Prof. Dr. A. Kerber Wintersemester 2003/04

Algebra I

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) Zeigen Sie: $\varphi : \mathbb{Z}_4 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_4), a \mapsto \hat{a}$, mit $\hat{a}(\bar{i}) := \overline{(-1)^a \cdot i}$ ist ein wohldefinierter Homomorphismus zwischen der zyklischen Gruppe $(\mathbb{Z}_4, +)$ und ihrer Automorphismengruppe.

b) Betrachten Sie $G := \mathbb{Z}_4 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_4$, $g := (2, 2) \in G$ und $U := \langle g \rangle$. Dann ist U ein Normalteiler in G vom Index 8.

c) Die Faktorgruppe $Q := G/U$ heißt **Quaternionengruppe**. Zeigen Sie: Q ist nicht abelsch und nicht isomorph zu D_4.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Beschreiben Sie die Konjugiertenklassen der A_5.

b) Zeigen Sie: Die A_5 ist einfach.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Konstruieren Sie alle Gruppen der Ordnung 12 (bis auf Isomorphie).
Hinweis: Betrachten Sie alle Möglichkeiten für Anzahlen von Sylow untergruppen.
(Lösung: Es gibt 5 nichtisomorphe Gruppen.)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Probleme eines Scheichs.

Ein Scheich möchte seinen Frauen je eine Perlenkette schenken. Die Ketten bestehen je aus 6 Perlen in den Farben weiß, silber und gold. Jedoch soll jede seiner Lieblinge eine ganz besondere Kette bekommen, von der es keine zweite gibt. Wird der Scheich genügend verschiedenartige Ketten herstellen können? Wie groß darf sein Harem sein?
Wieviele Frauen kann der Scheich mit einer besonderen Kette beglücken, welche von jeder Farbe genau 2 Perlen enthält? Wievielen Frauen kann er zumindest eine dreifarbige Kette schenken.
(Dabei werden zwei Halsketten als gleich betrachtet, wenn sie durch Drehen und evtl. Umklappen (Spiegeln) zur Deckung gebracht werden können.)

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Seien P und Q zwei lokal-endliche Halbgruppen.

a) Zeigen Sie, dass $P \times Q$ durch folgende Definition von $\leq$ zu einer lokal-endliche Halbgruppe wird:

$$(p_1, q_1) \leq (p_2, q_2) \iff p_1 \leq p_2 \text{ und } q_1 \leq q_2 \,.$$

b) Die Möbiusfunktion $\mu_{P\times Q}$ von $P \times Q$ ist dann das Produkt der Möbiusfunktionen μ_P und μ_Q von P und Q:

$$\mu_{P\times Q}(\,(p_1, q_1), (p_2, q_2)\,) = \mu_P(p1, p2) \cdot \mu_Q(q_1, q_2) \,.$$

Abgabe: Donnerstag, den 8.1.2004, vor der Vorlesung

Erholsame Feiertage, und ein gesegnetes neues Jahr!