Serie 8

1. Betrachte eine überabzählbare Menge X und definiere

$$\mathcal{A} := \{\, A \subset X \mid A \text{ abzählbar oder } X \setminus A \text{ abzählbar} \,\}$$
$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar,} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \qquad f.a.\ A \in \mathcal{A}.$$

Zeige: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein Maßraum. *4 Pkte.*

2. **a)** Sei (A_n) eine Folge von Teilmengen von X. Definiere die Notation

$$\limsup A_n := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \right).$$

Zeige: Falls $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein gegebener Maßraum ist und (A_n) eine Teilmengenfolge in $\mathcal{A}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, so gilt $\mu(\limsup A_n) = 0$. *2 Pkte.*

b) Zeige, daß die σ-Algebra der Standard-Borel-Mengen in $\mathbb{R}^n$ sowohl von dem Teilmengensystem der offenen, der abgeschlossenen als auch der kompakten Teilmengen erzeugt wird. *2 Pkte.*

3. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X erzeugt von einem Teilmengensystem $\mathcal{E}$, d.h. $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$, für welches gilt: $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$, und es existieren $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$.

Zeige: Dann gilt: Je zwei Maße μ_1, μ_2 auf $\mathcal{A}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$ und $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ sind identisch auf $\mathcal{A}$. *4 Pkte.*

4. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra in X und $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ ein Prämaß. Sei μ^* das von μ erzeugte äußere Maß

$$\mu^*(A) := \inf \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \,\Big|\, (A_n) \subset \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big\}$$

auf $\mathcal{P}(X)$. Zeige:

a) $\mu^*_{|\mathcal{A}} = \mu$. *2 Pkte.*

b) Jedes $A \in \mathcal{A}$ ist μ^*-messbar. *2 Pkte.*

Rückgabe: In den Kasten am 08.12.