Übungsblatt 2

Aufgabe 5. Beweisen Sie folgende Bemerkung aus der Vorlesung:
Das Mengensystem der Elementarfiguren

$$\mathcal{A} := \{I \subset \mathbb{R}^n | I \text{ ist Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle}\}$$

ist eine Algebra. Wieso ist $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra?

Aufgabe 6. Es seien X und Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie

a) Wenn $\mathcal{B} \subset 2^Y$ eine σ-Algebra ist, dann ist auch

$$\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}\} \subset 2^X$$

eine σ-Algebra.

b) Wenn $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra ist, dann ist

$$\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{B}\} \subset 2^Y$$

eine σ-Algebra.

Begründen Sie ausserdem wieso $\{f(E) : E \in \mathcal{A}\}$ im Allgemeinen *keine* σ-Algebra ist.

Aufgabe 7. a) Seien X eine Menge, $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ ein Maß und $\Omega_1 \subset X$ eine μ-messbare Menge. Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen $\Omega_2 \subset X$ gilt

$$\mu(\Omega_1 \cup \Omega_2) + \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2).$$

b) Sei μ ein Maß auf X und $\Omega \subset X$ mit $\mu(\Omega) < \infty$. Weiter sei $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie von μ-messbaren Mengen $\Omega_k \subset \Omega$ mit $\mu(\Omega_k) \geq c_0 > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie : Die Menge

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k \geq l} \Omega_k \right)$$

ist μ-messbar mit $\mu(A) \geq c_0$.

Aufgabe 8. Sei X eine Menge und $\mathcal{F} \subset 2^X$ eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge von X. Dann ist die *von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra* definiert als die kleinste σ-Algebra in 2^X welche alle Mengen aus $\mathcal{F}$ enthält.

a) Sei $A \subset X$ eine gegebene Teilmenge einer Menge X. Bestimmen Sie die von $\{A\} \subset 2^X$ erzeugte σ-Algebra.

b) Sei X eine überabzählbare Menge und seien

$$\mathcal{S} := \{E \subset X : E \text{ oder } E^c \text{ ist (höchstens) abzählbar}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ die von den einpunktigen Teilmengen von X erzeugte σ-Algebra ist.