ÜA Lineare Algebra WS 04/05

8. Serie

1. Untersuchen Sie, ob es eine lineare Abbildungen $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gibt, für die

   $\alpha(1,2,3,4) = (-2,-1,1)$
   $\alpha(2,3,4,1) = (-1,1,2)$
   $\alpha(3,4,1,2) = (1,2,-2)$
   $\alpha(4,1,2,3) = (2,-2,-1)$

   gilt. Bestimmen Sie gegebenenfalls $\alpha(1,0,0,0)$ sowie eine Basis des Kerns $\mathrm{Ker}(\alpha)$ und des Bildes $\mathrm{Im}(\alpha)$.

2. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ mit einer Primzahl p. Gibt es eine lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ mit $\alpha((5,0,3)) = (1,0)$, $\alpha((3,-2,1)) = (0,1)$ und $\alpha((3,3,4)) = (1,1)$?

3. Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ und sei $f : V \to V$ die lineare Fortsetzung von

   $$f(b_1) = \alpha b_1 + b_3, f(b_2) = b_1 + \beta b_2, f(b_3) = b_2 + \gamma b_3.$$

   Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ dafür an, dass f ein Isomorphismus ist.

4. V sei der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\alpha_1 : p(x) \to p'(x)$ ein Endomorphismus ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $\alpha_2 : p(x) \to p(ax+b); a, b \in \mathbb{R}$
   ein Endomorphismus ist.

   (c) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(\alpha_1), \mathrm{Ker}(\alpha_2), \mathrm{Im}(\alpha_1)$ und $\mathrm{Im}(\alpha_2)$.

Abgabetermin: 08.12.04 (vor der Vorlesung)