_1 gilt:

$$\big(C[a,b], \delta_1\big) \quad \text{ist } \textit{nicht} \text{ vollständig.}$$

(Gleiches Beispiel wie zu (B3) oder — sogar mit einer gleichmäßig beschränkten Funktionenfolge — wie folgt:) z. B. $a := -1, b := 1$,

$$f_n(x) \;:=\; \begin{cases} 1 & , \frac{1}{n} \le x \le 1 \\ nx & , -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ -1 & , -1 \le x \le -\frac{1}{n} \end{cases}$$

$$h(x) \;:=\; \begin{cases} 1 & , 0 \le x \le 1 \\ -1 & , -1 \le x < 0 \end{cases}\;. \quad \text{Dann ist } h \in \mathfrak{R}([-1,1])$$

mit $\delta_R(f_n, h) \;=\; \dfrac{1}{n}$,

also (f_n) δ_1-CF; falls $g \in C[-1,1]$ mit $\delta_1(f_n, g) \longrightarrow 0$: $\delta_R(h,g) = 0$; Œ $g(0) \le 0$:
Es existiert $\delta > 0$ so, daß $|h(t) - g(t)| \ge \frac{1}{2}$ für $0 \le t \le \delta$, also $\delta_R(h,g) \ge \frac{\delta}{2}$ ↯

(B5) $(\ell_p(\mathbb{K}), \|\;\|_p)$ ist vollständig (für $1 \le p \le \infty$).
($p = \infty$: nach (8.4); $1 \le p < \infty$: Übung (4.1)) *Ü stellen!*

Weil uns die Beispiele (B2), (B3), (B4) (und viele andere) so furchtbar traurig stimmen, zeigen wir, daß man jeden MR ‚vervollständigen‘ kann. Dazu stellen wir zunächst das folgende — auch in vielen anderen Zusammenhängen nützliche — Lemma bereit:

Definition *Für* $(\mathfrak{R}_\nu, \delta_\nu)$ *SMR* $(\nu = 1,2)$ *und* $\sigma\colon \mathfrak{R}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_2$:

$$\sigma \text{ „\textit{gleichmäßig stetig}“}: \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{R}_1 \quad \big[\delta_1(x,y) < \delta \implies \delta_2(\sigma(x), \sigma(y)) < \varepsilon\big]$$

$$\sigma \text{ „\textit{Isometrie}“}: \Longleftrightarrow \forall\, x, y \in \mathfrak{R}_1 \quad \delta_1(x,y) \;=\; \delta_2(\sigma(x), \sigma(y))$$

$(\mathfrak{R}_1, \delta_1)$ und $(\mathfrak{R}_2, \delta_2)$ heißen genau dann „isometrisch", wenn ein bijektive Isometrie $\varphi\colon \mathfrak{R}_1 \longrightarrow \mathfrak{R}_2$ existiert.

Für $A, B \subset \mathfrak{R}_1$:

$$A \text{ „dicht in } B\text{"} :\Longleftrightarrow \overline{A} \supset B$$

$$A \text{ „dicht"} :\Longleftrightarrow A \text{ dicht in } \mathfrak{R}_1 \qquad (\text{also } \overline{A} = \mathfrak{R}_1)$$

8.6 Lemma

Vor.:	$(\mathfrak{F}, \delta_1)$ *SMR,* $(\mathfrak{S}, \delta_2)$ *vollständiger MR,* $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{E} \neq \emptyset$, $i\colon (\mathfrak{E}, \delta_1) \longrightarrow (\mathfrak{S}, \delta_2)$ *gleichmäßig stetig*
Bez.:	$\mathfrak{I} := \overline{\mathfrak{E}}$
Beh.:	*Es existiert eindeutig* $\bar{\imath}\colon \mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{S}$ *stetig mit* $\bar{\imath}/_{\mathfrak{E}} = i$. *Dieses* $\bar{\imath}$ *ist gleichmäßig stetig.*

Wichtige Anwendung: *Integralerweiterung* ($\mathfrak{F}$ Funktionenraum, $\mathfrak{E}$ ‚einfache Funktionen', i elementares Integral; $\mathfrak{I}$ integrierbare Funktionen, $\bar{\imath}$ Integral) (Sehen wir uns später noch genauer an.)

Beweis:

1) Für $x \in \mathfrak{I}$ existiert $(x_n) \in \mathfrak{E}^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \longrightarrow x$, insbesondere ist (x_n) δ_1-CF und damit $(i(x_n))$ δ_2-CF; daher existiert eindeutig ein $y_x \in \mathfrak{S}$ mit $i(x_n) \longrightarrow y_x$.

2) Für $x \in \mathfrak{I}$ und $(x_n), (y_n) \in \mathfrak{E}^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \longrightarrow x$ und $y_n \longrightarrow x$ haben $(i(x_n))$ und $(i(y_n))$ den gleichen Grenzwert $\big($denn: $\delta_1(x_n, y_n) \longrightarrow 0 \implies \delta_2(i(x_n), i(y_n)) \longrightarrow 0\big)$; dies rechtfertigt: $\bar{\imath}(x) := y_x$.

3) *Falls* $j\colon \mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{S}$ stetig mit $j/_{\mathfrak{E}} = i$: $j = \bar{\imath}$: □□□

4) $\bar{\imath}/_{\mathfrak{E}} = i$: □□□

5) $\bar{\imath}$ ist gleichmäßig stetig: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$\forall\, x, y \in \mathfrak{E} \quad \Big[\delta_1(x,y) < \delta \implies \delta_2(i(x), i(y)) < \frac{\varepsilon}{3}\Big].$$

Für $v, w \in \mathfrak{I}$ mit $\delta_1(v,w) < \delta/3$ existieren $x, y \in \mathfrak{E}$ mit

$$\delta_1(x,v) < \frac{\delta}{3}, \quad \delta_1(y,w) < \frac{\delta}{3}$$

$$\text{und } \delta_2(i(x), \bar{\imath}(v)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \delta_2(i(y), \bar{\imath}(w)) < \frac{\varepsilon}{3};$$

dann $\delta_1(x,y) < \delta$, also $\delta_2(i(x), i(y)) < \varepsilon/3$; zusammen: $\delta_2(\bar{\imath}(v), \bar{\imath}(w)) < \varepsilon$. □

Zusatz *Ist i eine Isometrie, dann ist auch $\bar{\imath}$ eine Isometrie.*

Beweis: Zu $x, y \in \mathfrak{I}$ existieren $(x_n), (y_n) \in \mathfrak{E}^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$, also $i(x_n) \longrightarrow \bar{\imath}(x)$, $i(y_n) \longrightarrow \bar{\imath}(y)$:

$$(1.1)\text{ beachten} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} \delta_1(x_n,y_n) & = & \delta_2(i(x_n),i(y_n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \delta_1(x,y) & & \delta_2(\bar\imath(x),\bar\imath(y)) \end{array}$$ □

8.7 Satz

Vor.: $(\mathfrak{R},\delta)$ *MR*

Beh.: a) *Es existieren ein vollständiger MR* $\big(\widehat{\mathfrak{R}},\widehat{\delta}\big)$ *und* $\mathfrak{R}' \subset \widehat{\mathfrak{R}}$ *dicht (in* $\widehat{\mathfrak{R}}$*) derart, daß* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{R}'$ *isometrisch sind.*

Bez.: Ein $\big(\widehat{\mathfrak{R}},\widehat{\delta}\big)$ gemäß a) heißt eine *„Vervollständigung“* von $(\mathfrak{R},\delta)$.

b) *Je zwei Vervollständigungen von* $(\mathfrak{R},\delta)$ *sind isometrisch.*

Zum Beweis betrachtet man entweder Klassen äquivalenter CAUCHY-Folgen (man vergleiche dazu z. B. WLOKA, Seite 22 f) oder führt ihn wie nachstehend.
Bei diesem Beweis geht die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ein. Eine wichtige Frage ist jeweils: Wie sieht eine Vervollständigung ‚konkret‘ aus?

Beweis:

a): Mit festem $a \in \mathfrak{R}$ bezeichnen wir für $x \in \mathfrak{R}$

$$\widehat{x}\colon \mathfrak{R} \ni y \longmapsto \delta(y,x) - \delta(y,a) \in \mathbb{R};$$

wegen $|\widehat{x}(y)| \overset{(1.2)}{\le} \delta(x,a)$ $(y \in \mathfrak{R})$: $\widehat{x} \in \ell_\infty(\mathfrak{R},\mathbb{R})$. Für $x_1,x_2,y \in \mathfrak{R}$:

$$\begin{aligned} |\widehat{x_1}(y) - \widehat{x_2}(y)| &= |\ldots| \le \delta(x_1,x_2), \\ \text{also } \Delta(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) &\le \delta(x_1,x_2); \\ \text{andererseits } \Delta(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) &\ge |\widehat{x_1}(x_1) - \widehat{x_2}(x_1)| = |\ldots| = \delta(x_1,x_2). \end{aligned}$$

Dies zeigt: Für $\tau\colon \mathfrak{R} \ni x \longmapsto \widehat{x} \in \ell_\infty$ sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}' := \tau(\mathfrak{R})$ isometrisch. $\widehat{\mathfrak{R}} := \overline{\tau(\mathfrak{R})}$ ist vollständig (nach (8.3) und (8.4)) $\big(\widehat{\delta} := \Delta_{/\widehat{\mathfrak{R}}}\big)$

b): Ist auch $(\mathfrak{S},\sigma)$ eine Vervollständigung von $(\mathfrak{R},\delta)$, dann existieren eine in $\mathfrak{S}$ dichte Teilmenge $\mathfrak{S}'$ und eine bijektive Isometrie $\omega\colon \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}'$. Daher ist die Abbildung $\varrho := \tau\circ\omega^{-1}$ $\big(: (\mathfrak{S}',\sigma) \longrightarrow \big(\mathfrak{R}',\widehat{\delta}\big)\big)$ eine bijektive Isometrie, die — nach (8.6) und Zusatz — (eindeutig) zu einer Isometrie $\overline{\varrho}\colon (\mathfrak{S},\sigma) \longrightarrow \big(\widehat{\mathfrak{R}},\widehat{\delta}\big)$ fortgesetzt werden kann. Noch zu zeigen: $\overline{\varrho}(\mathfrak{S}) = \widehat{\mathfrak{R}}$:
(entweder auch $\omega \circ \tau^{-1}$ betrachten (…) oder:) Zu $\widehat{r} \in \widehat{\mathfrak{R}}$ existiert $r_n \in \mathfrak{R}'$ mit $r_n \to \widehat{r}$, $(s_n) := \big(\varrho^{-1}(r_n)\big)$ ist dann eine CF in $\mathfrak{S}'$, daher existiert $s \in \mathfrak{S}$ mit $s_n \longrightarrow s$, also auch $r_n = \varrho(s_n) \longrightarrow \overline{\varrho}(s)$, somit $\overline{\varrho}(s) = \widehat{r}$. □

9 Fixpunktsatz für Kontraktionen

Es seien $(\mathfrak{R}, \delta)$ ein *vollständiger* MR, $\emptyset \neq \mathfrak{D} \subset \mathfrak{R}$ und $T\colon \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{R}$.

Gesucht: $x^* \in \mathfrak{D}$ mit $Tx^* = x^*$ (*„Fixpunkt (von T)“*)

Probleme: Existenz, Eindeutigkeit, Verfahren zur Gewinnung (möglichst mit Fehlerabschätzung), Abhängigkeit von Parametern

Bezeichnung

T *„kontrahierend“* $:\Longleftrightarrow \exists\, 0 \leq P < 1\ \forall\, x, y \in \mathfrak{D}\ \ \delta(Tx, Ty) \leq P\,\delta(x, y)$ *

Man sagt dann auch „T ist eine Kontraktion“.

9.1 Satz

Vor.: *T kontrahierend (mit* LIPSCHITZ*-Konstante $P \in [0, 1[$)*
$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{K}$ *abgeschlossen mit* $T\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}$

Beh.: a) *Es existiert genau ein Fixpunkt x^* von T.*
b) *Für $x_0 \in \mathfrak{K}$ sei $x_{n+1} := Tx_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$; dann gelten:*

$$x_n \longrightarrow x^* \in \mathfrak{K}, \quad \delta(x_n, x^*) \ \leq\ \frac{P^n}{1-P}\,\delta(x_0, x_1)$$

In A II: Hilfsmittel zum Beweis der Sätze über lokale Umkehrbarkeit, implizite Abbildungen und Extrema mit Nebenbedingungen. In A III (man vergleiche auch SCHÄFKE/SCHMIDT *„Gewöhnliche Differentialgleichungen“*): allgemeine Version des Satzes $\rightsquigarrow$ *Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen* (mit PICARD-*Iterationsverfahren*)

Beweis: (Zum dritten Mal!)

a): *Eindeutigkeit:* Falls u, v $(\in \mathfrak{D})$ Fixpunkte von T:

$$\delta(u, v) \ =\ \delta(Tu, Tv) \ \leq\ P\,\delta(u, v) \ \Longrightarrow\ \delta(u, v) \ =\ 0 \ \Longrightarrow\ u = v$$

b): Wegen $T\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}$: $x_n \in \mathfrak{K}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\delta(x_{n+1}, x_n) \ \leq\ P^n \delta(x_1, x_0);$$

für $k \in \mathbb{N}$ damit

$$\begin{aligned} \delta(x_{n+k}, x_n) \ &\leq\ \delta(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \cdots + \delta(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq\ (P^{n+k-1} + \cdots + P^n)\,\delta(x_1, x_0) \ \leq\ \frac{P^n}{1-P}\,\delta(x_1, x_0); \qquad (1) \end{aligned}$$

das zeigt zunächst: (x_n) ist eine CF (in $\mathfrak{K}$); somit existiert ein $x^* \in \mathfrak{K}$ mit $x_n \longrightarrow x^*$. Da T stetig ist: $x_{n+1} = Tx_n \longrightarrow Tx^*$, also $x^* = Tx^*$. In (1): $k \longrightarrow \infty$ liefert die *‚Fehlerabschätzung‘*. □

*

* Ein solches P heißt „LIPSCHITZ-*Konstante*“.

Zwei (weitere) **Anwendungen:**

1. $n \in \mathbb{N}$; $A = (a_{ij})$ sei eine (reelle) (n,n)-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$.

   Gesucht: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\boxed{Ax = b}$ **(Lineares Gleichungssystem)**

$$d_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \qquad D := (d_{ij}) \qquad C := -A + D$$

Falls $a_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$:

(2) $\quad b = Ax = (D - C)x \iff D^{-1}b + D^{-1}Cx = x \iff s + Mx = x$

mit $s := D^{-1}b$, $M := D^{-1}C$.
Wir betrachten die Abbildung T, definiert durch $Tx := s + Mx \ \ (x \in \mathbb{R}^n)$, und im $\mathbb{R}^n$ die Norm $\| \ \|_\infty$. Mit der zugehörigen Metrik δ_∞ hat man dann für $0 \le P < \infty$:

$$\begin{aligned} & \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad \delta_\infty(Tx, Ty) \le P\, \delta_\infty(x, y) \\ \iff & \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad \|M(x-y)\|_\infty = \|Mx - My\|_\infty \le P\, \|x - y\|_\infty \\ \iff & \forall\, u \in \mathbb{R}^n \quad \|Mu\|_\infty \le P\, \|u\|_\infty \\ \overset{*}{\iff} & \qquad \|M\|_\infty := \max_i \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \le P \end{aligned}$$

Wir betrachten nun $\ (m_{ij}) := M = D^{-1}C = -D^{-1}A + E$, also

E: (n-zeilige Einheitsmatrix)

$$m_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & , i \neq j \\ 0 & , i = j \end{cases}.$$

Damit ergibt sich

$$\|M\|_\infty \le P \iff \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \quad \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \le P\, |a_{ii}|\,.$$

Daher ist (9.1) *auf (2) genau dann anwendbar, wenn*

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad (i = 1, \ldots, n)$$

(‚Zeilensummenkriterium') $\rightsquigarrow$ *‚Gesamtschritt- oder* JACOBI-*Verfahren'*

* Übung (8.1) zu AII

2. **FREDHOLM-Integralgleichungen** (2. Art)

Gegeben seien: $-\infty < a < b < \infty$, $k\colon [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig
und $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ *gesucht:* $u \in C^{\mathbb{R}}[a,b]$ mit

$$\boxed{\lambda \int_a^b k(x,t)\,u(t)\,dt + g(x) \;=\; u(x)} \qquad \big(x \in [a,b]\big)\,. \tag{3}$$

Wir betrachten $C^{\mathbb{R}}[a,b]$ mit $\|\ \|_\infty$ ($\rightsquigarrow \delta_\infty$): (Nach (8.5) ist dieser Raum vollständig.)

$$(Tu)(x) \;:=\; \lambda \int_a^b k(x,t)\,u(t)\,dt + g(x)$$

$\big($für $u \in C^{\mathbb{R}}[a,b]$ und $x \in [a,b]\big)$. Dann $Tu \in C^{\mathbb{R}}[a,b]$: ✓(etwa nach 9.6 aus A II)
Für $u, v \in C^{\mathbb{R}}[a,b]$ und $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} \big|(Tu)(x) - (Tv)(x)\big| \;&\le\; |\lambda| \int_a^b |k(x,t)|\;|u(t) - v(t)|\,dt \\ &\le\; |\lambda|(b-a)M\|u-v\|_\infty \end{aligned}$$

mit $M := \max\limits_{(x,t)\in[a,b]^2} |k(x,t)|$. Im Falle $|\lambda|(b-a)M < 1$ ist (9.1) anwendbar; dies liefert: Es existiert eindeutig ein $u \in C^{\mathbb{R}}[a,b]$ so, daß (3) gilt.

Für ‚$\mathbb{C}$' statt ‚$\mathbb{R}$' ebenso; *Annahmen* deutlich *abschwächbar*; *raffiniertere Normen* liefern größeren λ-Bereich

---

In allen Anwendungen liefert (9.1) nicht nur *Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen*, sondern ein *konstruktives Verfahren* zur Gewinnung von Lösungen mit brauchbarer *Fehlerabschätzung*. Weiter lassen sich Aussagen über *Einfluß von ‚Störungen'* auf die Lösung daraus gewinnen.