ÜA Lineare Algebra WS 04/05

5. Serie

1. Seien U, V, W Unterräume eines Vektorraumes. Zeigen Sie:
   (a) $W \subseteq U \Rightarrow U \cap (V + W) = (U \cap V) + W$
   (b) Im allgemeinen gilt $U \cap (V + W) \neq (U \cap V) + (U \cap W)$.

2. Bestimmen Sie für den Vektorraum $\mathbb{K}^3$ über dem Körper $\mathbb{K}$ mit 2 Elementen die Anzahl der Vektoren und die Anzahl der Unterräume. Stellen Sie in einem Schema dar, welcher Unterraum in welchem enthalten ist.

3. Sind folgende Mengen von Vektoren über $\mathbb{Q}$ linear abhängig?
   (a) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$
   (b) $\{(1, 2, -3, 1), (2, 0, 4, 1), (0, 0, 1, -3)\}$
   (c) $\{(2, 1, 2, 1), (1, -1, 0, 1), (5, 1, 4, 3)\}$

4. Seien x, y, z linear unabhängige Vektoren aus einem Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die folgende Menge M linear unabhängig?
$$M = \{x + \lambda y, \lambda x + z, y + \lambda z\}$$

5. Gegeben sei die Gleichung $x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0$ in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$ ist und geben Sie ein möglichst kleines Erzeugendensystem dieses Unterraumes an.

6. Seien $U_1 = \{p(x) \mid p(x) \in \mathbb{R}[x] \wedge p(x) = p(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$
und $U_2 = \{p(x) \mid p(x) \in \mathbb{R}[x] \wedge p(1) = p(-1)\}$ Teilmengen des Vektorraumes aller Polynome. Zeigen Sie, dass $U_1 \leq U_2 \leq \mathbb{R}[x]$ ist und geben Sie für U_1 und U_2 jeweils ein möglichst kleines Erzeugendensystem an.

Abgabetermin: 17.11.04 (vor der Vorlesung)