Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dieter Hoffmann
Markus Sigg
27.5.2003

4. Übung zur Analysis IV

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden am 4.6.2003 vorzubereiten und, soweit schriftlich bearbeitet, bis zum 2.6.2003 um 15:00 Uhr in die jeweiligen Gruppenbriefkästen einzuwerfen.

(4.1) (a) Zeigen Sie, daß (ℓ_p, d_p) für $0 < p < \infty$ vollständig ist. Dabei sei d_p für alle diese p entsprechend definiert wie in Aufgabe (1.2). [1] [2]

(b) Es sei c der Raum der konvergenten reellen oder komplexen Folgen und c_0 der Raum der Nullfolgen. Bekanntlich gilt $c_0 \subset c \subset \ell_\infty$. Zeigen Sie, daß $(c, \|\ \|_\infty)$ und $(c_0, \|\ \|_\infty)$ vollständig sind. [3]

(c) Zeigen Sie, daß $(\ell_{2003}, \|\ \|_\infty)$ nicht vollständig ist.

(4.2) δ_1 und δ_2 seien Semimetriken auf einer nicht-leeren Menge $\mathfrak{R}$. Zeigen Sie:

(a) Sind δ_1 und δ_2 gleichmäßig äquivalent (siehe Aufgabe (0.3)), so gilt:

$$(\mathfrak{R}, \delta_1) \text{ vollständig} \iff (\mathfrak{R}, \delta_2) \text{ vollständig}$$

(b) Diese Äquivalenz gilt nicht, wenn man nur voraussetzt, daß δ_1 und δ_2 die gleiche Topologie erzeugen. [4]

(4.3) $(\mathfrak{R}, \delta)$ sei ein semimetrischer Raum. Wir definieren die Äquivalenzrelation $\sim$ und die Metrik $\overline{\delta}$ auf dem Raum $\mathfrak{R}_{/\sim}$ der zugehörigen Äquivalenzklassen wie in Aufgabe 0.2. Zeigen Sie:

(a) $(\mathfrak{R}, \delta)$ vollständig $\iff$ $(\mathfrak{R}_{/\sim}, \overline{\delta})$ vollständig

(b) $\overline{\delta}$ induziert gerade die Quotiententopologie auf $\mathfrak{R}_{/\sim}$.

(4.4) $(\mathfrak{R}_n, \delta_n)$ seien semimetrische Räume $(n \in \mathbb{N})$ und $\mathfrak{R} := \prod_{n=1}^\infty \mathfrak{R}_n$. Für $x, y \in \mathfrak{R}$ sei

$$\delta(x,y) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{\delta_n(x_n, y_n)}{1 + \delta_n(x_n, y_n)} .$$

Zeigen Sie:

(a) δ ist eine Semimetrik auf $\mathfrak{R}$.

(b) δ ist genau dann eine Metrik, wenn alle δ_n Metriken sind.

(c) $\mathbb{O}(\delta)$ ist gerade die Produkttopologie $\mathbb{O}$ der $\mathbb{O}(\delta_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, diese ist also metrisierbar. [5]

(d) Ist hingegen I eine überabzählbare Menge, und hat man für jedes $i \in I$ einen metrischen Raum $(\mathfrak{R}_i, \delta_i)$ mit $\#\mathfrak{R}_i > 1$, dann ist der Produktraum $\prod_{i \in I} (\mathfrak{R}_i, \mathbb{O}(\delta_i))$ nicht metrisierbar. [6]

---

[1] Siehe (B5) auf Seite 25 der Vorlesung.
[2] Tip: Zu einer CF in ℓ_p mittels Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ komponentenweise eine Grenzwertfolge basteln.
[3] Tip: Abgeschl. Teilmenge in vollst. Raum ist vollst. Für $(c, \|\ \|_\infty)$ auch die Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ benutzen.
[4] Tip: Z. B. $\delta_1(x,y) := |x-y|$ und $\delta_2(x,y) := |1/x - 1/y|$ auf $[1, \infty[$ betrachten.
[5] Tip: $\mathbb{O}(\delta) \subset \mathbb{O}$ zeigen und Satz 5.6.b der Vorlesung benutzen.
[6] Tip: $x, y \in \mathfrak{R}$ mit $x_i \neq y_i$ für alle $i \in I$ nehmen, Menge A der $z \in \mathfrak{R}$ mit $z_i \in \{x_i, y_i\}$ und $\#\{i \in I : z_i = x_i\} < \infty$ betrachten. Zeigen, daß $x \in \overline{A}$ gilt, aber x durch keine Folge in A approximierbar ist.