# Gleichmäßige Konvergenz und Funktionenräume

Isabella Lukasewitz und Andreas Brack

07.06.2010

Vortrag zum Proseminar zur Analysis

Bereits in den Vorlesungen zur Analysis haben wir das Konzept der Konvergenz kennengelernt – sei es die von Folgen, mit der Erweiterung auf Reihen, sei es die von Funktionen. Diese Konvergenz auf $\mathbb{R}$ kann auf gleiche Art auch auf allgemeine metrische Räume ausgeweitet werden. Im Endeffekt stellt sich die entscheidende Frage, welche Eigenschaften der Folgenglieder auf die Grenzfunktion übertragen werden und welches Konzept von Konvergenz man hierbei betrachten muss. Dieser Fragestellung widmen wir uns im ersten Teil des Vortrags.

Konkreter werden die metrischen Räume im zweiten Abschnitt. Wir betrachten den Raum der beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$, $C_b(\mathbb{R})$, hinsichtlich der Supremumsmetrik und analysieren einige seiner Teilräume auf ihre topologischen Eigenschaften.

Zu guter Letzt schließt sich eine Einführung in die Reihenkonvergenz an, mit der Formulierung des Majorantenkriteriums für Reihen.

Übersichtlicher ist folgende Darstellung:

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Konvergenz von Funktionen

Ausgehend von der Vorstellung der Konvergenz einer Folge von Punkten lässt sich ein solches Konzept auch auf Folgen von Funktionen übertragen. Die eingängigste Vorstellung diesbezüglich ist wohl, zunächst nur einen beliebigen $x$-Wert des Definitionsbereiches zu betrachten und so die Konvergenz der Funktionenfolge an diesem Punkt als Konvergenz der Folge der Funktionswerte zu definieren. Angewandt auf jeden Punkt des Definitionsbereiches, führt dieser Gedanke uns zum Konzept der punktweisen Konvergenz.

## 1.1 Punktweise Konvergenz

### 1.1.1 Definition: Punktweise Konvergenz von Funktionen

Sei $M$ eine nichtleere Menge und $(K, d_k)$ ein metrischer Raum. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : M \to K$ heißt *punktweise konvergent* gegen die Grenzfunktion $f : M \to K$, wenn für jedes $x \in M$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

in $(K, d_k)$ gilt.

Zurückgeführt auf die Definition der Konvergenz einer Folge bedeutet das, dass zu jedem $x \in M$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$d_k(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

ist für alle $n \geq N$.

Schreibweise: $f_n \to f$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

**Bemerkung:** Beachten Sie, dass $n \to \infty$ gilt und nicht $x \to \infty$.

Diese Vorstellung einer punktweisen Konvergenz ist zwar unmittelbar einleuchtend, als Kriterium jedoch nicht immer stark genug. Deshalb benötigen wir bisweilen eine striktere Form der Konvergenz, die wir also auch gleich einführen.

## 1.2 Gleichmäßige Konvergenz

### 1.2.1 Definition: gleichmäßige Konvergenz von Funktionen

Sei $M$ eine nichtleere Menge und $(K, d_k)$ ein metrischer Raum. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : M \to K$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen die Grenzfunktion $f : M \to K$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$d_k(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ und alle $x \in M$ gilt.
Die Funktion $f$ ist die gleichmäßige Grenzfunktion der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Schreibweise $f_n \underset{\text{glm}}{\longrightarrow} f$ oder $\underset{n\to\infty}{\text{unif lim}} f_n = f$

Die Vorstellung in $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ hierzu ist sehr bildlich: Man stellt sich um die Grenzfunktion einen *Schlauch* vor, mit $\varepsilon$ als vertikalem Radius. Für jedes $\varepsilon > 0$ muss es ein $N$ geben, sodass für alle $n \geq N$ die Funktion $f_n$ *auf dem ganzen Definitionsbereich* innerhalb des Schlauches liegt. Der entscheidende Unterschied ist folglich, dass man hier ein $N$ ganz unabhängig von einem betrachteten $x$-Wert wählen muss. $N$ hängt also allein von $\varepsilon$ ab - den gleichen Gedanken haben wir bereits bei der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit kennengelernt.

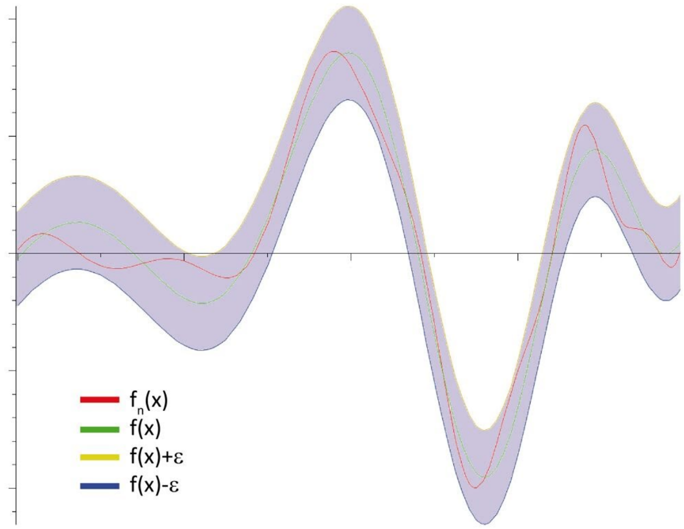


ABBILDUNG 1: Vorstellungsmöglichkeit des $\varepsilon$-Schlauches

### 1.2.2 Lemma: gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ punktweise Konvergenz

Sei $M$ eine nichtleere Menge und $(K, d_k)$ ein metrischer Raum. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : M \to K$ eine Folge von Funktionen, die nach Definition 1.2.1 gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : M \to K$ konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch punktweise nach Definition 1.1.1 gegen die Grenzfunktion $f : M \to K$.

**Beweis:** Gegeben sei eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : M \to K$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt, dass

$$d_k(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Das bedeutet, dass dieses $N$ auch geeignet ist, wenn wir die Konvergenz der Funktionenfolge an einem beliebigen Punkt $x \in M$ betrachten. Es folgt unmittelbar die Behauptung.

$\square$

Die Umkehrung dieses Lemmas gilt jedoch nicht! Dass die Anforderungen an die gleichmäßige Konvergenz stärker sind als die an die punktweisen Konvergenz, lässt sich besonders gut an folgendem Beispiel erkennen.

### 1.2.3 Beispiel

Es handelt sich hierbei um ein Beispiel aus dem metrischen Raum $(0,1)$ mit der Betragsmetrik in den metrischen Raum $\mathbb{R}$ ebenfalls mit der Betragmetrik. Sei also $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Da die Funktionen nur auf dem offenen Intervall $(0,1)$ definiert sind, folgt (z.B. nach dem Skript der Analysis Teil 1, Kapitel II.1.11.a) leicht, dass für alle $x \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

gelten muss. Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach 1.1.1 punktweise gegen die *Nullfunktion*. Die gleichmäßige Konvergenz ist jedoch nicht gegeben: Sei $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Für den Punkt $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $0 < x_n < 1$) ist jedoch für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x_n) - 0| = |(\sqrt[n]{\frac{1}{2}})^n - 0| = \frac{1}{2} > \frac{1}{10} = \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in (0,1)$ gibt, sodass $f_n(x)$ außerhalb des *$\varepsilon$-Schlauches* liegt. Somit konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Als nächstes kann man sich fragen, welche Eigenschaften von Funktionen bei gleichmäßiger Konvergenz übertragen werden. Eine wichtige Aussage hierzu betrifft die Stetigkeit der Folgenglieder.

### 1.2.4 Satz: Stetigkeit der Grenzfunktion

Seien $(M, d_m)$, $(K, d_k)$ metrische Räume und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : M \to K$ eine Folge von Funktionen. Es gelte $f_n \underset{\text{glm}}{\longrightarrow} f$. Sind außerdem die Funktionen $f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig in einem Punkt $x_0 \in M$, so ist auch $f$ stetig im Punkt $x_0$.

**Beweis:** Seien $\varepsilon > 0$, $x_0 \in M$ und $f_n : M \to K$ stetig in $x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $f_n \underset{\text{glm}}{\longrightarrow} f$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ und alle $x \in M$

$$d_k(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Da $f_N$ stetig ist in $x_0$, existiert ein $\delta > 0$, so dass aus $d_m(x,\, x_0) < \delta$ folgt, dass

$$d_k(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für $d_m(x, x_0) < \delta$ gilt mit der Dreiecksungleichung:

$$d_k(f(x), f(x_0)) \leq d_k(f(x), f_N(x)) + d_k(f_N(x), f_N(x_0)) + d_k(f_N(x_0), f(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Also ist auch $f$ stetig in $x_0$. □

**Bemerkung:** Die gleichmäßige Konvergenz ist unbedingt notwendig, punktweise Konvergenz reicht nicht aus. Dies ist aus folgendem Beispiel ersichtlich.

### 1.2.5 Beispiel

Wie auch im Beispiel 1.2.3 bildet diese Funktion aus dem Intervall $[0,1]$ in die reellen Zahlen ab. Beide Räume haben als Metrik den Betrag.

Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist jede Funktion $f_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ stetig auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ und die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Diese ist aber offensichtlich nicht stetig auf ganz $[0,1]$.

In diesem Beispiel liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor und man sieht, dass $f$ nicht notwenigerweise stetig ist, obwohl alle $f_n$ (auf ihrem gesamten Definitionsbereich) stetig sind.

Nun könnte man sich fragen, ob vielleicht die Umkehrung gilt: Wenn sowohl alle Folgenglieder, als auch die Grenzfunktion stetig sind, folgt dann aus punktweiser Konvergenz die gleichmäßige Konvergenz? Nein, wie man an $f_n = x^n$ auf dem Intervall $(0,1)$ erkennen kann (1.2.3).

Eine letzte Frage: Ist diese Behauptung richtig, wenn die Funktion auf einem Kompaktum $[a,b]$ definiert ist? Die Antwort ist immer noch nein. Illustriert wird diese Feststellung anhand des folgenden Beispiels.

### 1.2.6 Beispiel: Growing Steeple

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{für } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

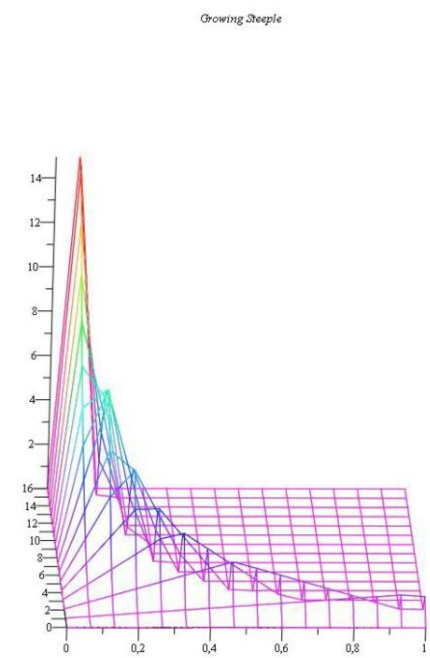


Abbildung 2: Die ersten 16 Funktionen dieser Folge

Offensichtlich konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion:

Für $x = 0$ ist die Behauptung klar, da $n^2 \cdot 0 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Für $x \neq 0$ existiert nach dem Satz des Archimedes (Analysis-Skript, Kapitel I (2.22)) ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{2}{x} \leq N$. Dann gilt nach Definition der Funktion, dass $f_n(x) = 0$ ist für alle $n \geq N$ und somit für jedes beliebige $\varepsilon > 0$

$$|f_n(x) - 0| = 0 < \varepsilon \quad \text{für alle } \ n \geq N.$$

Damit wäre also die punktweise Konvergenz bewiesen. Aber konvergiert die Funktion denn auch gleichmäßig?

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und betrachte den Punkt $x_n = \frac{1}{n}$. Dann gilt

$$f_n(x_n) = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n > \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also liegt sogar keine einzige Funktion der Folge vollständig innerhalb dem $\varepsilon$-Schlauch. Folglich ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergent.

Dies ist also ein Beispiel dafür, dass eine auf einem Kompaktum definierte, stetige und punktweise konvergente Funktionenfolge trotzdem nicht gleichmäßig konvergiert. Die Folge der Funktionen war jedoch nicht beschränkt. Was aber, wenn die Folge doch gleichmäßig beschränkt ist, auf einem Kompaktum definiert, gleichmäßig stetig und punktweise konvergent - folgt dann die gleichmäßige Konvergenz?

Nein, auch dann nicht - als Beispiel nehme man die oben verwendete Funktion und multipliziere sie mit $\frac{1}{n}$.

Man erhält für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2 - nx & \text{für } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{für } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $f_n(\frac{1}{n}) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei die Funktion hier ihr Maximum annimmt. Daraus folgen unmittelbar zwei Erkenntnisse: Die Funktionen der

Folge sind positiv und durch 1 nach oben beschränkt - und die Folge ist trotzdem nicht gleichmäßig konvergent, da für jedes $0 < \varepsilon < 1$ keine Funktion vollständig in der $\varepsilon$-Umgebung liegt.

Auch die Beschränktheit garantiert also keine gleichmäßige Konvergenz.

# 2 Funktionenräume

Die eben dargelegten Konzepte der Konvergenz haben wir auf allgemeinen metrischen Räumen betrachtet. Nun werden wir etwas konkreter: Wir nutzen die obigen Begrifflichkeiten und Erkenntnisse dazu, verschiedene Funktionenräume, also Teilräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, auf ihre Eigenschaften zu untersuchen. Die Metrik, hinsichtlich derer wir diese Räume betrachten, nennen wir Supremumsmetrik.

## 2.1 Definition: $C_b(D)$ - Beschränkte Funktionen

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Dann bezeichnet $C_b(D, \mathbb{R})$ die Menge aller *beschränkten* Funktionen von $D \to \mathbb{R}$.

Speziell definieren wir:

$$C_b := C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ und } C_b(D) := C_b(D, \mathbb{R}).$$

### 2.1.1 Definition: Supremumsnorm

Sei $f \in C_b$. Wir definieren die *Supremumsnorm* auf $C_b$ als:

$$\| f \| := \sup\{|f(x)| : x \in D\}$$

Schreibweise: $\| f \| = \sup |f(x)|$, $\| f \|_{\sup}$ oder $\| f \|_\infty$.

Bemerkung: Die Supremumsnorm erfüllt die folgende Axiome, die für Normen gelten (vlg. Analysis-Skript, Kapitel VIII (1.1)):

$\| f \| \geq 0$ und $\| f \| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$.

$\| cf \| = |c| \cdot \| f \|$

$\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$.

### 2.1.2 Lemma: Norm $\rightarrow$ Metrik

Seien $(M, d_m), (K, d_k)$ metrische Räume und sei $M_1 = M \times K$. Ist $\| \cdot \|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ und der Abstandsvektor auf $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $d_{pq} = (d_m(p_1, q_1), d_k(p_2, q_2))$ für $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2) \in M_1$. Dann ist eine Metrik auf $M_1$ definiert durch $d(p, q) = \| d_{pq} \|$.

**Beweis:** Wir müssen also die Eigenschaften der Metrik nachrechnen.

1. Positiv Definitheit:

   Für $p, q \in M_1$ gilt, da wir eine Norm haben,

   $$d(p, q) = \| d_{pq} \| \geq 0.$$

   Weiter gilt mit den Normeigenschaften

   $$\begin{aligned} d(p,q) = \| d_{pq} \| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad d_{pq} = (d_m(p_1, q_1), d_k(p_2, q_2)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad d_m(p_1, q_1) = 0 \text{ und } d_k(p_2, q_2) = 0 \\ &\overset{\text{Metrik-Eigenschaften}}{\Leftrightarrow} \quad p_1 = q_1 \text{ und } p_2 = q_2 \\ &\Leftrightarrow \quad (p_1, p_2) = (q_1, q_2) \\ &\Leftrightarrow \quad p = q. \end{aligned}$$

2. Symmetrie:

   Für $p, q \in M_1$ ist zu zeigen

$$d(p,q) = \| d_{pq} \| = \| d_{qp} \| = d(q,p).$$

$$d(p,q) = \| d_{pq} \| \overset{\text{Metrik}}{=} \| (d_m(p_1,q_1), d_k(p_2,q_2)) \| = \| (d_m(q_1,p_1), d_k(q_2,p_2)) \|$$

$$= \| d_{qp} \| = d(q,p).$$

3. Dreiecksungleichung:

   Für $p, q, n \in M$ gilt mit

$$d(p,n) = \| d_{pn} \| \leq \| d_{pq} + d_{qn} \| \overset{\triangle - Ugl. der Norm}{\leq} \| d_{pq} \| + \| d_{qn} \| = d(p,q) + d(q,n).$$

□

Die korrespondierende Metrik zur Norm aus 2.1.1 ist die folgende:

### 2.1.3 Definition: Supremumsmetrik

Seien $f, g \in C_b$. Wir definieren die *Supremumsmetrik* auf $C_b$ als

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in D\}.$$

Mit Hilfe der Supremumsmetrik lässt sich die Definition der gleichmäßigen Konvergenz so umformen.

### 2.1.4 Satz: Konvergenz der Metrik

Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf $D$ gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0.$$

**Beweis:** $' \Longrightarrow '$

Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f$, so gilt nach Definition 1.2.1, dass für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ und $x \in D$. Also ist auch

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \ : \ x \in D\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N.$$

Somit gilt mit Definition 2.1.3:

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0.$$

$' \Longleftarrow '$

Es gelte $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\sup\{|f_n(x) - f(x)| \ : \ x \in D\} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Dann gilt für alle $x \in D$ ebenfalls $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Somit konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f$. $\square$

**Bemerkung:** Damit ist die Konvergenz auf $C_b$ bezüglich der Supremumsmetrik äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz.

### 2.1.5 Satz: Vollständigkeit von $C_b$

$C_b$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

**Beweis:** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C_b$ mit $f_n : D \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$. Damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sodass für $n, m > N$ gilt, dass $\| f_n - f_m \| < \varepsilon$. Dann bilden auch die Werte $f_n(x_0)$ für jedes $x_0 \in D$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, da für $n, m \geq N$ gilt:

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| \ : x \in D\} = d(f_n, f_m) < \varepsilon$$

Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert daher für alle $x \in D$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Diesen Grenzwert definieren wir als $f(x)$. Offensichtlich konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $f$. Man kann sogar die gleichmäßige Konvergenz zeigen: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N_1$ gilt:

$$d(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit der soeben gezeigten punktweisen Konvergenz folgt ferner, dass für jedes $x \in D$ ein $N_2 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für $m = m(x) \geq N_2$ gilt:

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ und $x \in D$ gilt dann

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{m(x)}(x)| + |f_{m(x)}(x) - f(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f$. Da $f_N$ beschränkt ist und für alle $x \in D$ gilt, dass $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$ ist, ist auch die Grenzfunktion $f$ beschränkt und liegt somit in $C_b$. Da, wie bereits in 2.1.4 gezeigt, gleichmäßige Konvergenz äquivalent ist zu Konvergenz bezüglich der Supremumsmetrik, konvergiert also zusammenfassend eine Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Grenzfunktion innerhalb des metrischen Raumes $C_b$ (vgl. Definition der Vollständigkeit, Vortrag 4, (1.3)). $\square$

**Bemerkung:** Man beachte, dass der vorhergehende Beweis der gleichmäßigen Konvergenz hergeleitet ist aus nicht gleichmäßigen Eigenschaften - die punktweise Konvergenz wird verwendet und $m$ wird dementsprechend in Abhängigkeit von $x$ gewählt. Der Grund, warum sich keine Probleme daraus ergeben, findet sich in der Tatsache, dass für alle $x \in D$ dieses $m(x)$ existiert, sodass $\varepsilon \geq \max\{|f_n(x) - f_{m(x)}(x)|, |f_{m(x)}(x) - f(x)|\}$.

## 2.2 Definition: $C^0(D)$ - Stetige Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ohne isolierte Punkte. $C^0(D, \mathbb{R})$ bezeichnet die Menge der stetigen Funktionen $D \to \mathbb{R}$.

Speziell definieren wir:

$$C^0 := C^0([a,b], \mathbb{R}).$$

### 2.2.1 Korollar: Abgeschlossenheit von $C^0$ in $C_b$

$C^0$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $C_b$. $C^0$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

**Beweis:** Es gilt $C^0 \subset C_b$, da eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt ist. Somit liegt jedes $f \in C^0$ auch in $C_b$.

Ferner besagt Satz 1.2.4, dass der gleichmäßige Grenzwert einer Folge von Funktionen in $C^0$ stetig ist und somit auch selbst in $C^0$ liegt. Da gleichmäßige Konvergenz nach 2.1.4 gleichbedeutend ist mit Konvergenz bezüglich der Supremumsmetrik, ist daher $C^0$ abgeschlossen in $C_b$. Als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes ist $C^0$ somit selbst ein vollständiger Raum (vgl. Vortrag 4, (1.7)). □

Ein weiterer Teilraum von $C_b(\mathbb{R})$, dessen Eigenschaften wir betrachten werden, nennt sich $C_C(\mathbb{R})$, der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Der Träger einer Funktion $f$ ist der Abschluss der Menge derjeniger Elemente des Definitionsbereichs, an denen die Funktionswerte von $f$ nicht 0 werden.

## 2.3 Definition: $C_C(\mathbb{R})$ - Funktionen mit kompaktem Träger

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennt man

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

den Träger von $f$.

Das führt uns zu folgender Definition von $C_C(\mathbb{R})$:

$f \in C_C(\mathbb{R})$ genau dann, wenn $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $\operatorname{supp}(f) \subset \mathbb{R}$ kompakt.

**Bemerkung:** Das heißt, dass ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert, so dass

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \notin [a, b].$$

### 2.3.1 Beispiel einer Funktion aus $C_C(\mathbb{R})$

Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > 1, \\ 1 - |x| & \text{sonst.} \end{cases}$$

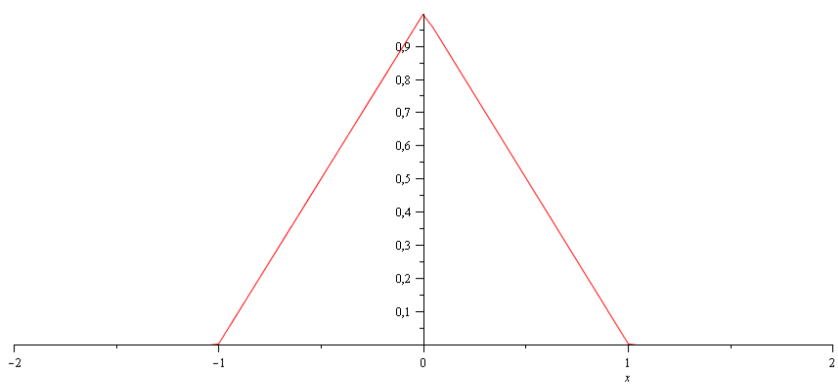


Abbildung 3: Veranschaulichung dieser Funktion

$f$ ist offensichtlich stetig und auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ ist $f(x) \neq 0$. Der Abschluss dieses Intervalls ist $[-1, 1]$ und somit kompakt. Also besitzt die Funktion einen kompakten Träger.

Nun wollen wir noch einen letzten Funktionenraum definieren.

## 2.4 Definition: $C_0(\mathbb{R})$ - "Funktionen, die bei unendlich verschwinden"

Es ist genau dann $f \in C_0(\mathbb{R})$, wenn gilt:

$$f \in C^0(\mathbb{R})$$

und für alle $\varepsilon > 0$ ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ gilt:

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Anschaulich gesprochen bedeutet das, dass $f(x)$ beliebig klein wird für $x \to \pm\infty$.

Man kann sich schnell folgende Inklusionen verdeutlichen.

### 2.4.1 Lemma: Inklusionen

Es gilt:

$$C_C(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}).$$

Es gilt aber

$$C_0(\mathbb{R}) \underset{\neq}{\subsetneq} C_b(\mathbb{R}).$$

Außerdem sind die Elemente von $C_0(\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig.

**Beweis:** Zu '$C_C(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})$':

Sei $f \in C_C(\mathbb{R})$. Dann existiert ein Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sodass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$. Insbesondere ist $f(x)$ außerhalb des kompaktem Intervalls also kleiner als jedes beliebige $\varepsilon > 0$. Somit liegt $f$ auch in $C_0$.

Zu '$C_0(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$':

Sei nun $f \in C_0(\mathbb{R})$. Nach Definition 2.4 ist $f \in C^0(\mathbb{R})$ und es existiert ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$, sodass $|f(x)| < \varepsilon$ für jedes beliebige $\varepsilon$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$. Da $[a,b]$ kompakt ist, ist f auch auf $[a,b]$ beschränkt. Insgesamt folgt also, dass $f \in C_b$.

Die Gleichheit gilt jedoch nicht: Wähle nämlich $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-x^2} + 1$. Offensichtlich gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ $1 < f(x) \leq 2$. Damit ist $f$ beschränkt auf $\mathbb{R}$ und folglich ein Element von $C_b(\mathbb{R})$. $f$ liegt aber nicht in $C_0(\mathbb{R})$, da man $\varepsilon = \frac{1}{2}$ wählen kann, aber für alle $x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{2} < 1 < f(x)$ ist.

Außerdem sind die Elemente von $C_0(\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig, da: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $z > 0$ mit $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq z$. Somit ist $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ für alle $x_1, x_2 \in (-\infty, -z) \cup (z, \infty)$. $f$ ist auf $[-z, z]$ gleichmäßig stetig, folglich gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ für alle $x_1, x_2 \in [-z, z]$ mit $|x_1 - x_2| < \delta_1$. Außerdem gibt es (vgl. Analysis-Skript, Kapitel IV.(2.7)) $\delta_2, \delta_3 > 0$ sodass $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ für alle $x_1, x_2 \in U_{\delta_2}(-z)$ und für alle $x_1, x_2 \in U_{\delta_3}(z)$. Sei nun $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Dann gibt es diese 4 Fälle:

1. $x_1, x_2 \in [-z, z]$
2. $x_1, x_2 \in (-\infty, -z) \cup (z, \infty)$
3. $x_1, x_2 \in U_{\delta_2}(-z)$
4. $x_1, x_2 \in U_{\delta_3}(z)$

Die letzten beiden Fälle decken den Fall ab, dass $x_1 \in [-z, z]$ und $x_2 \in (-\infty, -z) \cup (z, \infty)$ (bzw. $x_1$ und $x_2$ vertauscht). Ist $x_1 \in [-z, z]$ und $x_2 \in (-\infty, -z)$ so ist $x_2 < -z < x_1$ und damit $|x_1 - (-z)| < |x_1 - x_2| < \delta \leq \delta_2$ und $|x_2 - (-z)| < |x_1 - x_2| < \delta \leq \delta_2$. Ist $x_1 \in [-z, z]$ und $x_2 \in (\infty, z)$ so ist $x_1 < -z < x_2$ und damit $|x_1 - (-z)| < |x_1 - x_2| < \delta \leq \delta_3$ und $|x_2 - (-z)| < |x_1 - x_2| < \delta \leq \delta_3$. In jedem der vier Fälle folgt $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Damit ist $f$ gleichmäßig stetig. $\square$

Mithilfe dieser Erkenntnisse lässt sich auch folgender Satz beweisen.

**2.4.2 Satz:** $\overline{C_C(\mathbb{R})} = C_0$

Sei $\overline{C_C(\mathbb{R})} \subset C_b(\mathbb{R})$ der *Abschluss* bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

Dann gilt: $\overline{C_C(\mathbb{R})} = C_0(\mathbb{R})$. Insbesondere ist $C_0(\mathbb{R})$ *abgeschlossen.*

**Beweis:** Zu '$\overline{C_C(\mathbb{R})} \subset C_0(\mathbb{R})$':

Vorgehensweise: Wir zeigen, dass der Limes einer beliebigen Folge von Funktionen aus $C_C(\mathbb{R})$ in $C_0(\mathbb{R})$ liegt. Da $C_C(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})$, folgt damit sofort, dass $\overline{C_C(\mathbb{R})} \subset C_0(\mathbb{R})$.

Sei also $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \to f$, $f_n \in C_C(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da wir den Abschluss bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ betrachten, konvergiert auch die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Nach 2.1.4 ist dies äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz. Es existiert also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, sodass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Zu $f_{N(\varepsilon)}$ existiert nach Definition von $C_C(\mathbb{R})$ ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, sodass $f_{N(\varepsilon)}(x) = 0$ für alle $x \notin [a, b]$. Speziell gilt für diese $x$:

$$|f(x)| = |0 - f(x)| = |f_{N(\varepsilon)}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

nach Wahl von $N$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$, so dass für $x \notin [a,b]$ stets $|f(x)| < \varepsilon$. Somit ist $f$ in $C_0(\mathbb{R})$.

Zu '$C_0(\mathbb{R}) \subset \overline{C_C(\mathbb{R})}$:'

Vorgehensweise: Wir wählen eine beliebige Funktion aus $C_0(\mathbb{R})$ und konstruieren eine Folge von Funktionen aus $C_C(\mathbb{R})$, die dagegen konvergiert. Da also jede Funktion aus $C_0(\mathbb{R})$ Grenzwert einer Folge aus $C_C(\mathbb{R})$ ist, liegt sie im Abschluss von $C_C(\mathbb{R})$ und es folgt die Behauptung.

Sei demnach $f \in C_0(\mathbb{R})$. Wir definieren $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq n+1, \\ 1 & \text{für } |x| \leq n, \\ n+1-|x| & \text{für } n < |x| < n+1. \end{cases}$$

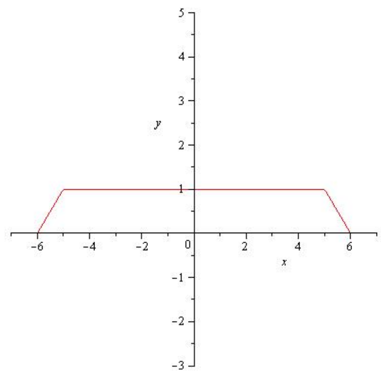


ABBILDUNG 4: Zeichnung der Funktion $\varphi_5$ als Beispiel

Damit gilt für $n \in \mathbb{N}$:

1. $\varphi_n \in C_C(\mathbb{R})$

   Beweis: Da in $\mathbb{R}$ der Abschluss eines offenen Intervalls das geschlossene Intervall ist, gilt: $\overline{(-n-1, n+1)} = [-n-1, n+1]$. Dies ist offensichtlich ein Kompaktum. Da außerdem $\varphi_n(x) \neq 0$ für alle $x \in (-n-1, n+1)$ und $\varphi_n(x) = 0$ für alle $x \notin (-n-1, n+1)$, hat $\varphi_n$ einen kompakten Träger und ist somit Element von $C_C(\mathbb{R})$.

2. $\varphi_n \cdot f \in C_C(\mathbb{R})$

   Beweis: Nach Voraussetzung ist $f \in C_0(\mathbb{R})$. Als Multiplikation von zwei stetigen Funktionen ist $\varphi_n \cdot f$ wieder eine stetige Funktion. Da die Multiplikation von Funktionen komponentenweise definiert ist, gilt für alle $x \notin (-n-1, n+1)$: $\varphi_n(x) \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$. Der Träger von $\varphi_n \cdot f$ ist also eine Teilmenge des kompakten Intervalls $[-n-1, n+1]$. Damit ist $\varphi_n \cdot f \in C_C(\mathbb{R})$.

3. $\varphi_n \cdot f \to f$ bezüglich $\| \cdot \|_\infty$

   Beweis: Es ist also nach 2.1.4 zu zeigen, dass $(\varphi_n \cdot f)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Da $f \in C_0(\mathbb{R})$ ist, existiert ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, sodass für alle $x \notin [a, b]$ gilt, dass $|f(x)| < \varepsilon$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, mit $N \geq \max\{|a|, |b|\}$ und sei im Folgenden $n \geq N$. Dann ist für alle $x \in [-N, N]$:

$$|f(x) - \varphi_n(x) \cdot f(x)| = |f(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon,$$

   da $\varphi_n(x) = 1$. Für alle $x \notin [-N, N]$ gilt $1 \geq \varphi_n(x) \geq 0$. Damit gilt

$$|\varphi_n(x) \cdot f(x) - f(x)| = |f(x) - \varphi_n(x) \cdot f(x)| = |f(x) \cdot \underbrace{(1 - \varphi_n(x))}_{1 \geq |1-\varphi_n(x)| \geq 0}| \leq |f(x)| < \varepsilon$$

   für alle $n \geq N$. Insgesamt folgt also für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \geq N$, dass $|\varphi_n(x) \cdot f(x) - f(x)| < \varepsilon$. Somit gilt $\varphi_n \cdot f \underset{\text{glm}}{\longrightarrow} f$.

Damit ist gezeigt, dass es zu jeder beliebigen Funktion $f$ aus $C_0(\mathbb{R})$ eine Funktionenfolge in $C_C(\mathbb{R})$ gibt, die gegen $f$ konvergiert. Also folgt die Behauptung.

Insgesamt folgt also die Gleichheit der Mengen. Insbesondere ist $C_0(\mathbb{R})$ abgeschlossen, da $\overline{C_C(\mathbb{R})}$ abgeschlossen ist. $\square$

Nun können wir Aussagen über die Räume $C_C(\mathbb{R})$ und $C_0(\mathbb{R})$ machen.

### 2.4.3 Korollar: Unvollständigkeit von $C_C(\mathbb{R})$ und Vollständigkeit von $C_0(\mathbb{R})$

1. $(C_C(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist *nicht* vollständig.

2. $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.

**Beweis:**

1. Betrachte $f$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im Beweis zu 2.4.2. Wähle $f(x) := e^{-x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f \in C_0(\mathbb{R})$, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Nach obigem Beweis ist $(\varphi_n \cdot f)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_C(\mathbb{R})$ und konvergiert gegen $f$. Jedoch liegt $e^{-x^2}$ nicht $C_C(\mathbb{R})$, da $f(x) = e^{-x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der Träger von $f$ somit nicht kompakt ist. Also ist $(C_C(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nicht vollständig.

2. Nach Lemma 2.4.1 ist $C_0(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$. Nach Satz 2.1.5 ist $C_b(\mathbb{R})$ vollständig. Mit 2.4.2 gilt, dass $C_0(\mathbb{R})$ abgeschlossen ist. Als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes $C_b(\mathbb{R})$ ist $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig (vgl. Vortrag 4, (1.7)). $\square$

# 3 Konvergenz von Reihen

Genauso naheliegend, wie es ist, die Konvergenz einer Folge von Funktionen zu betrachten, ist es auch, sich mit der Konvergenz einer Reihe von Funktionen zu beschäftigen, $\sum f_k$. Sie stellt eine Folge der Partialsummen dar. Die n-te Partialsumme wird also geschrieben als

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

Offensichtlich ist sie eine Funktion. Wenn nun eine Folge dieser Funktionen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Grenzfunktion $F$ konvergiert, ist die Reihe konvergent, und wir schreiben:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Wenn die Folge der Partialsummen gleichmäßig konvergiert, gilt gleiches für die Reihe. Wenn die Folge der Beträge $\sum |f_k(x)|$ konvergiert, so nennt man die Reihe $\sum f_k$ absolut konvergent.

## 3.1 Weierstrassches Majorantenkriterium

Sei $\sum M_k$ eine konvergente Reihe und erfülle $f_k \in C_b \parallel f_k \parallel \leq M_k$ für alle $k$, dann konvergiert $\sum f_k$ gleichmäßig und absolut.

**Beweis:** Wenn $n > m$ ist, dann gilt für die Reihe der Absolutbeträge mit der Dreiecksungleichung:

$$d(F_n, F_m) \leq d(F_n, F_{n-1}) + \ldots + d(F_{m+1}, F_m)$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} \parallel f_k \parallel \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k.$$

Da die Folge der Partialsummen konvergiert, folgt nach Cauchy, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|\sum_{k=m+1}^{n} M_k| < \varepsilon$ für $n > m > N$. Also ist $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C_b$ und konvergiert gleichmäßig nach Satz 2.1.4.

# A Anhang

## Literaturverzeichnis

Pugh, Charles Chapman: Real Mathematical Analysis. Springer (2002)

Forster, Otto: Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. Vieweg+Teubner (2008)

Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis. Teil 1. Vieweg+Teubner (2009)

**Bemerkung:** Alle Abbildungen wurden selbst erstellt.