

Kosinussatz

Sind zwei Seiten gegeben und der Winkel, der von beiden Seiten eingeschlossen ist, so kann der Kosinussatz verwendet werden. Er kann aber auch verwendet werden, wenn drei Seiten bekannt sind und ein Winkel bestimmt werden soll.

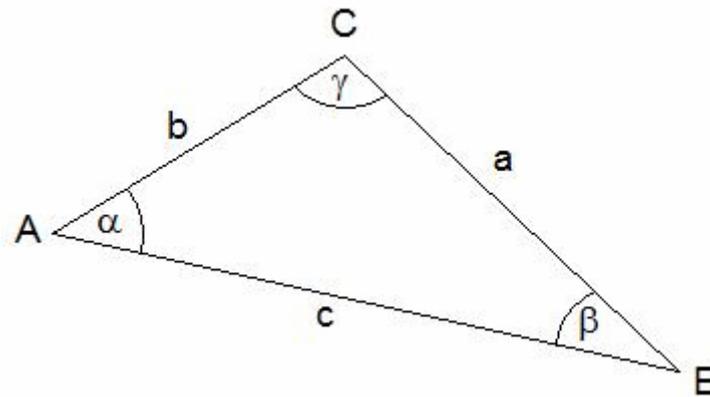
Es gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Wenn beispielsweise $\gamma = 90^\circ$ wäre, dann würde sich bei der unteren Formel der Satz von Pythagoras ergeben, da $\cos(90^\circ) = 0$ ist.



Beispiele:

Gegeben ist $b = 4\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$ und $\alpha = 60^\circ$, gesucht wird a .

$$a^2 = (4\text{cm})^2 + (6\text{cm})^2 - 2 \cdot 4\text{cm} \cdot 6\text{cm} \cdot \cos(60^\circ)$$

$$a^2 = 52\text{cm}^2 - 48\text{cm}^2 \cdot \cos(60^\circ)$$

$$a^2 = 28\text{cm}^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$a \approx 5,29\text{cm}$$

Gegeben ist $a = 5\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$ und $c = 7\text{cm}$, gesucht wird α .

$$(5\text{cm})^2 = (3\text{cm})^2 + (7\text{cm})^2 - 2 \cdot 3\text{cm} \cdot 7\text{cm} \cdot \cos(\alpha)$$

$$25\text{cm}^2 = 9\text{cm}^2 + 49\text{cm}^2 - 42\text{cm}^2 \cdot \cos(\alpha)$$

$$25\text{cm}^2 = 58\text{cm}^2 - 42\text{cm}^2 \cdot \cos(\alpha) \quad | -58\text{cm}^2$$

$$-33\text{cm}^2 = -42\text{cm}^2 \cdot \cos(\alpha) \quad | :(-42\text{cm}^2)$$

$$0,78571429 = \cos(\alpha) \quad | \cos^{-1}$$

$$\alpha \approx 38,21^\circ$$

Wir leiten nun noch die Formel zur Berechnung von α her:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \quad | -b^2 - c^2$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \quad | :(-2 \cdot b \cdot c)$$

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c} = \cos(\alpha)$$

Bzw. nach Erweiterung des Bruches mit (-1):

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

Aufgaben:

1)

a) $a = 7\text{m}; b = 9\text{m}; \gamma = 70^\circ; c = ?$

b) $b = 2\text{cm}; c = 4\text{cm}; \alpha = 50^\circ; a = ?$

c) $a = 6\text{dm}; c = 5\text{dm}; \beta = 120^\circ; b = ?$

d) $a = 8\text{m}; b = 9\text{m}; c = 7\text{m}; \gamma = ?$

2) Ort A ist von Ort C 5km und von Ort B 7km entfernt. Von A aus sieht man die Orte B und C unter einem Winkel von 60° . Wie weit sind die Ort B und C voneinander entfernt?

Lösungen:

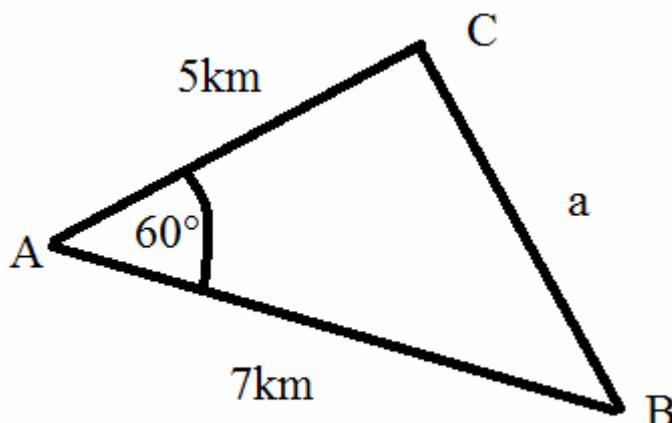
a) $c \approx 9,32\text{m}$

b) $a \approx 3,12\text{cm}$

c) $c \approx 9,54\text{dm}$

d) $\gamma \approx 48,19^\circ$

2) Wir machen zunächst eine Skizze:



Wie zu sehen ist, ist dies genau ein Fall für den Kosinussatz, denn wir kennen den Winkel und die Länge der Seiten, die an diesem Winkel anliegen. Nun bezeichnen wir die Entfernung von B nach C mit a:

$$a^2 = (5\text{km})^2 + (7\text{km})^2 - 2 \cdot 5\text{km} \cdot 7\text{km} \cdot \cos(60^\circ)$$

Dies ergibt $a \approx 6,24\text{km}$, womit die Orte B und C ca. $6,24\text{km}$ entfernt.