Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Mario Kaip

11. Juni 2009

Funktionalanalysis
8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 Zeigen Sie, dass unendlich-dimensionale Banachräume immer eine überabzählbare Vektorraumbasis haben.

Hinweis: Indirekter Beweis und Satz von Baire. Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass endlich-dimensionale normierte Räume immer vollständig sind.

Aufgabe 8.2 Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie nun:

(i) Definiert man $S(f) := \{x \in [0,1] : f \text{ ist stetig in } x\}$ und für $n \in \mathbb{N}$ $O_n(f) := \{x \in [0,1] : \exists \delta > 0 \forall y, y' \in B(x,\delta) : |f(y) - f(y')| < \frac{1}{n}\}$, so gilt $S(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n(f)$.

(ii) $O_n(f)$ ist offen für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Es gibt keine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, welche in $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ stetig und in $[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ unstetig ist.

Hinweis: Verwenden Sie für (iii) den Satz von Baire.

Aufgabe 8.3 Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für $u \in L^p(\mathbb{R})$:

(i) Es gilt $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

(ii) Es existiert ein $v \in L^p(\mathbb{R})$ mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} (u(x+h) - u(x))\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von der majorisierten Konvergenz.

Abgabetermin: Donnerstag 19. Juni 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.