LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK — Aachen, den 02. Juli 2003

Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

6. Übung zur Algebraischen Zahlentheorie

Abgabe: Montag, 14.07.2003, 12.00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte): (Eindeutige Faktorisierung)
Es sei K ein algebraischer Zahlkörper. Ist $\mathcal{O}_K$ ein Hauptidealring, so ist in $\mathcal{O}_K$ bekanntlich die Zerlegung in irreduzible Elemente eindeutig. Wir wollen nun die Umkehrung zeigen:
Es sei angenommen, dass in $\mathcal{O}_K$ die Zerlegung in irreduzible Elemente eindeutig ist.

a) Zeige, dass jedes irreduzible $r \in \mathcal{O}_K$ Primelement und das davon erzeugte Ideal (r) ein Primideal in $\mathcal{O}_K$ ist.

b) Es sei $\mathcal{P}$ ein Primideal in $\mathcal{O}_K$. Dann gibt es ein $N \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}$. Zeige, dass es einen irreduziblen Teiler $r|N$ gibt für den $\mathcal{P} = (r)$ gilt.

c) Zeige, dass jedes Ideal in $\mathcal{O}_K$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ quadratfrei. Man berechne die Differente von $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{n})$.

Aufgabe 3 (10 Punkte): (Faktorisierung von Primidealen)
Es sei $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ein algebraischer Zahlkörper. Weiterhin gelte, dass $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ ist. Wir bezeichnen den Körper mit p Elementen mit $\mathbb{F}_p$ und die Reduktion modulo p mit $\bar{\cdot}$. Dann gilt:
Es sei $m \in \mathbb{Z}[t]$ das Minimalpolynom von θ. Die Faktorisierung von $\overline{m}$ über $\mathbb{F}_p[t]$ sei

$$\overline{m} = \overline{m_1}^{e_1} \cdot \overline{m_2}^{e_2} \cdot \ldots \cdot \overline{m_r}^{e_r}$$

mit $m_i \in \mathbb{Z}[t]$. Setzt man

$$\mathcal{P}_i := (p)_{\mathbb{Z}[\theta]} + (m_i(\theta))_{\mathbb{Z}[\theta]},$$

so ist

$$(p)_{\mathbb{Z}[\theta]} = \mathcal{P}_1^{e_1} \cdot \mathcal{P}_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot \mathcal{P}_r^{e_r}$$

die Zerlegung von $(p)_{\mathbb{Z}[\theta]}$ in Primideale. Der Index bei Idealen bedeutet dabei den Grundring.

Als Anwendung von Aufgabe 3 zeige man

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $f(x) := x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Zeigen Sie, dass $(23, \alpha - 10)$ und $(23, \alpha - 3)$ Primideale in $\mathbb{Z}[\alpha]$ sind und es gilt:

$$(23) = (23, \alpha - 10)^2 \cdot (23, \alpha - 3) \trianglelefteq \mathbb{Z}[\alpha].$$

Hinweis: Man darf die Irreduzibilität von f über $\mathbb{Q}$ voraussetzen.