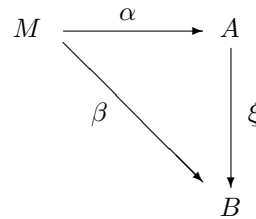


5.1 Universelle Elemente

Analog zur Untersuchung der Lösbarkeit von Gleichungen der Form $b = x \cdot a$ in Halbgruppen, Gruppen, Ringen, Körpern usw., kann man die Auflösbarkeit von Gleichungen der Form $\beta = \xi \circ \alpha$ in vorgegebenen Klassen von *Abbildungen* betrachten. Mit anderen Worten: es geht jetzt um die Ergänzbarkeit von

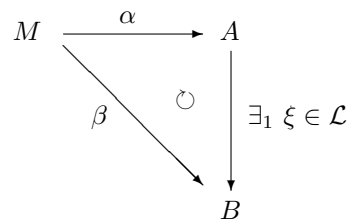


zu einem kommutativen Diagramm bei gegebenen α und β .

5.1.1 Definition (universell) Sei \mathcal{F} eine vorgegebene Klasse von Funktionen mit Definitionsbereich M , sei $\alpha: M \rightarrow A$ in \mathcal{F} und \mathcal{L} eine weitere vorgegebene Klasse von Funktionen. \mathcal{L} enthalte (zu den vorkommenden Definitionsbereichen) die Identitäten und sei abgeschlossen gegenüber Komposition (d.h. für $\gamma, \delta \in \mathcal{L}$ mit $\text{Bild } \delta \subseteq \text{Def } \gamma$ gilt $\gamma \circ \delta \in \mathcal{L}$). Dann heißt $\alpha: M \rightarrow A$ *universell bzgl. \mathcal{F} und \mathcal{L}* , wenn gilt:

$$\forall \beta \in \mathcal{F} \exists_1 \xi \in \mathcal{L}: \beta = \xi \circ \alpha.$$

In abkürzender Diagrammschreibweise:



Die Klasse \mathcal{L} heißt dabei die Klasse der *zulässigen Lösungen*, und A heißt *universelles Element*. •

5.1.2 Beispiel Ist M eine Menge, \sim eine Äquivalenzrelation auf M und

$$\alpha: M \rightarrow M/\sim, m \mapsto [m]_{\sim}$$

die Projektion der Elemente auf ihre Äquivalenzklasse. Dann ist die Abbildung $\alpha: M \rightarrow M/\sim$ universell bezüglich der Klasse \mathcal{F} der Funktionen mit Definitionsbereich M , die konstant auf den Äquivalenzklassen sind, und der Klasse \mathcal{L} aller Abbildungen. ◇

Von zentraler Bedeutung ist nun folgender Satz:

5.1.3 Die Eindeutigkeit universeller Elemente *Sind gegebene Abbildungen*

$$\alpha: M \rightarrow A \text{ und } \gamma: M \rightarrow C$$

universell bzgl. \mathcal{F} und \mathcal{L} , dann gibt es eine Bijektion $\lambda \in \mathcal{L}$ mit $\lambda: A \rightarrow C$.
Mit anderen Worten: Universelle Elemente sind im wesentlichen, d.h. bis auf zulässige Bijektionen, eindeutig bestimmt.

Beweis: Aus der Universalität von α und γ folgen die beiden Existenzaussagen

$$\exists_1 \xi \in \mathcal{L}: \gamma = \xi \circ \alpha \text{ und } \exists_1 \eta \in \mathcal{L}: \alpha = \eta \circ \gamma.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen:

$$\gamma = \underbrace{\xi \circ \eta \circ \gamma}_{\in \mathcal{L}} \text{ und } \alpha = \underbrace{\eta \circ \xi \circ \alpha}_{\in \mathcal{L}}.$$

Nun gilt aber trivialerweise

$$\alpha = id_A \circ \alpha, \text{ und } \gamma = id_C \circ \gamma.$$

Wegen $id_A, id_C \in \mathcal{L}$ und der Eindeutigkeit der Ergänzungen zeigt also ein Vergleich, daß folgendes richtig ist:

$$\xi \circ \eta = id_C \text{ und } \eta \circ \xi = id_A,$$

woraus sich bekanntlich die Bijektivität von $\xi =: \lambda$ ergibt.

□

5.1.4 Anwendungen Ist G eine Gruppe, $\alpha: G \rightarrow H$ ein Epimorphismus, \mathcal{F} die Klasse der Homomorphismen γ mit Definitionsbereich G und der Eigenschaft $\text{Kern}(\alpha) \subseteq \text{Kern}(\gamma)$, \mathcal{L} die Klasse aller Homomorphismen zwischen Gruppen, dann ist α offenbar universell bzgl. \mathcal{F} und \mathcal{L} . Demnach sind, wegen 5.1.3, alle epimorphen Bilder von G mit demselben Kern *Kern* α isomorph. Ein weiteres, leicht einzusehendes Beispiel ist die Universalität von

$$\alpha: n \rightarrow \mathbb{K}^n, i \mapsto e_i,$$

bezüglich der Klasse \mathcal{F} der Abbildungen von $n := \{0, \dots, n-1\}$ in Vektorräume über \mathbb{K} und der Klasse \mathcal{L} aller \mathbb{K} -linearen Abbildungen. Hier ergibt die Eindeutigkeit universeller Elemente die Isomorphie aller n -dimensionalen Vektorräume über \mathbb{K} . ◇