5.1 Universelle Elemente

Analog zur Untersuchung der Lösbarkeit von Gleichungen der Form $b = x \cdot a$ in Halbgruppen, Gruppen, Ringen, Körpern usw., kann man die Auflösbarkeit von Gleichungen der Form $\beta = \xi \circ \alpha$ in vorgegebenen Klassen von *Abbildungen* betrachten. Mit anderen Worten: es geht jetzt um die Ergänzbarkeit von

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & A \arrow[d, "\xi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

zu einem kommutativen Diagramm bei gegebenen α und β.

5.1.1 Definition (universell) Sei $\mathcal{F}$ eine vorgegebene Klasse von Funktionen mit Definitionsbereich M, sei $\alpha\colon M \to A$ in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{L}$ eine weitere vorgegebene Klasse von Funktionen. $\mathcal{L}$ enthalte (zu den vorkommenden Definitionsbereichen) die Identitäten und sei abgeschlossen gegenüber Komposition (d.h. für $\gamma, \delta \in \mathcal{L}$ mit $Bild\ \delta \subseteq Def\ \gamma$ gilt $\gamma \circ \delta \in \mathcal{L}$). Dann heißt $\alpha\colon M \to A$ *universell bzgl.* $\mathcal{F}$ *und* $\mathcal{L}$, wenn gilt:

$$\forall\ \beta \in \mathcal{F}\ \exists_1\ \xi \in \mathcal{L}\colon\ \beta = \xi \circ \alpha.$$

In abkürzender Diagrammschreibweise:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\circlearrowright"] & A \arrow[d, "\exists_1\ \xi \in \mathcal{L}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Die Klasse $\mathcal{L}$ heißt dabei die Klasse der *zulässigen Lösungen*, und A heißt *universelles Element.* •

5.1.2 Beispiel Ist M eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und

$$\alpha\colon M \to M/\sim,\ m \mapsto [m]_\sim$$

die Projektion der Elemente auf ihre Äquivalenzklasse. Dann ist die Abbildung $\alpha\colon M \to M/\sim$ universell bezüglich der Klasse $\mathcal{F}$ der Funktionen mit Defintionsbereich M, die konstant auf den Äquivalenzklassen sind, und der Klasse $\mathcal{L}$ aller Abbildungen. ◇

Von zentraler Bedeutung ist nun folgender Satz:

5.1.3 Die Eindeutigkeit universeller Elemente *Sind gegebene Abbildungen*

$$\alpha\colon M \to A \text{ und } \gamma\colon M \to C$$

universell bzgl. $\mathcal{F}$ *und* $\mathcal{L}$*, dann gibt es eine Bijektion* $\lambda \in \mathcal{L}$ *mit* $\lambda\colon A \to C$*. Mit anderen Worten: Universelle Elemente sind im wesentlichen, d.h. bis auf zulässige Bijektionen, eindeutig bestimmt.*

Beweis: Aus der Universalität von α und γ folgen die beiden Existenzaussagen

$$\exists_1\ \xi \in \mathcal{L}\colon \gamma = \xi \circ \alpha \text{ und } \exists_1\ \eta \in \mathcal{L}\colon \alpha = \eta \circ \gamma.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen:

$$\gamma = \underbrace{\xi \circ \eta}_{\in\mathcal{L}} \circ \gamma \text{ und } \alpha = \underbrace{\eta \circ \xi}_{\in\mathcal{L}} \circ \alpha.$$

Nun gilt aber trivialerweise

$$\alpha = id_A \circ \alpha, \text{ und } \gamma = id_C \circ \gamma.$$

Wegen $id_A, id_C \in \mathcal{L}$ und der Eindeutigkeit der Ergänzungen zeigt also ein Vergleich, daß folgendes richtig ist:

$$\xi \circ \eta = id_C \text{ und } \eta \circ \xi = id_A,$$

woraus sich bekanntlich die Bijektivität von $\xi =: \lambda$ ergibt.

□

5.1.4 Anwendungen Ist G eine Gruppe, $\alpha\colon G \to H$ ein Epimorphismus, $\mathcal{F}$ die Klasse der Homomorphismen γ mit Definitionsbereich G und der Eigenschaft $\mathrm{Kern}(\alpha) \subseteq \mathrm{Kern}(\gamma)$, $\mathcal{L}$ die Klasse aller Homomorphismen zwischen Gruppen, dann ist α offenbar universell bzgl. $\mathcal{F}$ und $\mathcal{L}$. Demnach sind, wegen 5.1.3, alle epimorphen Bilder von G mit demselben Kern $Kern\ \alpha$ isomorph.

Ein weiteres, leicht einzusehendes Beispiel ist die Universalität von

$$\alpha\colon n \to \mathbb{K}^n, i \mapsto e_i,$$

bezüglich der Klasse $\mathcal{F}$ der Abbildungen von $n := \{0,\ldots,\text{n-1}\}$ in Vektorräume über $\mathbb{K}$ und der Klasse $\mathcal{L}$ aller $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen. Hier ergibt die Eindeutigkeit universeller Elemente die Isomorphie aller n–dimensionalen Vektorräume über $\mathbb{K}$. ◇