

11.6. Überschallströmungen – die LAVAL-Düse

Bis hierher wurde der Austritt aus einem Kessel durch eine konvergente, d.h. sich stetig verengende oder durch eine einfache Öffnung konstanten Querschnitts betrachtet. Wie gezeigt wurde, kann bei einer derart geformten Mündung im Austrittsquerschnitt maximal Schallgeschwindigkeit herrschen.

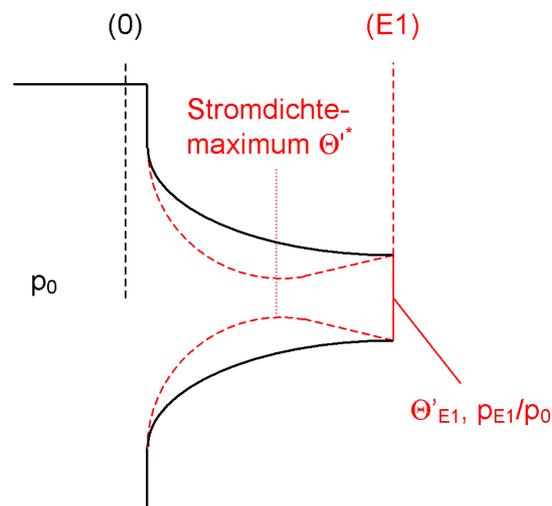
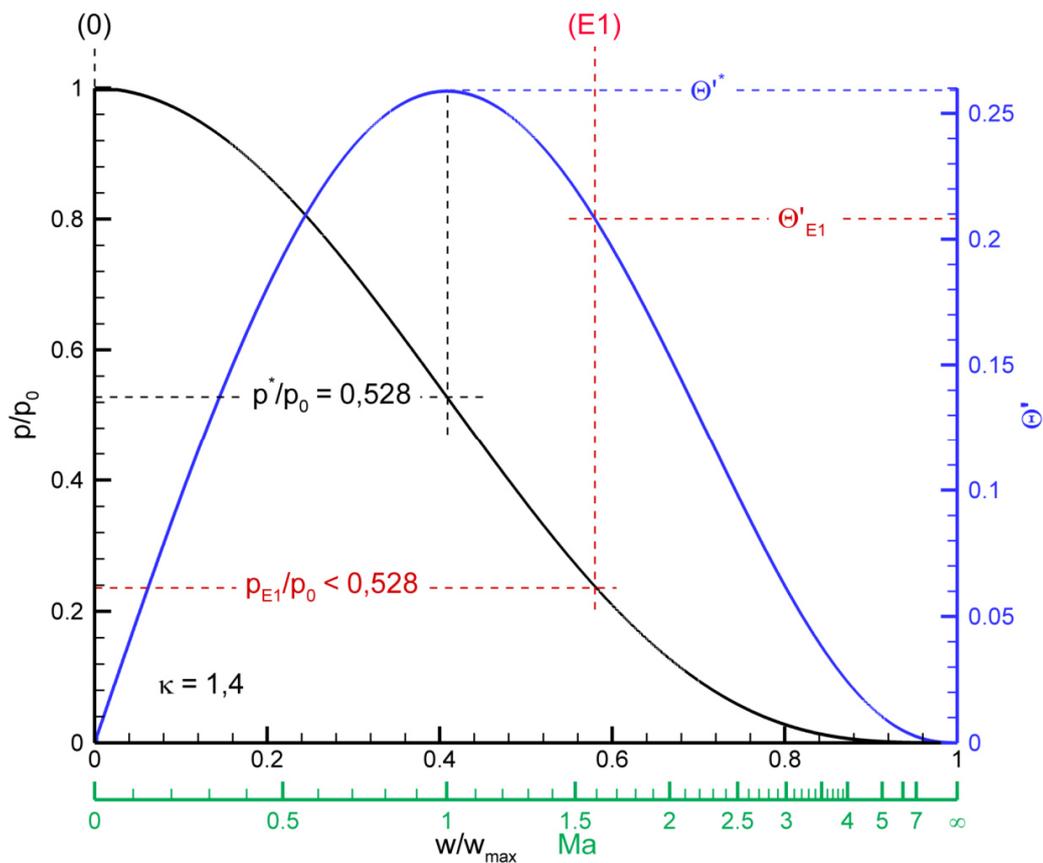


Abbildung 11.6-1: dimensionslose Stromdichte Θ' nach Gln. (11.5-12) und Druckverhältnis p/p_0 nach Gln. (11.5-13) bei isentroper Strömung

Es soll nun untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen bei isentropen Strömung Geschwindigkeiten größer als die Schallgeschwindigkeit erreicht werden können. Ein Hinweis liefert schon die Diskussion der (dimensionslosen) Stromdichte Θ' . Der Verlauf ist hier noch einmal dargestellt.

Es sei an dieser Stelle noch einmal angemerkt, dass die Stromdichte ein Maß für den Raumbedarf der Strömung darstellt. Wie man in Abbildung 11.6-1 erkennt, ist der Raumbedarf im kritischen Zustand der Strömung minimal, d.h. der Querschnitt an dieser Stelle ebenfalls minimal. Will man die Strömung über diesen Punkt hinaus weiter beschleunigen, so muss man dem nun zunehmenden Raumbedarf der Strömung Rechnung tragen und den Strömungsquerschnitt erweitern.

Nur so ist es möglich, Strömungsgeschwindigkeiten mit $Ma > 1$ zu erreichen. Schematisch ist die Düsenform in Abbildung 11.6-2 dargestellt.

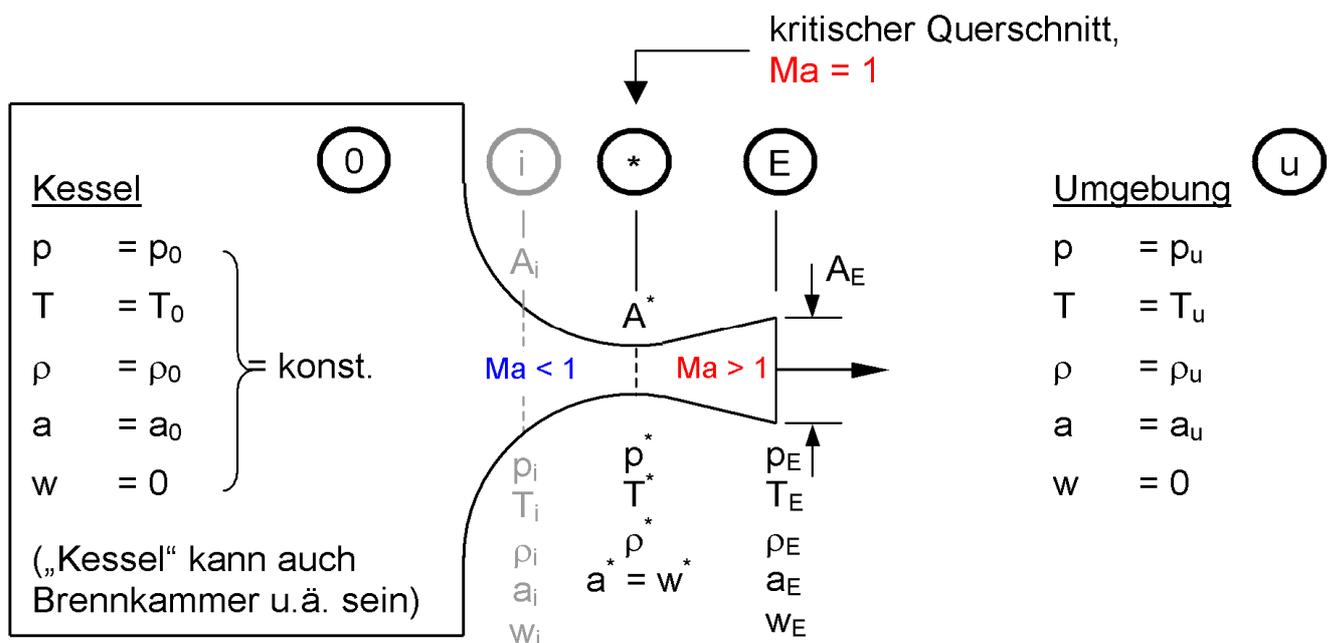


Abbildung 11.6-2: Konvergent-divergente Düse zum Erreichen von Überschallgeschwindigkeiten

Eine solche Düse nennt man LAVAL-Düse. Sie geht auf den schwedischen Dampfturbinenpionier *de LAVAL* (1845-1913) zurück. Er erkannte (1883), dass man Düsen, in denen Dampf durch Expansion möglichst stark beschleunigt werden soll, zuerst verengen und anschließend erweitern muss. Nur so ist es möglich, die Expansion in der Düse unter den kritischen Druck weiterzuführen und die Geschwindigkeit auf Überschall zu beschleunigen.

Die konvergent-divergente Düse wurde nahezu zeitgleich und von Laval unabhängig von dem deutschen Ingenieur und Industriellen Ernst Körtingen 1878 entwickelt.

Aber auch diese neue Düsengeometrie ändert nichts an der Beschränkung des maximalen Massenstroms durch die Düse. Ist der kritische Zustand erst einmal im engsten Querschnitt erreicht, ist damit auch der "kritische" Massenstrom erreicht, der auch bei weiterem Absenken des Gegendrucks bei einem konstanten Kesseldruck konstant bleibt:

$\dot{m}^* = \rho^* \cdot w^* \cdot A^*$	(11.5-7)
--	----------

da die kritische Dichte ρ^* und die Geschwindigkeit $w^* = a^*$ nur von den Ruhegrößen abhängen.

Im Folgenden wird eine elegante Erklärung der notwendigen geometrischen Beschaffenheit eines Strömungskanals im Unter- und Überschall gegeben. Grundlage zur mathematischen Beschreibung von kompressiblen Strömungen in Düse und Diffusor liefert die Kontinuitätsgleichung.

$\dot{m} = \rho \cdot w \cdot A = konst.$	
---	--

Wird die Gleichung logarithmiert erhält man:

$\ln(\dot{m}) = \ln(\rho \cdot w \cdot A) = \ln(konst.)$ $\ln(\rho) + \ln(w) + \ln(A) = konst.$	
--	--

Durch das Differenzieren erhält man:

$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} + \frac{dA}{A} = 0$	
--	--

Die kompressible Strömung wird auch durch EULER - Kräftegleichung beschrieben. Sie stellt den Zusammenhang zwischen den Trägheits-, Druck- und Schwerkraften dar.

$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = -\frac{dp}{\rho} - g \cdot dz$	FLMI Gl. (7-32)
---	-----------------

Oder

$w \cdot dw = -\frac{dp}{\rho} - g \cdot dz$	
--	--

Das Höhenglied (Schwerkraft) wird vernachlässigt:

$w \cdot dw = -\frac{dp}{\rho}$ $-\frac{1}{\rho} = w \cdot \frac{dw}{dp}$	
---	--

dieses in die Kontinuitätsgleichung eingesetzt ergibt

$d\rho \cdot \left(-w \cdot \frac{dw}{dp}\right) + \frac{dw}{w} + \frac{dA}{A} = 0 \text{ umgestellt}$ $\frac{dA}{A} = w \cdot dw \cdot \frac{d\rho}{dp} - \frac{dw}{w}$ <p>Durch die Erweiterung des zweiten Terms mit w ergibt sich</p> $\frac{dA}{A} = \frac{w^2}{w} \cdot dw \cdot \frac{1}{dp} - \frac{dw}{w} \text{ und } \frac{dp}{d\rho} = a^2$ $\frac{dA}{A} = \frac{dw}{w} \cdot \frac{w^2}{a^2} - \frac{dw}{w} \text{ und } Ma^2 = \frac{w^2}{a^2} \text{ folgt}$	
--	--

$\frac{dA}{A} = (Ma^2 - 1) \cdot \frac{dw}{w}$	(11.6-1)
--	----------

Durch die Analyse dieser Gleichung kann man in Abbildung 11.6-3 die Entwicklung der Strömungsgrößen und des Querschnittes einer Stromröhre im Unter- und Überschall für die isentrope Strömung zeigen.

Fall 1 Unterschall $w_2 < a \Rightarrow Ma < 1$

Fall 1a) Beschleunigung $w_2 > w_1$

Das bedeutet

$\frac{dw}{w} > 0$ und $Ma < 1$ eingesetzt in die Gleichung (11.6-1)

$$\frac{dA}{A} = (Ma^2 - 1) \cdot \frac{dw}{w} \text{ folgt } \frac{dA}{A} < 0 \text{ welches bedeutet } A_2 < A_1$$

Die Kanalform muss konvergent ausgebildet sein. Es ist eine konvergente Düse.

Die Energiegleichung

$$\frac{w_1^2}{2} + c_p \cdot T_1 = \frac{w_2^2}{2} + c_p \cdot T_2 \text{ liefert mit } w_2 > w_1 \text{ damit}$$

$$T_2 < T_1 \text{ und } dT < 0$$

Also eine Temperaturabnahme und damit eine **Expansion** der Strömung.

Fall 1b) Verzögerung der Strömung $w_2 < w_1$

Das bedeutet

$\frac{dw}{w} < 0$ und $Ma < 1$ eingesetzt in die Gleichung (11.6-1)

$$\frac{dA}{A} = (Ma^2 - 1) \cdot \frac{dw}{w} \text{ folgt } \frac{dA}{A} > 0 \text{ welches bedeutet } A_2 > A_1$$

Die Kanalform muss divergent ausgebildet sein. Es ist ein divergenter Diffusor.

Die Energiegleichung

$$\frac{w_1^2}{2} + c_p \cdot T_1 = \frac{w_2^2}{2} + c_p \cdot T_2 \text{ liefert mit } w_2 < w_1 \text{ damit}$$

$$T_2 > T_1 \text{ und } dT > 0$$

Also eine Temperaturabnahme und damit eine **Kompression** der Strömung.

Fall 2 Überschall $w_2 > a \Rightarrow Ma > 1$

Fall 2a) Beschleunigung $w_2 > w_1$

Das bedeutet

$\frac{dw}{w} > 0$ und $Ma > 1$ eingesetzt in die Gleichung (11.6-1)

$$\frac{dA}{A} = (Ma^2 - 1) \cdot \frac{dw}{w} \text{ folgt } \frac{dA}{A} > 0 \text{ welches bedeutet } A_2 > A_1$$

Die Kanalform muss divergent ausgebildet sein. Es ist eine divergente Düse.

Die Energiegleichung

$$\frac{w_1^2}{2} + c_p \cdot T_1 = \frac{w_2^2}{2} + c_p \cdot T_2 \text{ liefert mit } w_2 > w_1 \text{ damit}$$

$$T_2 < T_1 \text{ und } dT < 0$$

Also eine Temperaturabnahme und damit eine **Expansion** der Strömung.

Fall 2) Verzögerung der Strömung $w_2 < w_1$

Das bedeutet

$\frac{dw}{w} < 0$ und $Ma > 1$ eingesetzt in die Gleichung (11.6-1)

$$\frac{dA}{A} = (Ma^2 - 1) \cdot \frac{dw}{w} \text{ folgt } \frac{dA}{A} < 0 \text{ welches bedeutet } A_2 < A_1$$

Die Kanalform muss konvergent ausgebildet sein. Es ist ein konvergenter Diffusor.

Die Energiegleichung

$$\frac{w_1^2}{2} + c_p \cdot T_1 = \frac{w_2^2}{2} + c_p \cdot T_2 \text{ liefert mit } w_2 < w_1 \text{ damit}$$

$$T_2 > T_1 \text{ und } dT > 0$$

Also eine Temperaturabnahme und damit eine **Kompression** der Strömung.

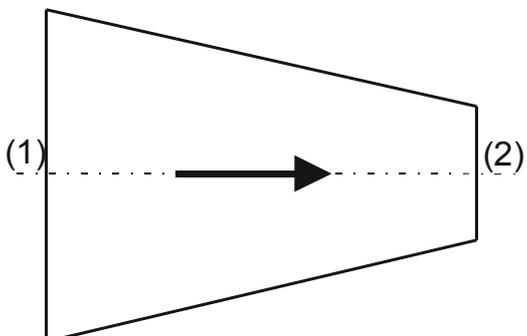
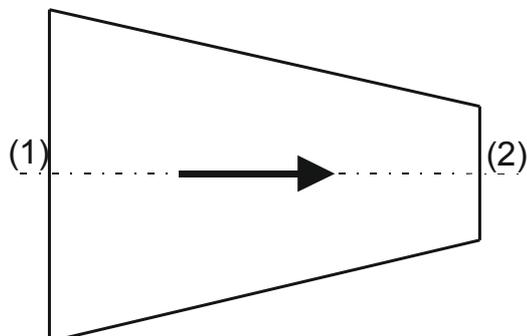
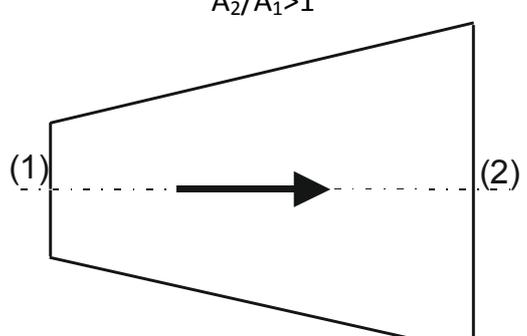
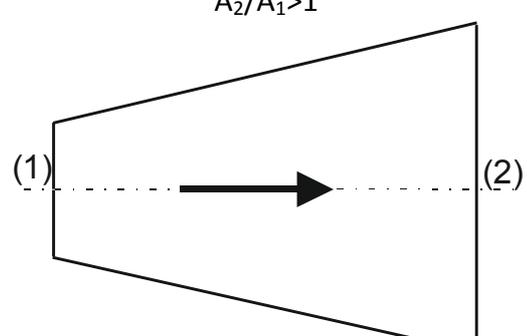
<p>Fall 1 Unterschallströmung</p> <p>Ma<1</p>	<p>Fall 2 Schall- und Überschallströmung</p> <p>Ma>1</p>
<p>Fall 1a</p> <p>Beschleunigung (Düse)</p> <p>$w_2 > w_1$ damit $p_2 < p_1$ $\rho_2 < \rho_1$ $T_2 < T_1$</p> <p>Expansion Flächenverhältnis $A_2/A_1 < 1$</p> 	<p>Fall 2a</p> <p>Verzögerung (Diffusor)</p> <p>$w_2 < w_1$ damit $p_2 > p_1$ $\rho_2 > \rho_1$ $T_2 > T_1$</p> <p>Kompression Flächenverhältnis $A_2/A_1 < 1$</p> 
<p>Fall 1b</p> <p>Verzögerung (Diffusor)</p> <p>$w_2 < w_1$ damit $p_2 > p_1$ $\rho_2 > \rho_1$ $T_2 > T_1$</p> <p>Kompression Flächenverhältnis $A_2/A_1 > 1$</p> 	<p>Fall 2b</p> <p>Beschleunigung (Düse)</p> <p>$w_2 > w_1$ damit $p_2 < p_1$ $\rho_2 < \rho_1$ $T_2 < T_1$</p> <p>Expansion Flächenverhältnis $A_2/A_1 > 1$</p> 

Abbildung 11.6-3: Änderung der Strömungsgrößen und des Querschnittes bei isentroper Strömung

Rohre, mit denen eine Beschleunigung der Strömung und eine Druckabsenkung (Expansion) vorgenommen werden, heißen **Düsen**. Zur Beschleunigung und Druckabsenkung der Strömung im Unterschallbereich muss die Querschnittsfläche eines Rohres verengt, im Überschallbereich aber erweitert werden.

Rohre mit denen eine Verzögerung der Strömung und eine Drucksteigerung (Kompression) vorgenommen werden, heißen **Diffusoren**. Die **Verzögerung** der Strömung und damit verbunden die Drucksteigerung erreicht man im Unterschall durch eine Erweiterung in Strömungsrichtung.

Während man bei der Gestaltung der Düsenform weitgehende Freiheit hat, ist bei Entwurf und Auslegung von Diffusoren große Sorgfalt notwendig, denn eine Drucksteigerung mit gutem Wirkungsgrad gelingt nur unter Beachtung besonderer Konstruktionsregeln (Ablösungsgefahr).

Man soll beachten, dass der Diffusorwinkel im Unterschall (bei $Re = 10^5$) nicht größer als 4° werden darf. Übersteigt er dieses Maß, so reißt die Strömung ab, die Verluste werden groß, und man erhält nicht die erwünschte Drucksteigerung. Mit wachsender Reynoldszahl sinkt der kritische Diffusorwinkel, mit abnehmender steigt er. Diese Beschränkung von dem Diffusorwinkel gilt nicht für die Erweiterung von Überschalldüsen. Man kann unbedenklich bis auf Erweiterungen von 20° bis 30° und darüber gehen.

Mit einem Überschalldiffusor, der nach dem Prinzip der umgekehrten Laval-Düse arbeiten soll, kann man niemals bis zur Schallgeschwindigkeit und weiter hinunter bis zum Unterschall verdichten. Diese Strömung ist in einem realen reibungsbehafteten Gas instabil, es bildet sich ein senkrechter Verdichtungsstoß, der große Verluste verursacht.

11.6.1 Auslegung von LAVAL-Düsen

Zunächst muss geklärt werden, was mit dem „**Auslegen**“ einer Laval-Düse gemeint ist. Aufgabe einer LAVAL-Düse ist es, eine Gasströmung möglichst effizient, d.h. mit minimalen Verlusten und minimalem Energieaufwand, auf Überschallgeschwindigkeit ($Ma_E > 1$) zu beschleunigen. Vernachlässigt man Wandreibungsverluste, so bedeutet dass

1. zum einen eine stetige, isentrope Zustandsänderung des Gases innerhalb der Lavaldüse und
2. zum anderen, dass sich das Gas vom **Ruhedruck** p_0 auf den **Umgebungsdruck (Gegendruck)** p_u im Austrittsquerschnitt A_E der LAVAL-Düse entspannen kann, **so dass gilt: $p_E = p_G = p_u$. In diesem Fall ist das Gegendruckverhältnis p_u/p_0 an das Flächenverhältnis A^*/A_E „angepasst“.** Stimmen beide Drücke p_E und p_u nicht überein, kommt es außerhalb der Düse entweder zur Nachkompression ($p_E < p_u$) oder Nachexpansion ($p_E > p_u$) des Gases (beides anisentrop), was mit zusätzlicher Dissipation verbunden ist.

In der Regel ist die Geometrie einer auszulegenden LAVAL-Düse, durch das Austrittsquerschnittsverhältnis A^*/A_E als wichtigstes Parameter, vorgegeben.

Somit bleiben als veränderliche Auslegungsparameter der Druck im Kessel p_0 (Ruhedruck) und der Gegendruck p_u bzw. das daraus resultierende Gegendruckverhältnis p_u/p_0 .

Abbildung 11.6-4 zeigt das lokale Ruhedruckverhältnis p/p_0 (Gl. 11.5-13) zusammen mit dem lokalen Querschnittsverhältnis A^*/A . Der Verlauf von A^*/A kann direkt aus Abbildung 11.6-1 abgeleitet werden, indem die Stromdichte Θ' auf die kritische Stromdichte Θ'^* bezogen wird und mit Hilfe der Gl. 11.5-12 als Funktion von w/w_{max} in Abbildung 11.6-4 dargestellt wird:

$\dot{m} = \dot{m}^* \Rightarrow \frac{A^*}{A} = \frac{\rho \cdot w}{\rho^* \cdot w^*} \Rightarrow \frac{A^*}{A} = \frac{\left(\frac{\rho \cdot w}{\rho_0 \cdot w_{max}} \right)}{\left(\frac{\rho^* \cdot w^*}{\rho_0 \cdot w_{max}} \right)} = \frac{\Theta'}{\Theta'^*}$	(11.6-2)
---	----------

Die Verhältnisse p/p_0 und A^*/A sind als Funktion von Ma-Zahl und w/w_{\max} dargestellt, was zeigt, dass Ruhedruck- und Querschnittsverhältnis unter der Voraussetzung isentroper Strömung aneinander gekoppelt (\rightarrow angepasst) sind.

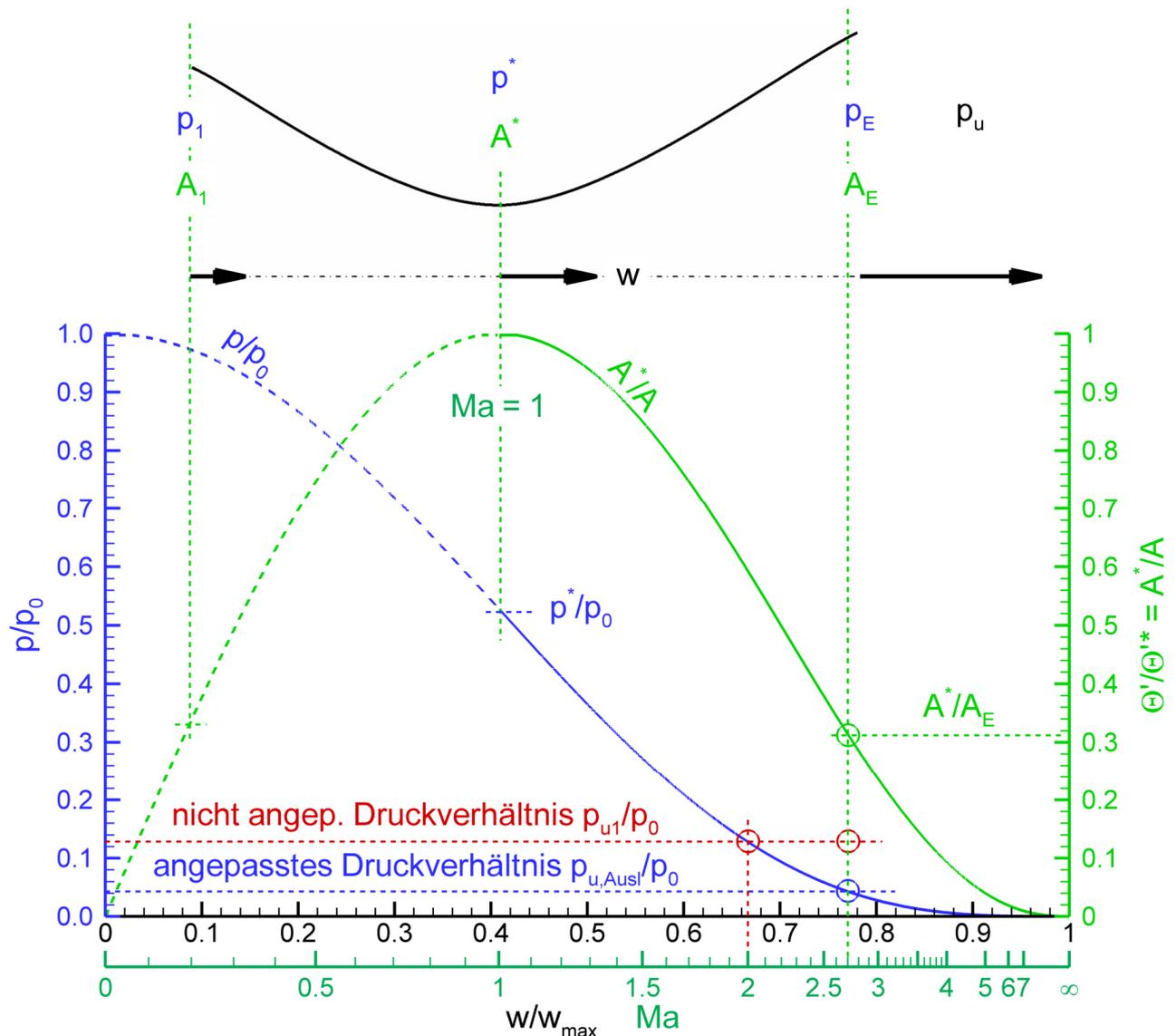


Abbildung 11.6-4: Flächenverhältnis A^*/A und Druckverhältnis p/p_0 bei isentroper Strömung

Im vorliegenden Beispiel weist die LAVALDüse ein Austrittsquerschnittsverhältnis A^*/A_E von 0,31 auf, was im Überschallbereich eine Mach-Zahl von $Ma = 2,7$ und $w/w_{\max} = 0,772$ ergibt.

Man spricht nur dann vom Auslegungszustand, wenn das vorliegende Gegendruckverhältnis p_u/p_0 dieselbe Mach-Zahl wie das Austrittsquerschnittsverhältnis A^*/A_E ergibt.

Dies ist für das eingezeichnete Druckverhältnis $p_{u,Ausl}/p_0 = 0,04$ der Fall.

Fall I: Wird der Umgebungsdruck p_u auf $p_{u1} > p_u$ angehoben, so ändert sich das Gegendruckverhältnis p_u/p_0 auf $p_{u1}/p_0 = 0,13$ und die LAVAL-Düse arbeitet bei dem gegebenen $A^*/A_E = 0,31$ nicht mehr im ausgelegten Betriebszustand, da das Druckverhältnis einer Machzahl $Ma_1 = 2$ entspräche.

Als Folge kommt es

- entweder zu einem Absinken des Druckes im Austrittsquerschnitt auf $p_E = p_{u,Ausl} < p_{u1}$ und einer anschließenden **Nachkompression** des austretenden Gasstrahles oder
- zum Auftreten eines **Verdichtungsstoßes** im divergenten Düsenteil, durch den sich die Strömung so einstellt, dass im Austrittsquerschnitt A_E der Gegendruck $p_E = p_u$ herrscht.

Fall II: Bei einem Absinken des Gegendruckes p_{u2} auf Werte unterhalb von $p_{u,Ausl}$ bleibt der Druck im Austrittsquerschnitt bei $p_E = p_{u,Ausl} > p_{u1}$ die Gasströmung expandiert jedoch außerhalb der Düse (**Nachexpansion**).

Das Ziel der nachfolgenden Herleitung ist es, das lokale Flächenverhältnis A^*/A_i sowohl als Funktion des lokalen Druckverhältnisses p_i/p_0 als auch der lokalen Mach-Zahl Ma_i darzustellen, also

$\frac{A^*}{A_i} = f\left(\frac{p_i}{p_0}\right) \text{ und } \frac{A^*}{A_i} = f(Ma_i)$	(11.6-3)
--	----------

Der lokale Index (i) wird im Folgenden der Einfachheit halber weggelassen.

Ausgangspunkt ist die Kontinuitätsgleichung, wonach der Massenstrom überall gleich sein muss. Als Referenzpunkt wird der kritische Querschnitt gewählt. Es ist

$\dot{m} = \dot{m}^*$ $\rho \cdot w \cdot A = \rho^* \cdot w^* \cdot A^*$	(11.3-1)
---	----------

Das Verhältnis des kritischen Querschnitts zum interessierenden Querschnitt ist damit umgekehrt proportional zum Verhältnis der entsprechenden Stromdichten.

$\frac{A^*}{A} = \frac{\rho \cdot w}{\rho^* \cdot w^*}$	
---	--

Die rechte Seite wird mit ρ_0/ρ_0 und a_0/a_0 erweitert und die kritischen Verhältnisse gruppiert

$\frac{A^*}{A} = \frac{\rho \cdot w}{\rho^* \cdot w^*} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_0} \cdot \frac{a_0}{a_0} = \left(\frac{a_0 \rho_0}{a^* \rho^*} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \left(\frac{w}{a_0} \right)$	
--	--

Anschließend wird w durch $w = Ma \cdot a$ ersetzt:

$\frac{A^*}{A} = \left(\frac{a_0 \rho_0}{a^* \rho^*} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \left(\frac{a \cdot Ma}{a_0} \right) = \left(\frac{a_0 \rho_0}{a^* \rho^*} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \frac{a}{a_0} Ma \right)$	(11.6-4)
--	----------

Ausgehend von diesem Ausdruck teilt sich das weitere Vorgehen. Tabelle 11.6-1 zeigt die im Folgenden verwendeten Terme jeweils als Funktion von p/p_0 und Ma_i .

	$\frac{A^*}{A} = \left(\frac{a_0 \rho_0}{a^* \rho^*} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \frac{a}{a_0} Ma \right)$		
	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{a}{a_0}$	Ma
$\frac{A^*}{A} = f\left(\frac{p}{p_0}\right)$ Abb. 11.6-7	$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$ (11.5-14)	$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$ (11.5-14)	$Ma = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1} \left(\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right)}$ (11.5-7)
$\frac{A^*}{A} = f(Ma)$ Abb. 11.6-8	$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{1-\kappa}}$ (11.5-15)	$\frac{a}{a_0} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ (11.5-15)	Ma = Ma

Tabelle 11.6-1: Zusammenstellung der Terme in Gl. (11.6-4)

Zunächst soll das Flächenverhältnis als Funktion von p/p_0 berechnet werden. Dazu werden die einzelnen Ausdrücke aus oben stehender Zusammenstellung in Gl. (11.6-4) eingesetzt:

$$\frac{A^*}{A} = \left(\frac{a_0 \rho_0}{a^* \rho^*} \right) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \sqrt{\frac{2}{\kappa-1} \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right)}$$

Es wird umgeformt

$$\frac{A^*}{A} = \frac{a_0 \rho_0}{a^* \rho^*} \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}} \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right)},$$

der konstante Vorfaktor zu K1 zusammengefasst:

$$K1 = \frac{a_0 \rho_0}{a^* \rho^*} \cdot \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}} \tag{11.6-5}$$

und der Ausdruck unter der Wurzel vereinfacht. Man erhält als Ergebnis

$$\frac{A^*}{A_i} = K \cdot \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \quad \text{mit } K1 = 3,863925..... \tag{11.6-6}$$

Setzt man $\kappa = 1,4$ und die entsprechenden kritischen Verhältnisse nach (11.5-16) in Gl. (11.6-6) ein, erhält man

$$K1 = \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{-1}{1-\kappa}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}} = \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}}$$

$$K1 = \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}} = 3,864 \tag{11.6-7}$$

und somit

$\frac{A^*}{A_i} = K1 \cdot \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	(11.6-8)
--	----------

Gleichung (11.6-8) stellt eine Verbindung her zwischen lokalem Druck und dazugehöriger Querschnittsfläche bei bekanntem Ruhedruck p_0 und engstem (kritischem) Querschnitt A^* der LAVAL-Düse. Der Verlauf ist Abb. 11.6-6 und Abb. 11.6-7 dargestellt.

Die Vorgehensweise zur Darstellung von $A^/A = f(Ma)$ erfolgt analog. Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke in Gl. (11.6-4) liefert zunächst*

$\frac{A^*}{A} = \left(\frac{a_0 \rho_0}{a^* \rho^*}\right) \cdot \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{1-\kappa}} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot Ma$	
--	--

Die konstanten Zahlenwerte werden in der Konstanten K2

$K2 = \frac{a_0 \rho_0}{a^* \rho^*}$	
--------------------------------------	--

zusammengezogen und die Klammerausdrücke zusammengefasst:

$\frac{A^*}{A} = K2 \cdot \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1+\kappa}{2(1-\kappa)}} \cdot Ma$	(11.6-9)
---	----------

Für K2 kann auf K1 aus Gl. (11.6-5) zurückgegriffen werden:

$K2 = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(1-\kappa)}}$	
--	--

Da die Exponenten in K2 und Gl. (11.6-9) gleich sind, kann $(\kappa+1)/2$ mit in den Klammerausdruck gezogen werden, womit die endgültige Beziehung

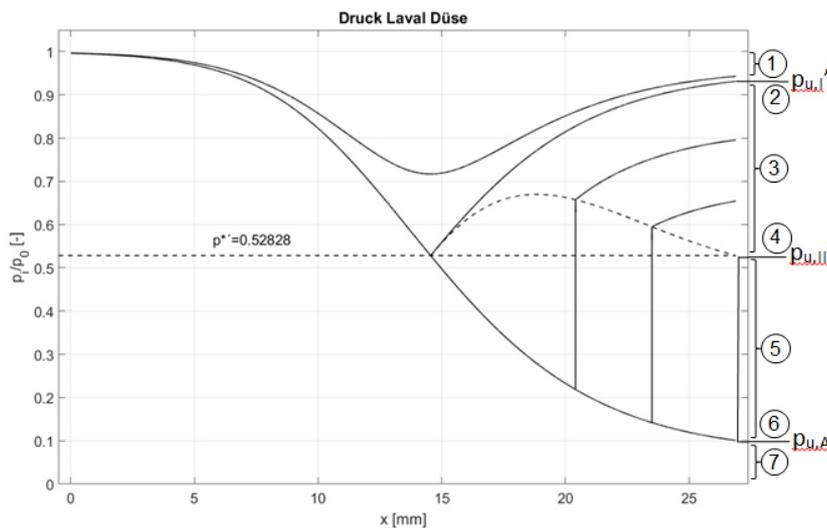
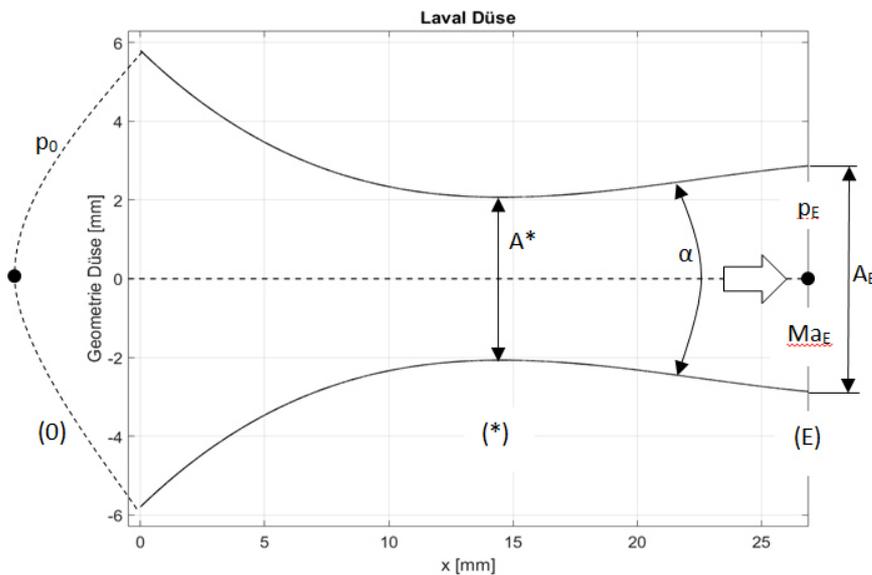
$\frac{A^*}{A_i} = Ma_i \cdot \left[\frac{2}{\kappa + 1} \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_i^2 \right) \right]^{\frac{1+\kappa}{2(1-\kappa)}} \text{ bzw.}$ $\frac{A^*}{A_i} = Ma_i \cdot \left[1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (Ma_i^2 - 1) \right]^{\frac{1+\kappa}{2(1-\kappa)}}$	<p>(11.6-10)</p>
---	------------------

lautet. Der Verlauf ist in Abbildung 11.6-8 dargestellt.

11.6.2 Betriebszustände der LAVAL-Düse

Zur Beschreibung der möglichen Betriebszustände der LAVAL-Düse werden folgende dimensionslose Drücke durch Bezug auf den Ruhedruck p_0 eingeführt

1. Gegendruck $p_u' = p_u/p_0$ ändert sich für jeden Betriebszustand
2. lokaler Druck $p' = p/p_0$
3. kritischer Druck $p^* = p^*/p_0$
4. Druck im Austritt (E) $p_E' = p_E/p_0$
5. Kesseldruck $p_0' = p_0/p_0 = 1$



Betriebszustände in Abhängigkeit vom Druckverhältnis

- ① Unterschall (1)
- ② Schallgeschwindigkeit nur im engsten Querschnitt dann wieder Unterschall (2)
- ③ senkrechter Verdichtungsstoß zwischen engstem Querschnitt und Austritt (3)
- ④ senkrechter Verdichtungsstoß genau am Austritt (4)
- ⑤ Überschall und Nachkompression (5)
- ⑥ $p_{u,Ausl}'$ ausgelegter/angepasster Zustand (6)
- ⑦ Überschall und Nachexpansion (7)

Abbildung 11.6-5: Druckverlauf in einer LAVAL - Düse bei verschiedenen Gegendrücker

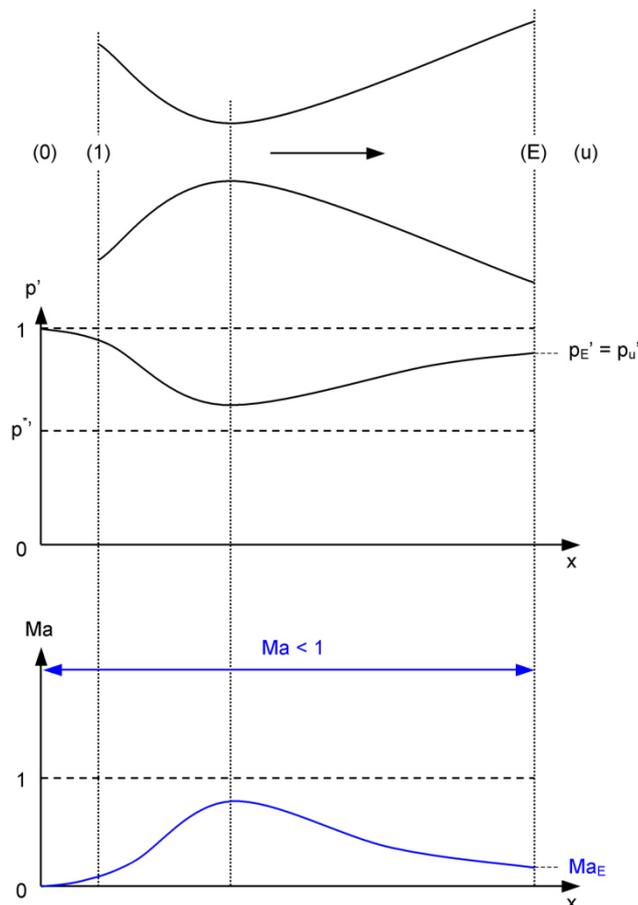
Die linke Achse in Abbildung 11.6-5 stellt den dimensionslosen lokalen Druck p' dar (im Austritt $p' = p_E'$). Auf der rechten Achse sind drei Gegendrücke $p_{u,I}'$, $p_{u,II}'$ und $p_{u,AusI}'$ für p_u' aufgetragen (Die Apostrophe bezeichnen hier dimensionslose Größen).

Bei $p_u' = 1$ ist der Umgebungsdruck p_u gleich dem Kesseldruck p_0 und es kommt folglich zu keiner Strömung; $p_u' = 0$ bedeutet den Austritt ins Vakuum.

Im Folgenden werden wir bei konstantem Ruhedruck p_0' in Gedanken den Gegendruck p_u' (Umgebungsdruck) ausgehend von $p_u' = 1$ (keine Strömung) auf Werte $p_u' < 1$ senken und die dabei auftretenden **sieben** Betriebszustände (BZ) diskutieren.

Betriebszustand 1: $1 > p_u' > p_{u,I}' = p^*$: Kurve A: *reine Unterschallströmung in der gesamten Düse*. Die Strömung bewegt sich auf ihrem gesamten Strömungswege im Unterschallbereich und verhält sich wie bei der Durchströmung einer Venturi-Düse, d.h., der niedrigste Druck liegt im engsten Querschnitt, der kein kritischer Querschnitt ist. Im konvergenten Teil der Düse wird die Strömung beschleunigt, im erweiterten Teil verzögert. Der Massenstrom liegt zwischen $\dot{m} = 0$ und $\dot{m} = \dot{m}_{max}$.

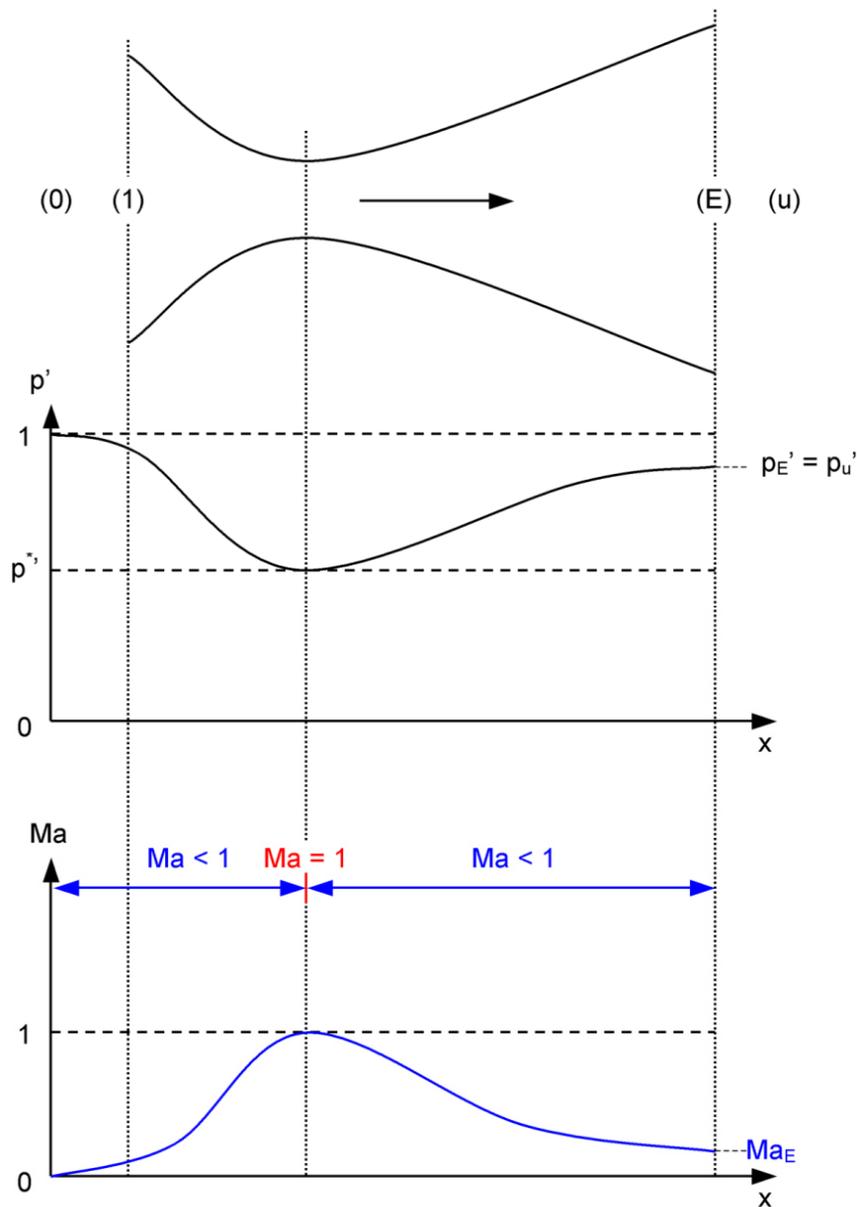
Der Druck im Düsenaustritt p_E' ist gleich dem Gegendruck p_u' .



Betriebszustand 2: $1 > p_{u'} > p_{u,l'} = p^*$: Kurve B, gerade $Ma = 1$ im engsten Querschnitt

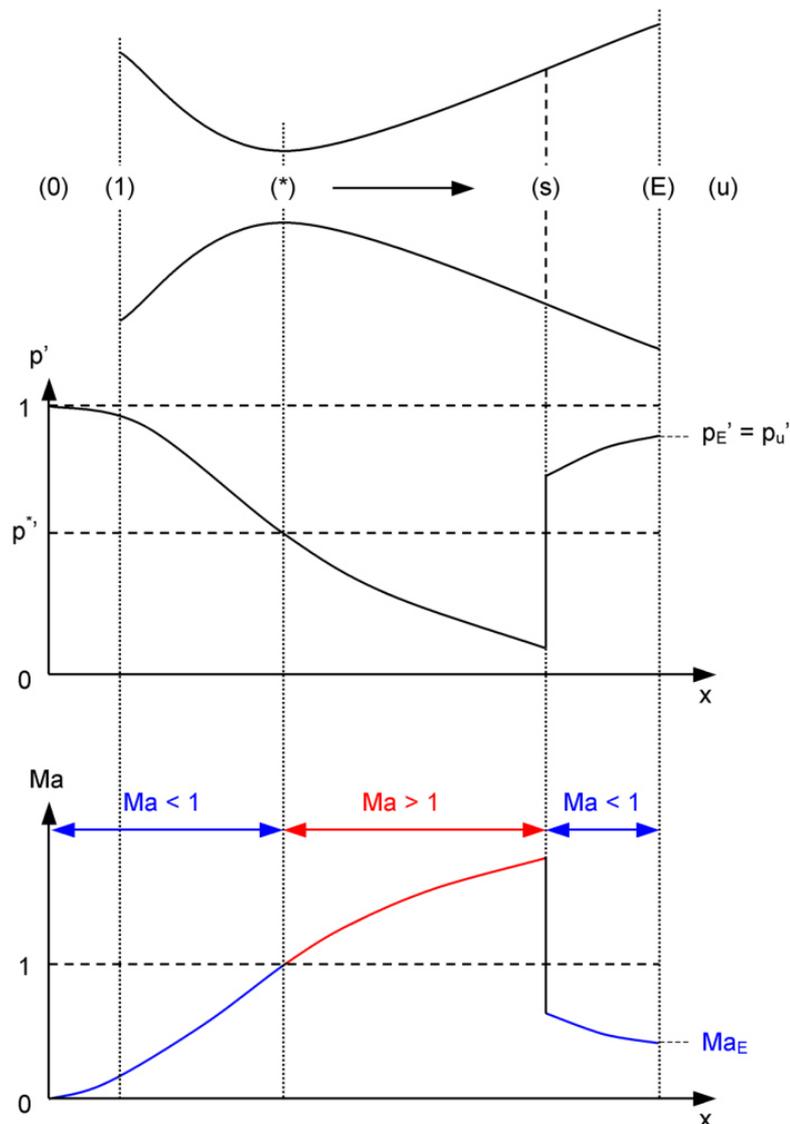
Als Grenzfall ist anzusehen, wenn im engsten Querschnitt der Düse zwar gerade Schallgeschwindigkeit ($Ma = 1$) erreicht wird, die Strömung aber sofort wieder in den Unterschall übergeht und der gesamte divergente Düsenteil als Unterschalldiffusor wirkt. Der Massenstrom ist \dot{m}_{max} , wie auch in allen folgenden Fällen.

Der Druck im Düsenaustritt p_E' ist gleich dem Gegendruck p_u' .



Betriebszustand 3: $p_{u,I}' > p_u' > p_{u,II}'$: Kurve D – VS – C, Verdichtungsstöße im divergenten Düsenbereich

Im engsten Querschnitt wird Schallgeschwindigkeit erreicht, dahinter herrscht Überschallströmung. Die Überschallströmung kann jedoch nicht bis zum Austritt in die Umgebung aufrechterhalten werden, weil der Umgebungsdruck p_u' dafür zu groß ist. Der Gegendruck wird bereits vor Ende der Erweiterung erreicht. Deshalb erfolgt zwischen dem engsten Querschnitt und dem Austrittsquerschnitt der „schlagartige“ Übergang auf eine Unterschallströmung in einem sogenannten senkrechten Verdichtungsstoß. Eine isentrope Strömung ist danach nicht mehr möglich. Die Strömung löst sich von der Wänden ab. Hinter dem Verdichtungsstoß stellt sich Unterschallströmung aus. Die Lage des Verdichtungsstoßes stellt sich dabei so ein, dass der Druck p_E' im Austritt der Stromröhre mit dem Umgebungsdruck p_u' übereinstimmt. Die Strömungsverhältnisse über den Verdichtungsstoß hinweg sind nicht mehr isentrop, können also nicht auf der Basis der bisherigen Gleichungen berechnet werden. Fallender Gegendruck bewirkt eine Verlagerung des Stoßes stromabwärts, maximal bis hin zum Austrittsquerschnitt. Die strichpunktierte Linie bezeichnet die Druckverhältnisse unmittelbar hinter dem Verdichtungsstoß.

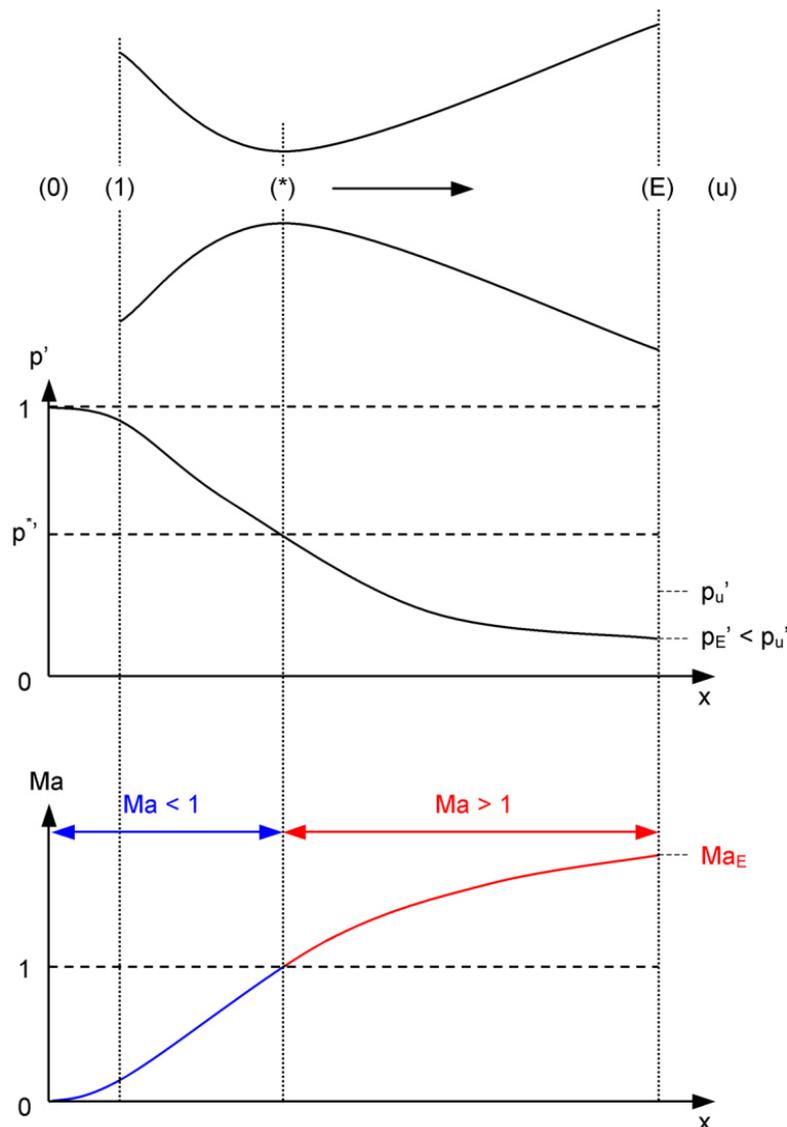


Betriebszustand 4: $p_u' = p_{u,II}'$: Kurve D, *Verdichtungsstoß im Austrittsquerschnitt*

Der Verdichtungsstoß liegt genau im Düsenaustritt; bis dahin herrscht im gesamten divergenten Teil der Laval-Düse eine ausgebildete Überschallströmung.

Betriebszustand 5: $p_{u,II}' > p_u' > p_{u,AusI}'$: Kurve D, *Nachkompression (überexpandierter Strahl)*

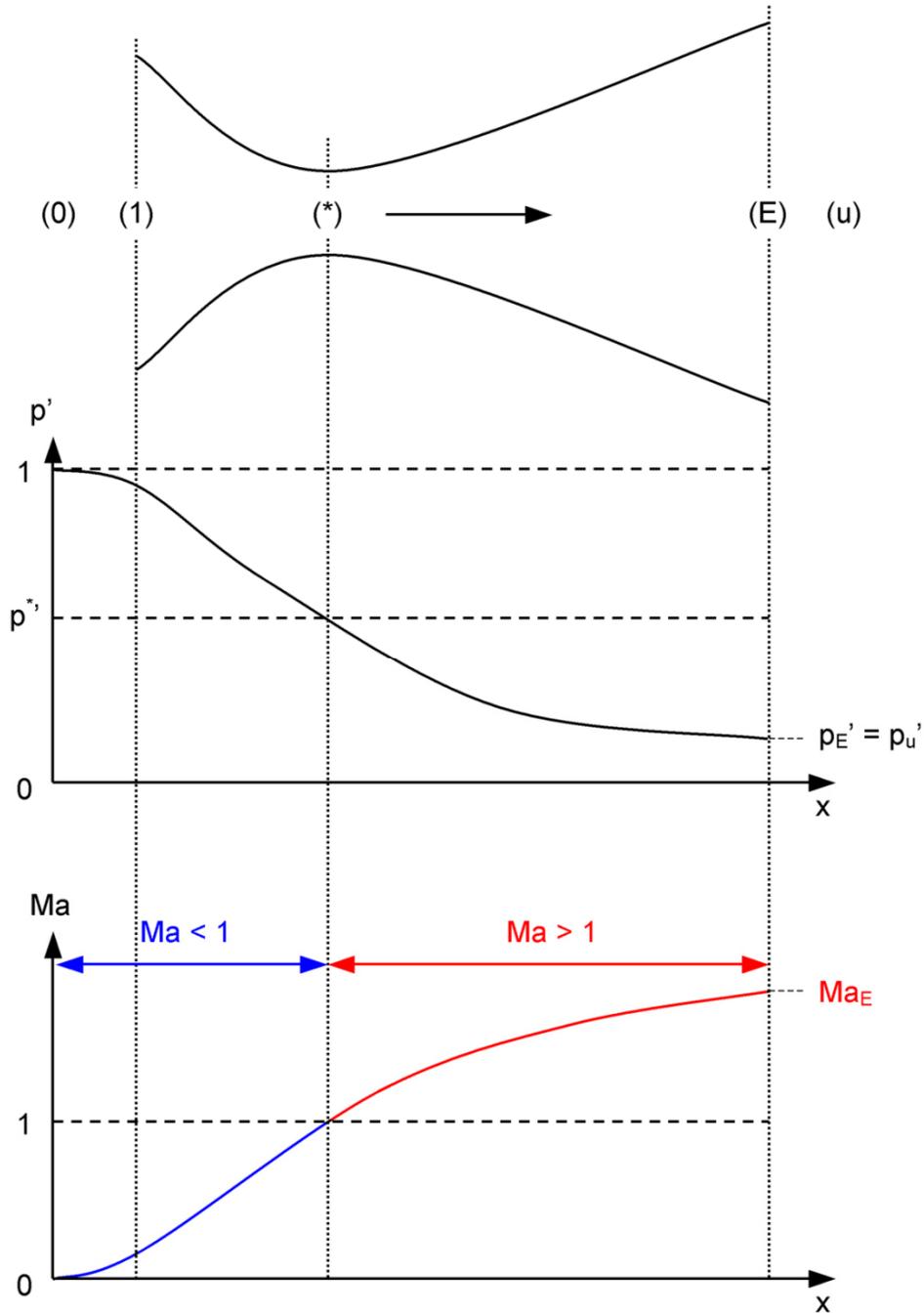
Beim überexpandierten Strahl (Düsenaustrittsdruck $p_E' < p_u'$) herrscht wie in Bereich 4 im gesamten divergenten Teil der Lavaldüse eine ausgebildete Überschallströmung. Der Gegendruck ist am Düsenaustritt aber noch nicht erreicht. Nach dem Austritt erfolgt eine Nachkompression, da der Druck im Austritt p_E' unter den Gegendruck p_u' gesunken ist ($p_E' < p_u'$). Die Strömung innerhalb der Düse wird durch das Ansteigen von p_E' nicht beeinflusst, weil die Störung erst hinter dem Austritt erfolgt, und Störungen in einer Überschallströmung sich nicht stromaufwärts auswirken können. Die Strömung ist also „über die Maßen“ expandiert; siehe folgenden Abschnitt 11.6.4. Auch diese Düse ist „unangepasst“.



Betriebszustand 6: $p_u' = p_{u,Ausl}'$: Kurve D, angepasstes Druckverhältnis (ausgelegter Zustand)

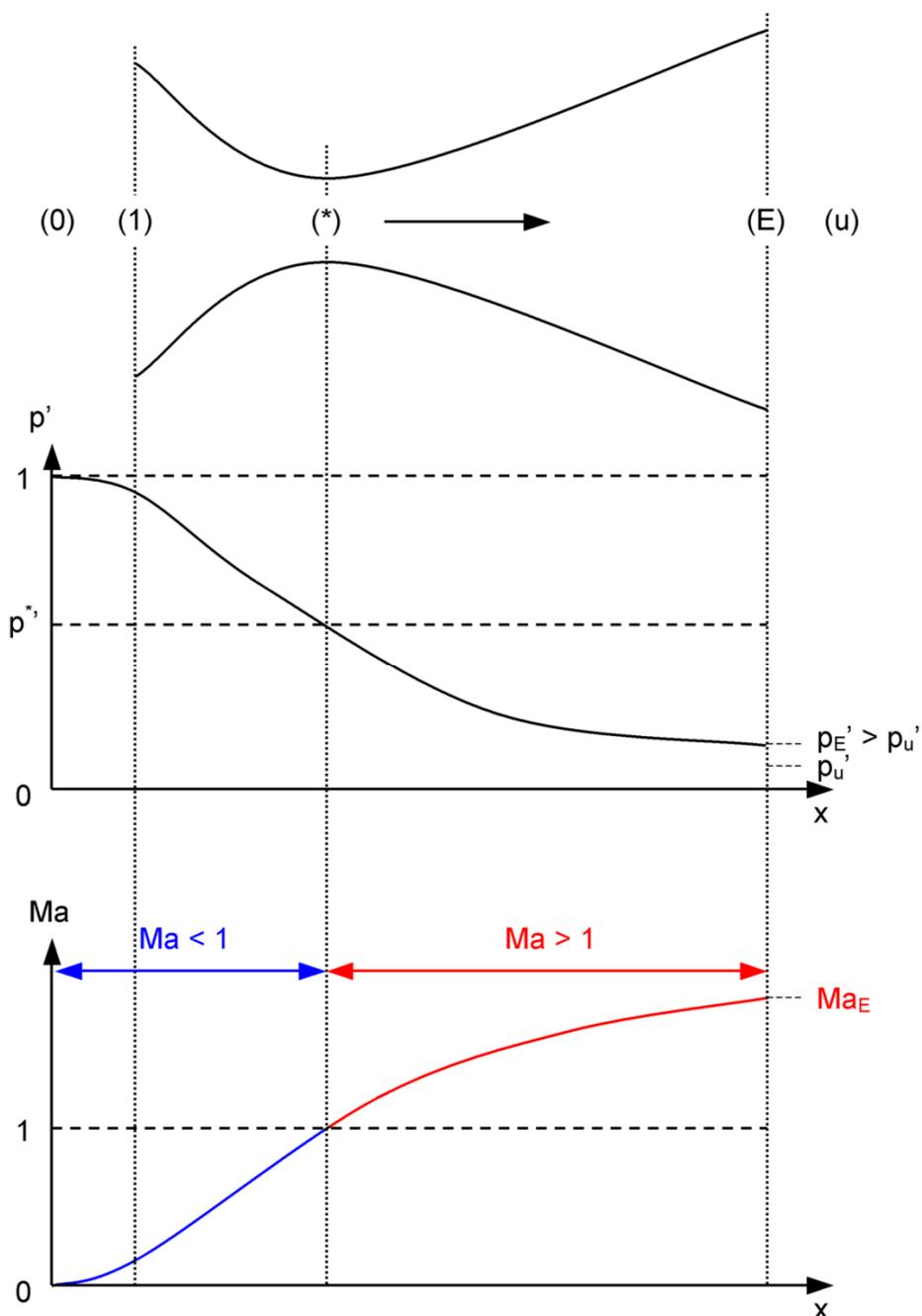
Es liegt ein angepasstes Druckverhältnis vor, bei dem der Strahl nach dem Austritt im Rahmen der getroffenen Annahmen unverändert erhalten bleibt. Die LAVAL-Düse arbeitet in ihrem Auslegungszustand; man spricht auch von einer angepassten Düse.

Der Druck im Düsenaustritt p_E' ist gleich dem Gegendruck p_u' .



Betriebszustand 7: $p_u' < p_{u,Ausl}'$: Kurve D, *Nachexpansion (unterexpandierter Strahl)*

Beim unterexpandierter Strahl (Düsenaustrittsdruck $p_E' > p_u'$) herrscht wie in Betriebszustand 5 im gesamten divergenten Teil der Lavaldüse eine ausgebildete Überschallströmung. Der Gegendruck ist am Düsenaustritt ebenfalls noch nicht erreicht. Nach dem Austritt erfolgt eine Nachexpansion, da der Druck im Austritt p_E' über den Gegendruck p_u' gestiegen ist ($p_E' > p_u'$). Die Strömung innerhalb der Düse wird durch das Absinken von p_E' nicht beeinflusst, weil die Störung erst hinter dem Austritt erfolgt, und Störungen in einer Überschallströmung sich nicht stromaufwärts auswirken können. Auch diese Düse ist „unangepasst“.



Der Verlauf von A^*/A in Abhängigkeit vom Druckverhältnis p/p_0 nach Gl. (11.6-6) ist in **Abbildung 11.6-6** dargestellt. Mit Hilfe dieses Diagramms kann man bei Kenntnis des Austrittsquerschnittsverhältnisses A^*/A_E auf einen Blick alle möglichen Betriebszustände einer LAVAL-Düse in Abhängigkeit vom Gegendruckverhältnis p_E/p_0 unterscheiden. Diese sind für ein Flächenverhältnis A^*/A_E von 0,7 eingetragen.

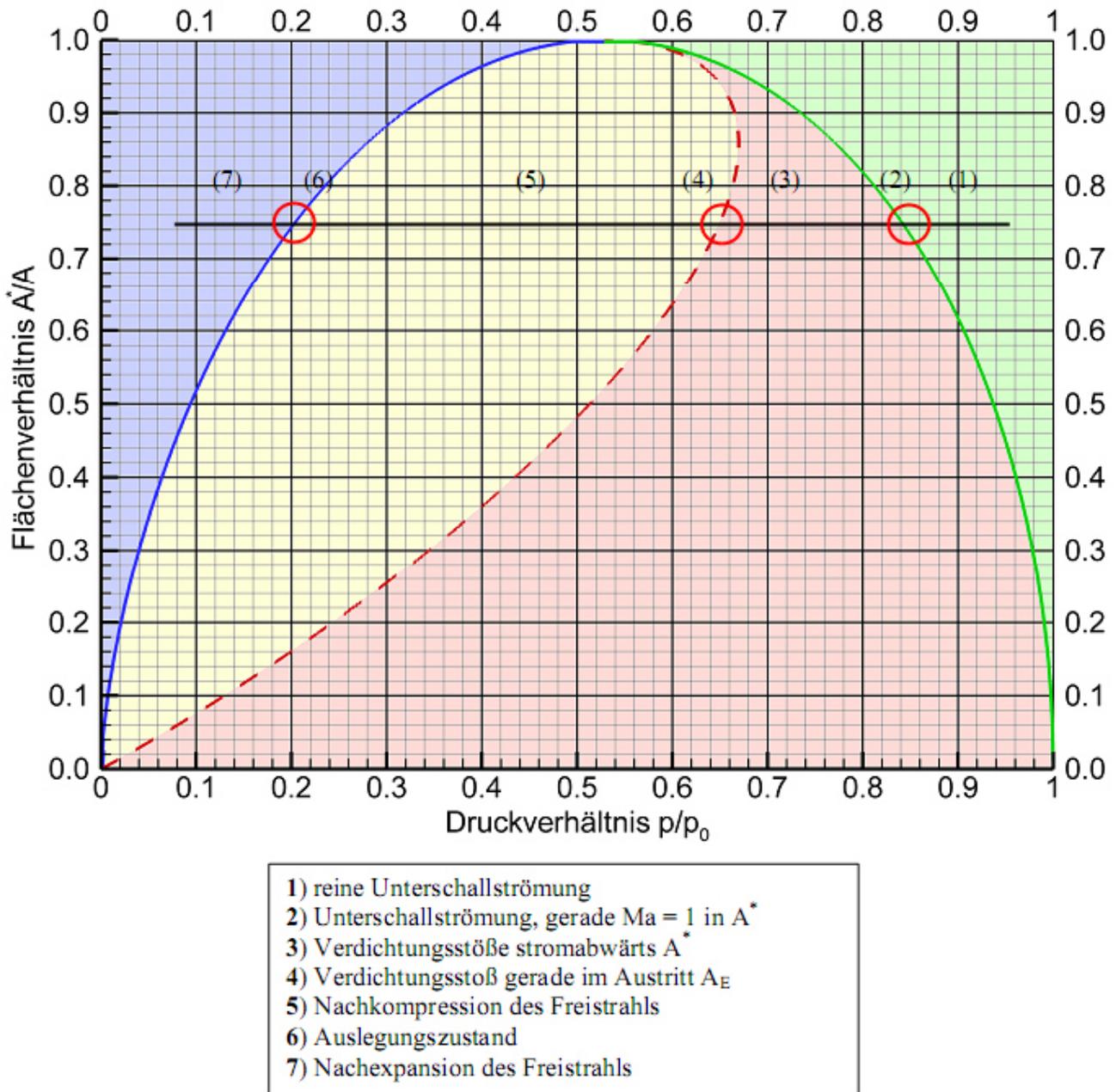


Abbildung 11.6-6: Betriebszustände der LAVAL-Düse: Flächenverhältnis als Funktion des Druckverhältnisses nach Gl.(11.6-6)

Kennt man beispielsweise das Gegendruckverhältnis p_E/p_0 und das Flächenverhältnis A^*/A_E (welches, wenn man so will, eine Apparatekonstante ist), so kann man sofort sagen, in welchem Betriebszustand die Düse arbeitet. Für das Flächenverhältnis $A^*/A_E = 0,7$ und $\kappa = 1,4$ gibt Tabelle 11.6-2 die Bereiche des Gegendruckverhältnisses p_E/p_0 und den dazugehörigen Betriebszustand an.

Betriebszustand	Druckverhältnis p_E/p_0	Gegendruck p_u
Bereich 1 Unterschall	$0,866 < p_E/p_0 \leq 1$	$p_u = p_E$
Punkt 2 Schall in (*)	$p_E/p_0 = 0,866$	$p_u = p_E$
Bereich 3 VS	$0,632 < p_E/p_0 < 0,866$	$p_u = p_E$
Punkt 4 VS im Austritt	$p_E/p_0 = 0,632$	$p_u = p_E$
Bereich 5 Nachkompression	$0,632 < p_E/p_0 < 0,176$	$p_u > p_E$
Punkt 6 Auslegungszustand	$p_E/p_0 = 0,176$	$p_u = p_E$
Bereich 7 Nachkompression	$0 \leq p_E/p_0 \leq 0,176$	$p_u < p_E$

Tabelle 11.6-2: Betriebszustände und Gegendruckverhältnisse für $A^*/A_E = 0,7$ und $\kappa = 1,4$

11.6.3 Auslegungszustand, reine Unterschallströmung und gerade Schallgeschwindigkeit im engsten Querschnitt

Mit den bisherigen Formeln sind wir in der Lage, folgende drei Betriebszustände Fälle einer LAVAL-Düse zu berechnen:

- Auslegungszustand (Punkt 6)
- Reine Unterschallströmung (Bereich 1)
- Unterschallströmung mit gerade $Ma = 1$ im engsten Querschnitt (Punkt 2)

Dabei unterscheidet sich die Berechnung der Strömung bei dem Austritt aus dem Kessel durch eine rein konvergente Düse (bzw. einen Kanal konstanten Querschnitts) nicht vom Fall der reinen Unterschallströmung bei der LAVAL-Düse.

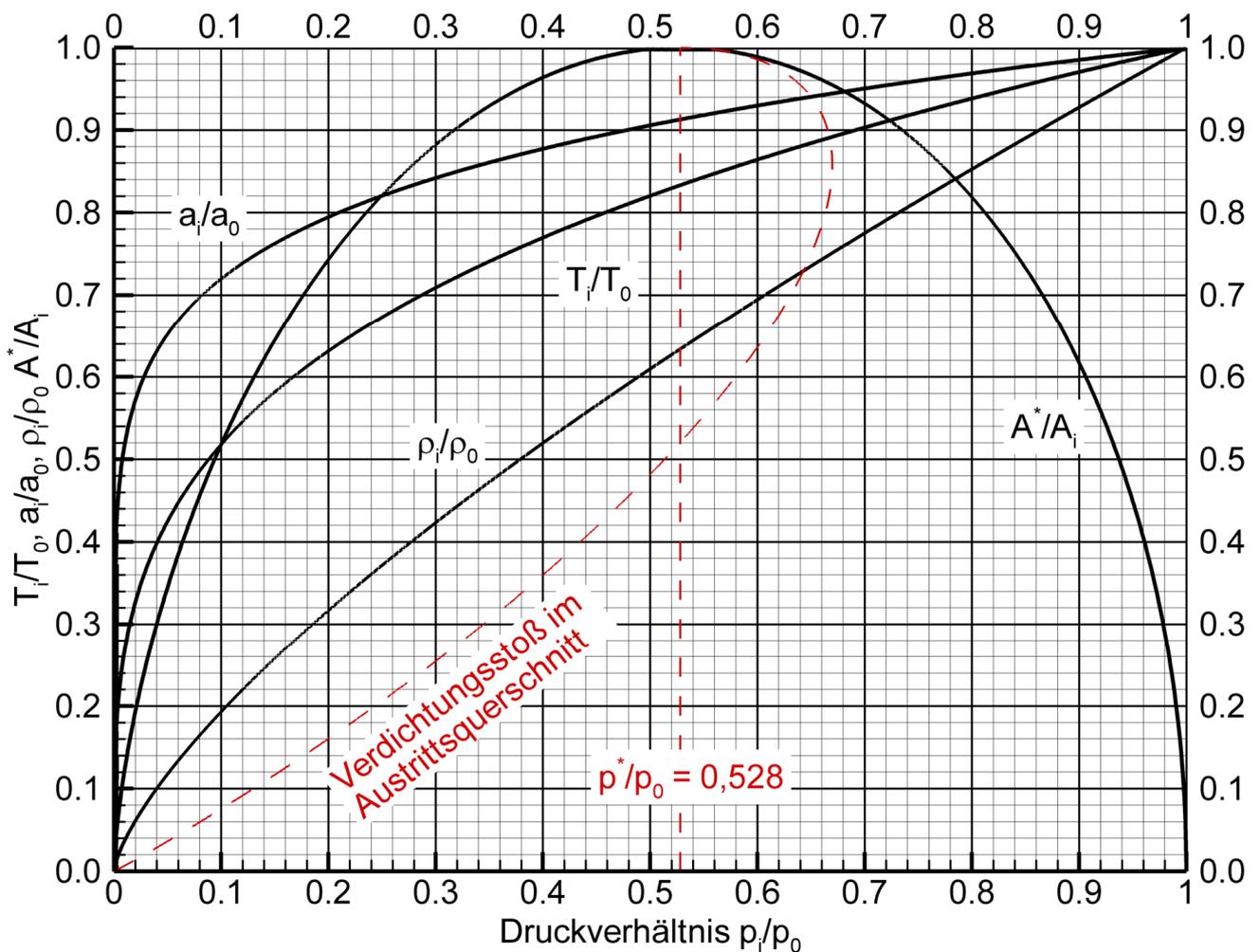


Abbildung 11.6-7: Verhältnisse verschiedener Größen über dem Druckverhältnis p/p_0 für $\kappa = 1.4$ bei isentroper Strömung

Die folgenden Diagramme geben den Verlauf ausgewählter Strömungsgrößen für die oben genannten Fälle wieder.

Abbildung 11.6-7 stellt die Erweiterung von Abbildung 11.5-7 dar. Der Verlauf folgender Formeln ist dort grafisch dargestellt:

$$\frac{T_i}{T_0} = \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad \frac{\rho_i}{\rho_0} = \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$\frac{a_i}{a_0} = \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \quad \text{Ma}_i = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1} \left(\left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right)} \quad \frac{A^*}{A_i} = 3,8639266 \cdot \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$$

Für die rein konvergente Düse ist nur der Unterschallbereich $p/p_0 > 0,528$ gültig. Auch der Fall der Unterschallströmung mit gerade Schallgeschwindigkeit bei der LAVAL-Düse bleibt auf diesen Bereich beschränkt.

Es ist an dieser Stelle folgender Hinweis notwendig: bei Vorhandensein einer konvergent-divergenten Düsenform reicht eine Überprüfung des Gegendruckverhältnisses p_u/p_0 auf Kritizität (d.h. $p_u/p_0 = p^*/p_0$) nicht aus, um zu entscheiden, ob irgendwo in der Düse Schallgeschwindigkeit oder Überschallgeschwindigkeit herrscht. Dazu muss in jedem Fall das entsprechende Flächenverhältnis A^*/A_E hinzugezogen werden.

Den Verlauf wichtiger Größenverhältnisse in Abhängigkeit von der Machzahl für Mach-Zahlen auch $\text{Ma} > 1$ stellt Abbildung 11.6-8 in Erweiterung zu Abbildung 11.5-8 dar.

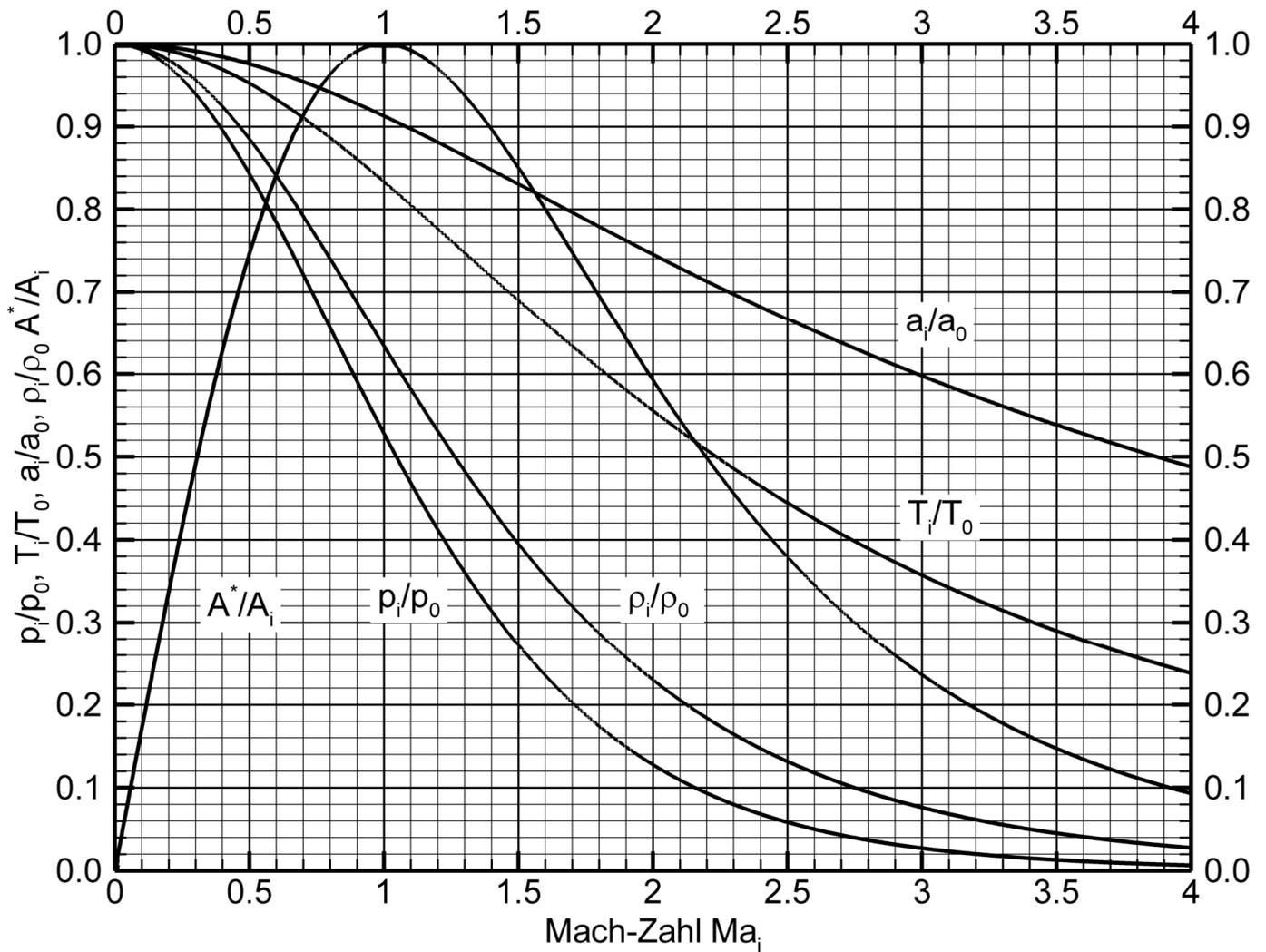


Abbildung 11.6-8: Verhältnisse verschiedener Größen über der Mach-Zahl Ma für $\kappa = 1.4$

Der Verlauf folgender Formeln ist hier grafisch dargestellt:

$$\frac{p_i}{p_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma_i^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}$$

$$\frac{T_i}{T_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma_i^2\right)^{-1}$$

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma_i^2\right)^{\frac{1}{1-\kappa}}$$

$$\frac{a_i}{a_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{A^*}{A_i} = Ma_i \cdot \left[1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (Ma_i^2 - 1)\right]^{\frac{1+\kappa}{2(1-\kappa)}}$$

11.6.4 Nichtangepasste Überschalldüsen

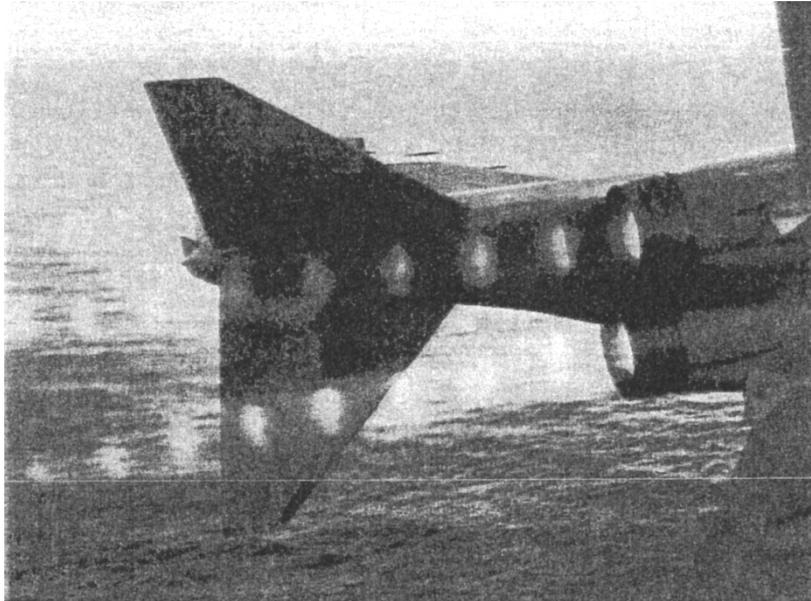


Abbildung 11.6-9: Überschallgasstrahlen eines Phantom-Kampfflugzeuges bei nicht-angepassten Düsen

Eine Düse wird als „nichtangepasst“ bezeichnet, wenn der Druck in ihrem Austrittsquerschnitt p_E ungleich dem Umgebungs-/Gegendruck p_u ist. Im Gegensatz zu einem Unterschallgasstrahl, der stets bei Gleichdruck an der Düsenmündung austritt, weil der Mündungsdruck einen regulierenden Einfluss auf die Strömung ausübt, kann ein Überschallgasstrahl nicht nur gegen Gleichdruck sowie gegen beliebig starken Unterdruck, sondern bis zu einem gewissen Grad auch gegen Überdruck ausströmen. In den meisten Betriebsfällen ist bei einem Überschallstrahl der Düsenaustrittsdruck p_E nicht gleich dem Umgebungs- bzw. Gegendruck p_u . Ist der Umgebungsdruck *kleiner* als der statische Druck des Gasstrahls im Austrittsquerschnitt der Düse, so spricht man von einem *unterexpandierten* Strahl. Dies erfordert eine Nachexpansion des Gases hinter dem Düsenendquerschnitt: An den Austrittskanten setzen Expansionsfächer an und der Strahl erweitert sich außerhalb der Düse (Abbildung 11.6-10).

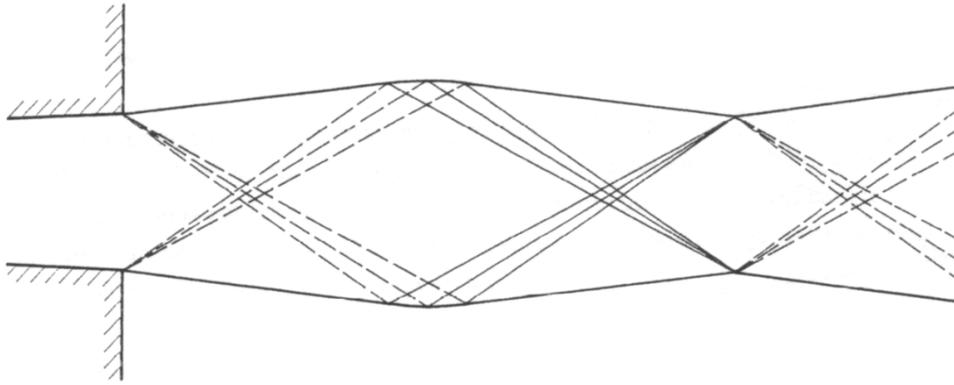


Abbildung 11.6-10: Unterexpandierter Überschallstrahl. Nachexpansion

Die sich kreuzenden Wellen des Expansionsfächers werden an der Freistrahlgrenze als Kompressionswellen reflektiert. Im Strahlkern ist der Druck stromab von den Expansionswellen kleiner als der Umgebungsdruck, stromab von den Kompressionswellen dagegen größer. Das periodische Wechselspiel von Expansion und Kompression setzt sich solange fort, bis die wachsenden Mischungszonen am Strahlrand das Strömungsfeld beherrschen und der Überschallstrahl dann - meist über eine geradstoßähnliche Front - in einen Unterschallstrahl übergeführt wird.

Ist der Umgebungsdruck *größer* als der statische Druck des Gasstrahls am Düsenaustritt, so spricht man von einem *überexpandierten* Strahl. Von den Austrittskanten der Düse geht ein Verdichtungsstoßsystem aus. Der Freistrahls wird eingeschnürt, und der Druck im Strahlzentrum steigt stromabwärts auf Werte über den Gegendruck an. Die Verdichtungswellen werden am Strahlrand als Expansionswellen reflektiert; der Strahl Druck fällt. Dieser Vorgang wiederholt sich und entspricht weiterhin dem Strömungsfeld der oben erwähnten Strahlunterexpansion (Abbildung 11.6-11).

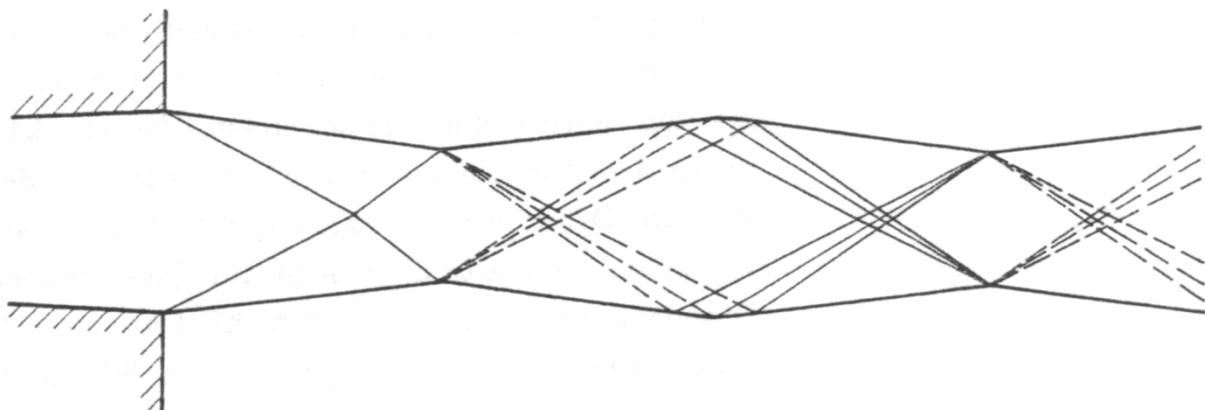
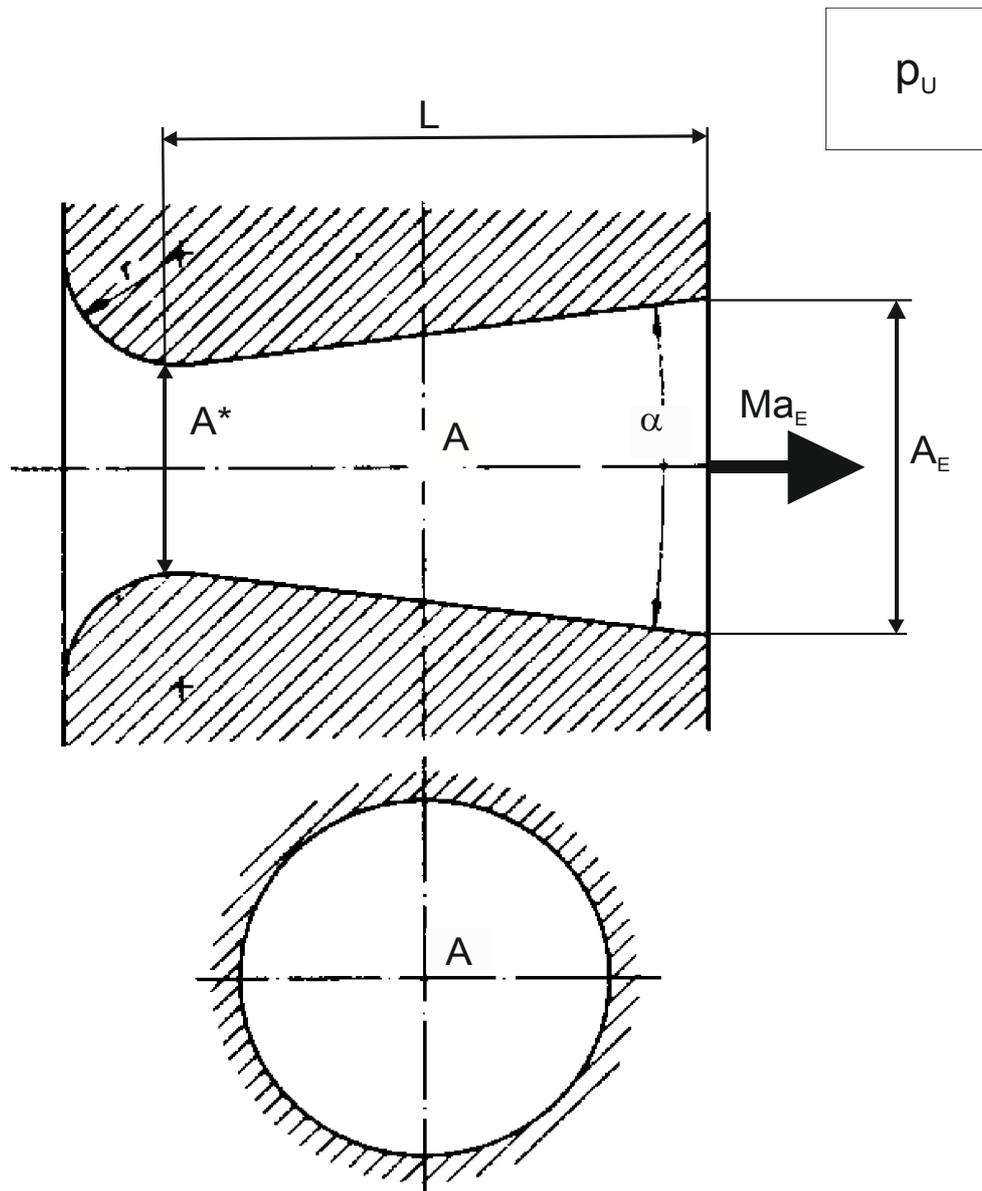


Abbildung 11.6-11: Überexpandierter Überschallstrahl. Nachkompression

11.6.5 Konstruktive Gestaltung von LAVAL-Düsen

LAVAL-Düsen in Strahlapparaten, Strahltriebwerken und kleinen Dampfturbinen werden meist kegelförmig mit Kreisquerschnitten ausgeführt, wobei der Erweiterungswinkel α mit Rücksicht auf eine ablösungsfreie Strömung normalerweise unter 10° liegen sollte.



$$\frac{A_E - A^*}{2 \cdot L} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{und} \quad L = \frac{1}{2}(A_E - A^*) \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Abbildung 11.6-12: LAVAL-Düse im Strahltriebwerk

LAVAL-Düsen in Raketenmotoren und sehr schnell fliegenden Überschallstrahltriebwerken haben mit Rücksicht auf einen guten Wirkungsgrad oft etwas glockenförmige Gestalt. Mit derartigen Düsen werden besonders hohe Überschallgeschwindigkeiten erzielt.

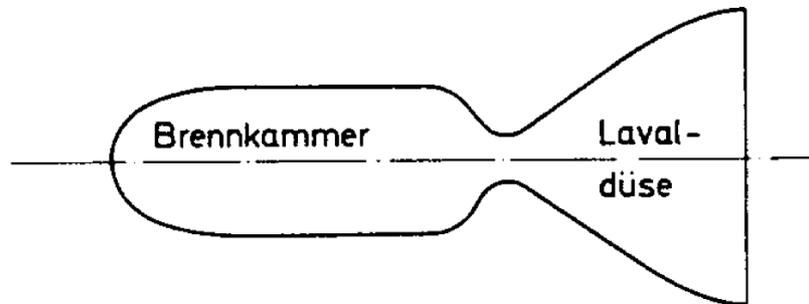


Abbildung 11.6-13: LAVAL-Düse im Überschalltriebwerk

In den Leiträdern der Regelstufen von Dampfturbinen werden die Konturen der LAVAL-Düsenkanäle durch die Druck- und Saugseite von geeignet ausgebildeten Profilen gebildet. Der Erweiterungswinkel α sollte auch hier den Wert 10° nach Möglichkeit nicht überschreiten.

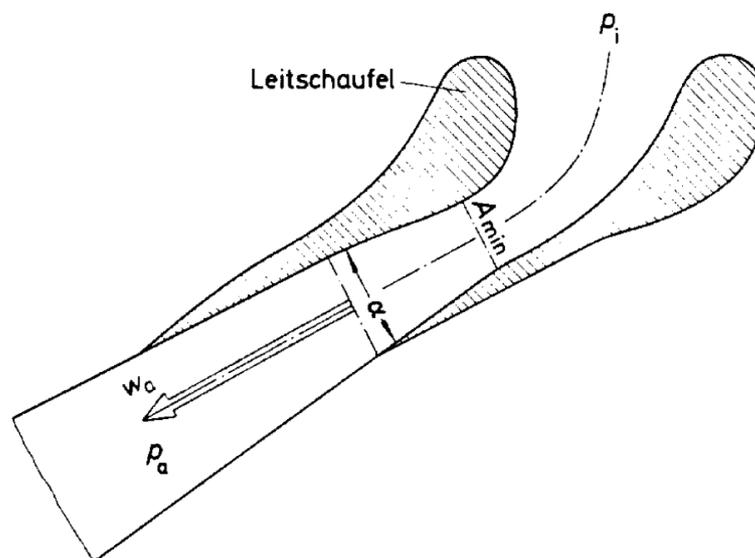


Abbildung 11.6-14: LAVAL-Düse im Leitrad

11.7. Senkrechter Verdichtungsstoß in einer LAVAL-Düse

Im Kapitel 11.6 ist in Abbildung 11.6-5 als Kurve C eine Überschallströmung in einer LAVAL-Düse dargestellt, die als solche aufgrund des vorliegenden, nicht-angepassten Druckverhältnisses $p_u' = p_u/p_0$ nicht bis zum Austrittsquerschnitt erhalten bleibt, sondern vorher über einen so genannten „**Verdichtungsstoß**“ schlagartig in eine Unterschallströmung übergeht. Dieser Sachverhalt ist schematisch in Abbildung 11.7-1 dargestellt.

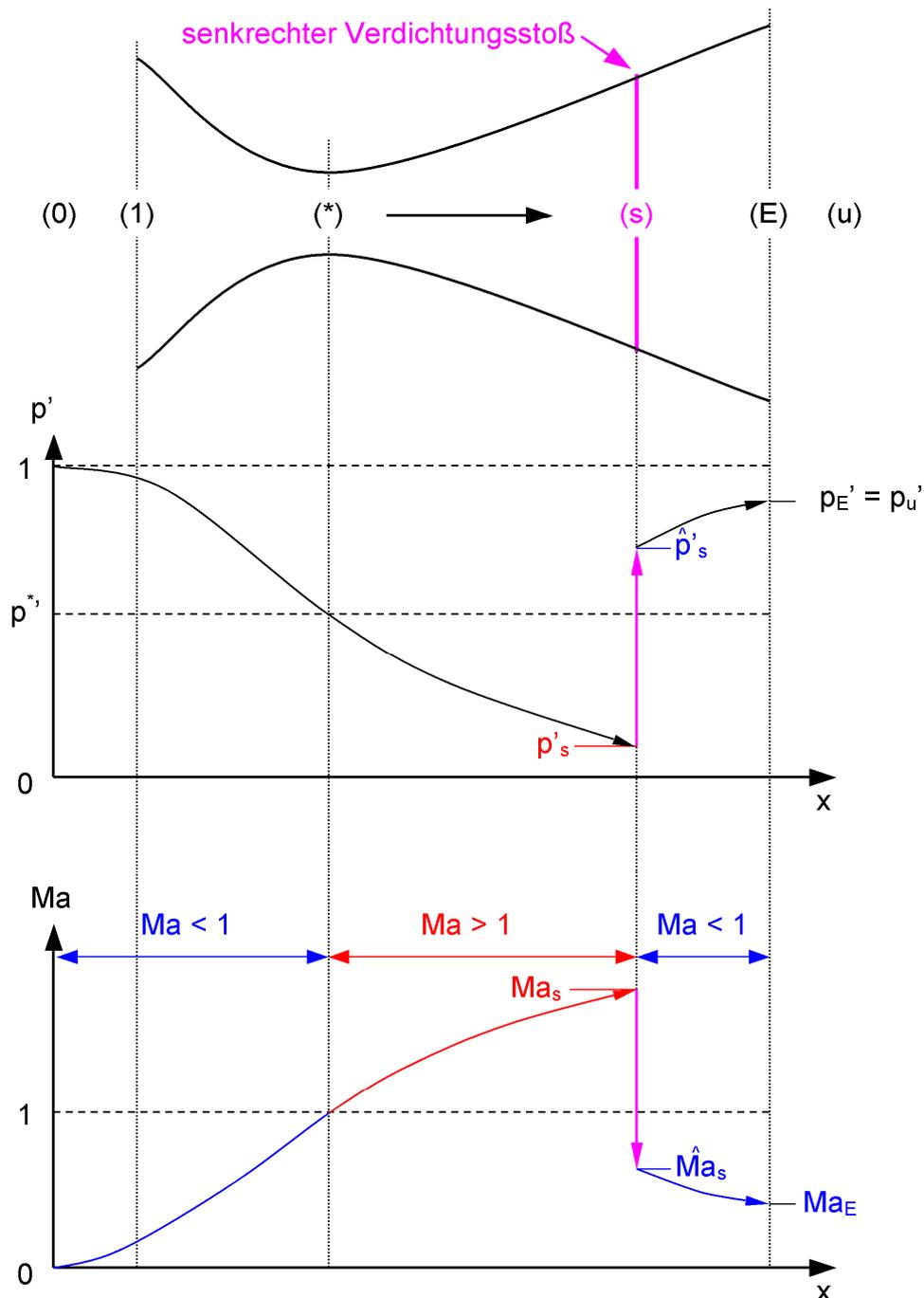


Abbildung 11.7-1: Druck- und Machzahlverteilung in der LAVAL-Düse bei einem Verdichtungsstoß

Im Folgenden soll das Phänomen des Verdichtungsstoßes genauer untersucht werden. Dieser wird dabei modellhaft als Ebene betrachtet, über die hinweg es zu einem sprunghaften Anstieg von Druck, Dichte und Temperatur bei der Verzögerung der Strömung kommt.

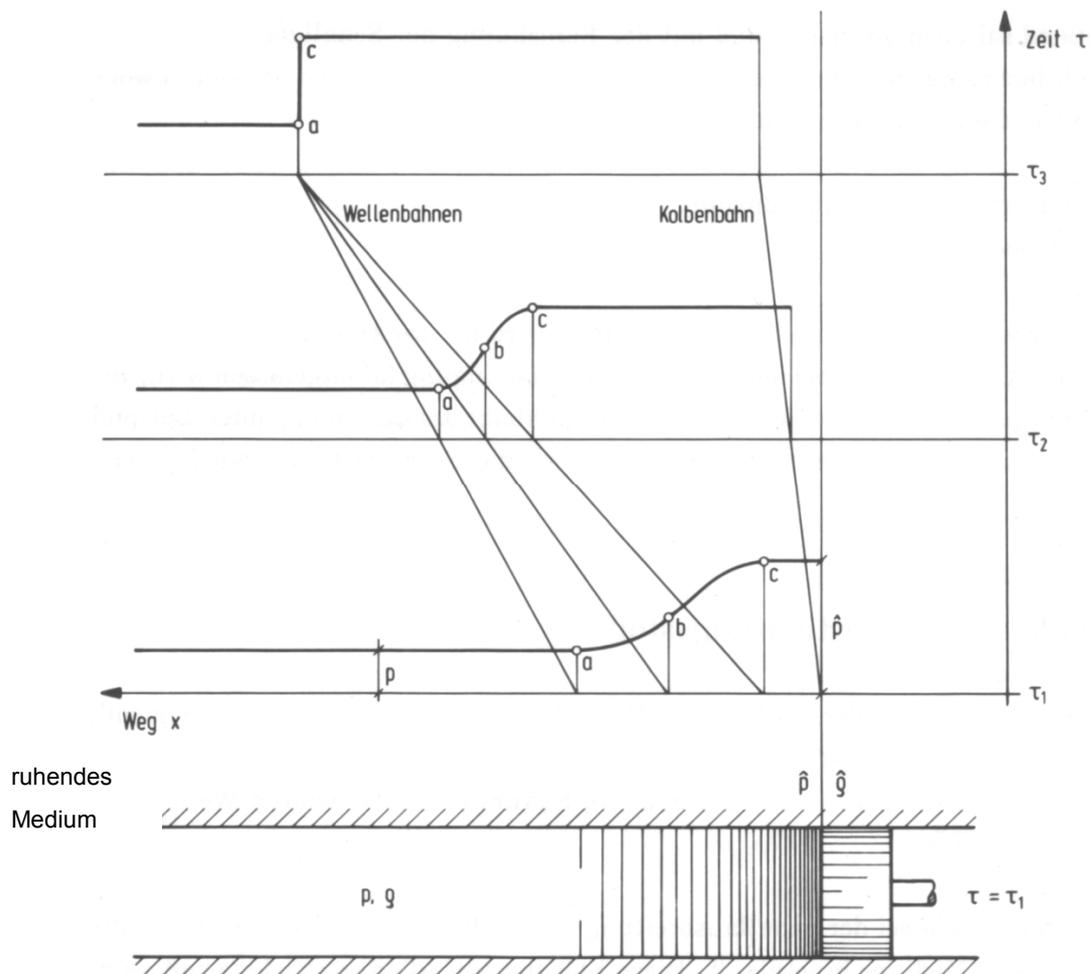


Abbildung 11.7-2: Entstehung eines Verdichtungsstoßes durch schnelle Kolbenbewegung

Es wird – wie bei der Schallausbreitung – eine Dichte- bzw. Druckstörung, die in ein ruhendes Medium hineinläuft, betrachtet. Diese Störung soll allerdings jetzt groß sein, hervorgerufen durch eine schnelle Kolbenbewegung (siehe Abbildung 11.7-2). Dies führt dazu, dass die Zustandsänderung der Größen **nicht mehr isentrop** verläuft.

Die Zustandsänderungen über den Verdichtungsstoß erfolgen nicht isentrop (anisentrop), es treten Strömungsverluste auf. Die bisher verwendeten isentropen Verhältnissgleichungen können über den Stoß hinweg nicht verwendet werden.

Auch wenn der Kolben dazu aus seiner Ruhelage sehr plötzlich bewegt wurde, so wird doch die Kolbenbeschleunigung endlich sein und somit über die Welle, die vor dem Kolben ins ruhende Medium läuft, nur ein endlicher Dichtegradient vorliegen, etwa wie für den Zeitpunkt $\tau = \tau_1$. Im ruhenden Medium ist die Dichte ρ , unmittelbar vor dem Kolben $\hat{\rho}$ und zwischen den beiden Bereichen ist ein kontinuierlicher Übergang. Entsprechend ist vor dem Kolben der Druck \hat{p} und im ruhenden Medium p . Die kontinuierliche Verdichtung des Mediums zwischen den Punkten a und c ergibt sich aus einer unendlichen Vielzahl differentiell kleiner Kompressionen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Kompressionswellen entspricht dabei der jeweiligen lokalen Schallgeschwindigkeit, da sich jede Druckstörung stets mit der lokalen Schallgeschwindigkeit ausbreitet. Die lokale Schallgeschwindigkeit aber variiert mit der lokalen Temperatur. Je stärker die Verdichtung ist, desto höher ist die Temperatur und desto größer die Laufgeschwindigkeit der Welle (das ist die lokale Schallgeschwindigkeit). Dies führt dazu, dass die schnelleren Wellen die langsameren einholen.

Im Zeit-Weg-Diagramm wird dies durch die Konvergenz der Wellenbahnen deutlich. Ein Schnittpunkt der Wellenbahnen bedeutet, dass eine sprunghafte Änderung der Zustandsgrößen erfolgt, die Kompressionswellen sind zu einem Verdichtungsstoß vereint. Der Verdichtungsstoß läuft mit einer Geschwindigkeit U in das ruhende Medium hinein, wobei hier zunächst nur abgeschätzt werden kann, dass die Laufgeschwindigkeit des Stoßes etwa zwischen der Schallgeschwindigkeit des ruhenden Mediums und der des kolbennahen, komprimierten Mediums liegen wird. Damit ist auch zu erwarten, dass seine Laufgeschwindigkeit größer wird, je stärker die Kompression ist. Durch einen Wechsel des Bezugssystems kommt man auch hier, ähnlich wie bei der Schallausbreitung, sofort zu einem stationären Strömungsmodell (Abbildung 11.7-3).

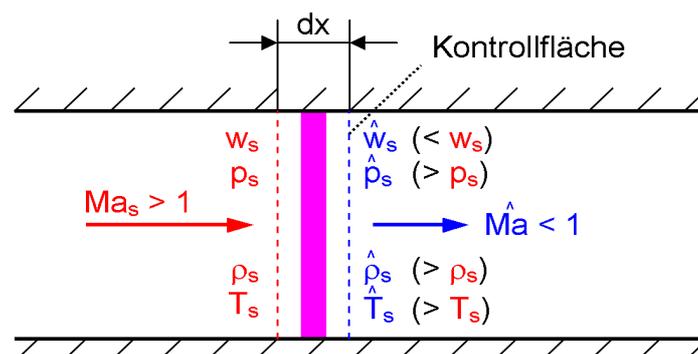


Abbildung 11.7-3: Senkrechter Verdichtungsstoß in einem Rohr. Statische Z. Gr. vor und nach dem VS

11.7.1 Änderung der Strömungsgrößen über den Stoß

Im Rahmen der eindimensionalen Modellvorstellung können Verhältnisse der Zustandsgrößen über den Verdichtungsstoß hinweg aus der Bilanz über einen Kontrollraum ermittelt werden, der eine infinitesimal kleine Erstreckung dx in Strömungsrichtung aufweist und den Verdichtungsstoß einschließt.

Die Annahme einer Stromröhre mit konstantem Querschnitt A_s ist nicht unbedingt erforderlich wenn das Kontrollvolumen ganz dicht an die Stoßfront herangezogen wird und die Stoßfront selbst sehr dünn ist, was man praktisch stets voraussetzen kann. Die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie lauten ausgeschrieben wie folgt; die Größen mit dem „Dach ^“ kennzeichnen die Position direkt nach dem Stoß:

I.	$\rho_s \cdot w_s \cdot A_s = \hat{\rho}_s \cdot \hat{w}_s \cdot A_s$	Masse	(11.7-1)
II.	$p_s \cdot A_s + \rho_s \cdot w_s^2 \cdot A_s = \hat{p}_s \cdot A_s + \hat{\rho}_s \cdot \hat{w}_s^2 \cdot A_s$	Impuls	(11.7-2)
III.	$c_p \cdot T_s + \frac{w_s^2}{2} = c_p \cdot \hat{T}_s + \frac{\hat{w}_s^2}{2}$	Energie	(11.7-3)

Die Energiegleichung Gl. (11.7-3) zusammen mit dem idealen Gasgesetz

IV.	$\frac{p}{\rho} = R \cdot T \quad \text{und} \quad \frac{\hat{p}_s}{\hat{\rho}_s} = R \cdot \hat{T}_s$		(11.2-1)
-----	--	--	----------

Ergibt eine andere Form der Energiegleichung, die in folgender Rechnung verwendet wird:

	$\kappa \cdot \frac{p_s}{\rho_s} + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot w_s^2 = \kappa \cdot \frac{\hat{p}_s}{\hat{\rho}_s} + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \hat{w}_s^2$	Energie	(11.7-4)
--	---	---------	----------

Es liegen somit insgesamt **drei** Gleichungen vor, mit denen sich die Größen \hat{p} , \hat{T} , $\hat{\rho}$ und \hat{w} nach dem Stoß berechnen lassen. Ziel der nachfolgenden Herleitungen ist die

Bestimmung der Verhältnisse (\hat{p}_s/p_s) , (\hat{T}_s/T_s) , $(\hat{\rho}_s/\rho_s)$, (\hat{w}_s/w_s) , (\hat{a}_s/a_s) und (\hat{M}_{a_s}/Ma_s) als Funktion der bekannten Anström-Machzahl $f(Ma_s)$.

Der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber wird in den folgenden Herleitungen mitunter auf den Index (s) zur Kennzeichnung des Stoßes verzichtet.

1. Zuerst wird der Massenerhaltungssatz Gl. (11.7-1) nach \hat{w} aufgelöst und die Abkürzung $\varepsilon = \rho/\hat{\rho}$ eingeführt (A_s wird gekürzt):

$\hat{w} = w \cdot \frac{\rho}{\hat{\rho}} \Rightarrow \hat{w} = w \cdot \varepsilon$	(11.7-5)
---	----------

2. Dies wird in den Impulssatz Gl. (11.7-2) eingesetzt und dieser nach \hat{p}/p aufgelöst:

$p + \rho \cdot w^2 = \hat{p} + \hat{\rho} \cdot (w \cdot \varepsilon)^2$ $\hat{p} = p + \rho \cdot w^2 - \hat{\rho} \cdot w^2 \cdot \varepsilon^2$ $\frac{\hat{p}}{p} = 1 + \frac{\rho}{p} \cdot w^2 - \frac{\hat{\rho}}{p} \cdot w^2 \cdot \varepsilon^2$	
---	--

Neuordnung der rechten Seite

$\frac{\hat{p}}{p} = 1 + \frac{w^2}{\frac{p}{\rho}} - \frac{\hat{\rho}}{\rho \cdot \frac{p}{\rho}} \cdot w^2 \cdot \varepsilon^2$	
---	--

und Erweitern mit κ führt zu:

$\frac{\hat{p}}{p} = 1 + \frac{\kappa \cdot w^2}{\kappa \cdot \frac{p}{\rho}} - \left(\frac{\hat{\rho}}{\rho} \right) \cdot \frac{\kappa}{\kappa \cdot \frac{p}{\rho}} \cdot w^2 \cdot \varepsilon^2$	
--	--

Mit der Schallgeschwindigkeit

$a^2 = \kappa \cdot \frac{p}{\rho}$	(11.4-7)
-------------------------------------	----------

und $\hat{p}/\rho = 1/\varepsilon$ erhält man:

$\frac{\hat{p}}{p} = 1 + \kappa \cdot \left(\frac{w^2}{a^2}\right) - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \kappa \cdot \left(\frac{w^2}{a^2}\right) \cdot \varepsilon^2$	
---	--

Mithilfe der Mach-Zahl

$Ma = \frac{w}{a}$	(11.5-6)
--------------------	----------

vereinfacht sich der aus der Massen- und Impulsbilanz entstandene Ausdruck zu:

$\frac{\hat{p}}{p} = (1 + \kappa \cdot Ma^2) - \kappa \cdot Ma^2 \cdot \varepsilon^2$	(11.7-6)
---	----------

3. Die Energiegleichung

$\kappa \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot w^2 = \kappa \cdot \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}} + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \hat{w}^2$	(11.7-4)
---	----------

wird durch

$a^2 = \kappa \cdot \frac{p}{\rho}$	(11.4-7)
-------------------------------------	----------

dividiert.

$$1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \left(\frac{w^2}{a^2} \right) = \left(\frac{\hat{p}}{p} \right) \cdot \left(\frac{\rho}{\hat{\rho}} \right) + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \left(\frac{\hat{w}^2}{a^2} \right)$$

Das zusammen mit der umgeformten Kontinuitätsgleichung $\hat{w} = w \cdot \varepsilon$ (11.7-5) sowie der Substitution $\varepsilon = \rho / \hat{\rho}$ ergibt

$$1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \left(\frac{w^2}{a^2} \right) = \left(\frac{\hat{p}}{p} \right) \cdot \varepsilon + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \left(\frac{w^2}{a^2} \right) \cdot \varepsilon^2$$

Mit der Mach-Zahl $Ma = w/a$ wird daraus

$$1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2 = \left(\frac{\hat{p}}{p} \right) \cdot \varepsilon + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2 \cdot \varepsilon^2$$

Hierin wird der Ausdruck für \hat{p}/p aus (11.7-6) eingesetzt:

$$1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2 = \underbrace{\left[(1 + \kappa \cdot Ma^2) - \kappa \cdot Ma^2 \cdot \varepsilon \right]}_{\hat{p}/p} \cdot \varepsilon + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2 \cdot \varepsilon^2$$

Ausmultiplizieren und Neuordnen nach ε und ε^2 liefert:

$$1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2 = \varepsilon \cdot (1 + \kappa \cdot Ma^2) + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2 - \kappa \cdot Ma^2 \right) \quad (11.7-7)$$

Der Term nach ε^2 wird durch elementare Umformung vereinfacht:

$$\left(\frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2 - \kappa \cdot Ma^2 \right) = \left(\frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2 - \frac{2 \cdot \kappa}{2} \cdot Ma^2 \right) = \left(-\frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2 \right)$$

Gl. (11.7-7) wird durch diesen Ausdruck dividiert und ergibt nach einer Neuordnung

$$\varepsilon^2 + \varepsilon \cdot \frac{(1 + \kappa \cdot \text{Ma}^2)}{\underbrace{\left(-\frac{\kappa + 1}{2} \cdot \text{Ma}^2\right)}_A} - \frac{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \text{Ma}^2\right)}{\underbrace{\left(-\frac{\kappa + 1}{2} \cdot \text{Ma}^2\right)}_B} = 0 \quad (11.7-8)$$

was eine quadratische Bestimmungsgleichung

$$\varepsilon^2 + A \cdot \varepsilon + B = 0$$

für $\varepsilon = \rho/\hat{\rho}$ mit den konstanten Faktoren

$$A = \frac{1 + \kappa \cdot \text{Ma}^2}{-\frac{\kappa + 1}{2} \cdot \text{Ma}^2} = \dots = -\left[\frac{2}{(\kappa + 1) \cdot \text{Ma}^2} + \frac{2\kappa}{\kappa + 1}\right] \text{ und}$$

$$B = -\frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \text{Ma}^2}{-\frac{\kappa + 1}{2} \cdot \text{Ma}^2} = \dots = \frac{2}{(\kappa + 1) \cdot \text{Ma}^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$$

darstellt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(-A \pm \sqrt{A^2 - 4B} \right) \quad (11.7-9)$$

Der folgende Vergleich von A und B zeigt, dass $B+1 = -A$:

$$B + 1 = \frac{2}{(\kappa + 1) \cdot \text{Ma}^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} + \frac{\kappa + 1}{\kappa + 1} = \frac{2}{(\kappa + 1) \cdot \text{Ma}^2} + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} = -A$$

Somit gilt: $B = -A - 1 \rightarrow -B = A + 1 \rightarrow -4B = 4A + 4$ und die Lösung von Gl. (11.7-9) kann weiter vereinfacht werden zu:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(-A \pm \sqrt{A^2 + 4A + 4} \right) = \frac{1}{2} \left(-A \pm \sqrt{(A+2)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(-A \pm (A+2) \right)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} (-A + A + 2) = 1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} (-A - (A+2)) = -(A+1) = B$$

Die vorstehenden Beziehungen für ε_1 , ε_2 sind die Lösungen einer quadratischen Gleichung (11.7-8). Sie werden jetzt physikalisch gedeutet. Die Lösung für $\varepsilon_1 = \rho/\hat{\rho} = 1$ ist trivial, d.h. die Dichte ändert sich nicht. Die Lösung für ε_2 , welche uns interessiert, soll die sprunghafte Änderung der Zustandsgrößen beschreiben:

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\hat{\rho}} = B = \frac{2}{(\kappa+1) \cdot Ma^2} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch weiter vereinfachen, indem wir die Terme auf den gleichen Nenner bringen:

$$\frac{2}{(\kappa+1) \cdot Ma^2} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} = \frac{2}{(\kappa+1) \cdot Ma^2} + \frac{(\kappa-1) \cdot Ma^2}{(\kappa+1) \cdot Ma^2} = \frac{2 + (\kappa-1) \cdot Ma^2}{(\kappa+1) \cdot Ma^2}$$

Es ist somit

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\hat{\rho}} = \frac{2 + (\kappa-1) \cdot Ma^2}{(\kappa+1) \cdot Ma^2}$$

und das gesuchte Verhältnis der Dichten hinter ($\hat{\rho}_s$) und vor dem Stoß (ρ_s) lautet:

$$\frac{\hat{\rho}_s}{\rho_s} = \frac{(\kappa+1) \cdot Ma_s^2}{2 + (\kappa-1) \cdot Ma_s^2} \quad (11.7-10)$$

Der Einsatz der Kontinuitätsgleichung

$\rho \cdot w = \hat{\rho} \cdot \hat{w} \Rightarrow \frac{\hat{w}}{w} = \frac{\rho}{\hat{\rho}}$	(11.7-6)
---	----------

liefert sofort den nächsten gesuchten Ausdruck für das Geschwindigkeitsverhältnis:

$\frac{\hat{w}_s}{w_s} = \frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma_s^2}{(\kappa + 1) \cdot Ma_s^2}$	(11.7-11)
---	-----------

Das Druckverhältnis erhält man direkt durch Einsetzen von $\varepsilon = B$ in

$\frac{\hat{p}}{p} = (1 + \kappa \cdot Ma^2)^{-\kappa} \cdot Ma^2 \cdot \varepsilon$	(11.7-6)
--	----------

und anschließendes Umformen.

$\begin{aligned} \frac{\hat{p}}{p} &= (1 + \kappa \cdot Ma^2)^{-\kappa} \cdot Ma^2 \cdot \frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2}{(\kappa + 1) \cdot Ma^2} = \\ &= (1 + \kappa \cdot Ma^2)^{-\kappa} \cdot \frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2}{(\kappa + 1)} = \\ &= \frac{(1 + \kappa \cdot Ma^2) \cdot (\kappa + 1)}{(\kappa + 1)} - \frac{2\kappa + \kappa^2 \cdot Ma^2 - \kappa \cdot Ma^2}{(\kappa + 1)} = \\ &= \frac{\kappa + \kappa^2 \cdot Ma^2 + 1 + \kappa \cdot Ma^2 - 2\kappa - \kappa^2 \cdot Ma^2 + \kappa \cdot Ma^2}{(\kappa + 1)} = \\ &= \frac{(\kappa + 1) + 2\kappa \cdot Ma^2 - 2\kappa}{(\kappa + 1)} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (Ma^2 - 1) \end{aligned}$	
--	--

$\frac{\hat{p}_s}{p_s} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (Ma_s^2 - 1)$	(11.7-12)
---	-----------

Unter Zuhilfenahme des idealen Gasgesetzes

$\frac{p}{\rho} = R \cdot T \Rightarrow T = \frac{p}{R \cdot \rho} \text{ und } \hat{T} = \frac{\hat{p}}{R \cdot \hat{\rho}}$	(11.2-1)
---	----------

folgt für das Temperaturverhältnis:

$\frac{\hat{T}}{T} = \frac{\frac{\hat{p}}{R \cdot \hat{\rho}}}{\frac{p}{R \cdot \rho}} = \frac{\hat{p} \rho}{\hat{\rho} p} = \frac{\hat{p} \rho}{\rho \hat{\rho}}$	
--	--

Hierin werden die zuvor bestimmten Ausdrücke des Druck- und Dichteverhältnisses eingesetzt:

$\begin{aligned} \frac{\hat{T}}{T} &= \frac{\hat{p} \rho}{\rho \hat{\rho}} = \left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (\text{Ma}^2 - 1) \right] \cdot \frac{2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}^2}{(\kappa + 1) \cdot \text{Ma}^2} = \\ &= \frac{(\kappa + 1) + 2\kappa \cdot (\text{Ma}^2 - 1)}{(\kappa + 1)} \cdot \frac{2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}^2}{(\kappa + 1) \cdot \text{Ma}^2} = \\ &= \frac{[\kappa + 1 + 2\kappa \cdot \text{Ma}^2 - 2\kappa] \cdot [2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}^2]}{(\kappa + 1)^2 \cdot \text{Ma}^2} = \\ &= \frac{[2\kappa \cdot \text{Ma}^2 - (\kappa - 1)] \cdot [2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}^2]}{(\kappa + 1)^2 \cdot \text{Ma}^2} \end{aligned}$		
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> $\frac{\hat{T}_s}{T_s} = \frac{(2\kappa \cdot \text{Ma}_s^2 - (\kappa - 1)) \cdot (2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}_s^2)}{(\kappa + 1)^2 \cdot \text{Ma}_s^2}$ </td> </tr> </table>	$\frac{\hat{T}_s}{T_s} = \frac{(2\kappa \cdot \text{Ma}_s^2 - (\kappa - 1)) \cdot (2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}_s^2)}{(\kappa + 1)^2 \cdot \text{Ma}_s^2}$	(11.7-13)
$\frac{\hat{T}_s}{T_s} = \frac{(2\kappa \cdot \text{Ma}_s^2 - (\kappa - 1)) \cdot (2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}_s^2)}{(\kappa + 1)^2 \cdot \text{Ma}_s^2}$		

Über das Verhältnis von Temperatur und Schallgeschwindigkeit $a^2 = \kappa \cdot R \cdot T$ und $\hat{a}^2 = \kappa \cdot R \cdot \hat{T}$

$\frac{a}{\hat{a}} = \sqrt{\frac{T}{\hat{T}}}$	(11.4-9)
--	----------

lässt sich das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten über den Stoß bestimmen

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> $\frac{\hat{a}_s}{a_s} = \sqrt{\frac{[2\kappa \cdot \text{Ma}_s^2 - (\kappa - 1)] \cdot [2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}_s^2]}{(\kappa + 1)^2 \cdot \text{Ma}_s^2}}$ </td> </tr> </table>	$\frac{\hat{a}_s}{a_s} = \sqrt{\frac{[2\kappa \cdot \text{Ma}_s^2 - (\kappa - 1)] \cdot [2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}_s^2]}{(\kappa + 1)^2 \cdot \text{Ma}_s^2}}$	(11.7-14)
$\frac{\hat{a}_s}{a_s} = \sqrt{\frac{[2\kappa \cdot \text{Ma}_s^2 - (\kappa - 1)] \cdot [2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}_s^2]}{(\kappa + 1)^2 \cdot \text{Ma}_s^2}}$		

Die Mach-Zahl \hat{Ma} hinter dem Stoß ergibt sich aus

$\frac{\hat{Ma}}{Ma} = \frac{\frac{\hat{w}}{\hat{a}}}{\frac{w}{a}} = \frac{\hat{w}}{w} \cdot \frac{a}{\hat{a}} = \frac{\hat{w}}{w} \cdot \left(\frac{\hat{a}}{a}\right)^{-1}$	
---	--

und den Verhältnissen

$\frac{\hat{w}}{w} = \frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2}{(\kappa + 1) \cdot Ma^2}$	(11.7-11)
---	-----------

und

$\frac{\hat{a}}{a} = \sqrt{\frac{[2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)] \cdot [2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2]}{(\kappa + 1)^2 \cdot Ma^2}}$	(11.7-14)
--	-----------

Zu

$\begin{aligned} \hat{Ma} &= Ma \cdot \frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2}{(\kappa + 1) \cdot Ma^2} \cdot \sqrt{\frac{(\kappa + 1)^2 \cdot Ma^2}{[2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)] \cdot [2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2]}} = \\ &= \sqrt{\frac{Ma^2 \cdot [2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2]^2 \cdot [(\kappa + 1)^2 \cdot Ma^2]}{[(\kappa + 1) \cdot Ma^2]^2 [2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)] \cdot [2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2]}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2}{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)}} \end{aligned}$	
--	--

$\hat{Ma}_s = \sqrt{\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma_s^2}{2\kappa \cdot Ma_s^2 - (\kappa - 1)}}$	
$\frac{\hat{Ma}_s}{Ma_s} = \frac{1}{Ma_s} \sqrt{\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma_s^2}{2\kappa \cdot Ma_s^2 - (\kappa - 1)}}$	(11.7-15)

Damit haben wir zunächst unser Ziel erreicht, die Verhältnisse \hat{p}_s/p_s , \hat{T}_s/T_s , $\hat{\rho}_s/\rho_s$, \hat{w}_s/w_s , \hat{a}_s/a_s und $\hat{M}a_s/Ma_s$ als Funktionen der Anström-Machzahl Ma_s zu ermitteln. Deren Verläufe sind als Abbildung 11.7-4 über der Anström-Mach-Zahl (vor dem Stoß) dargestellt.

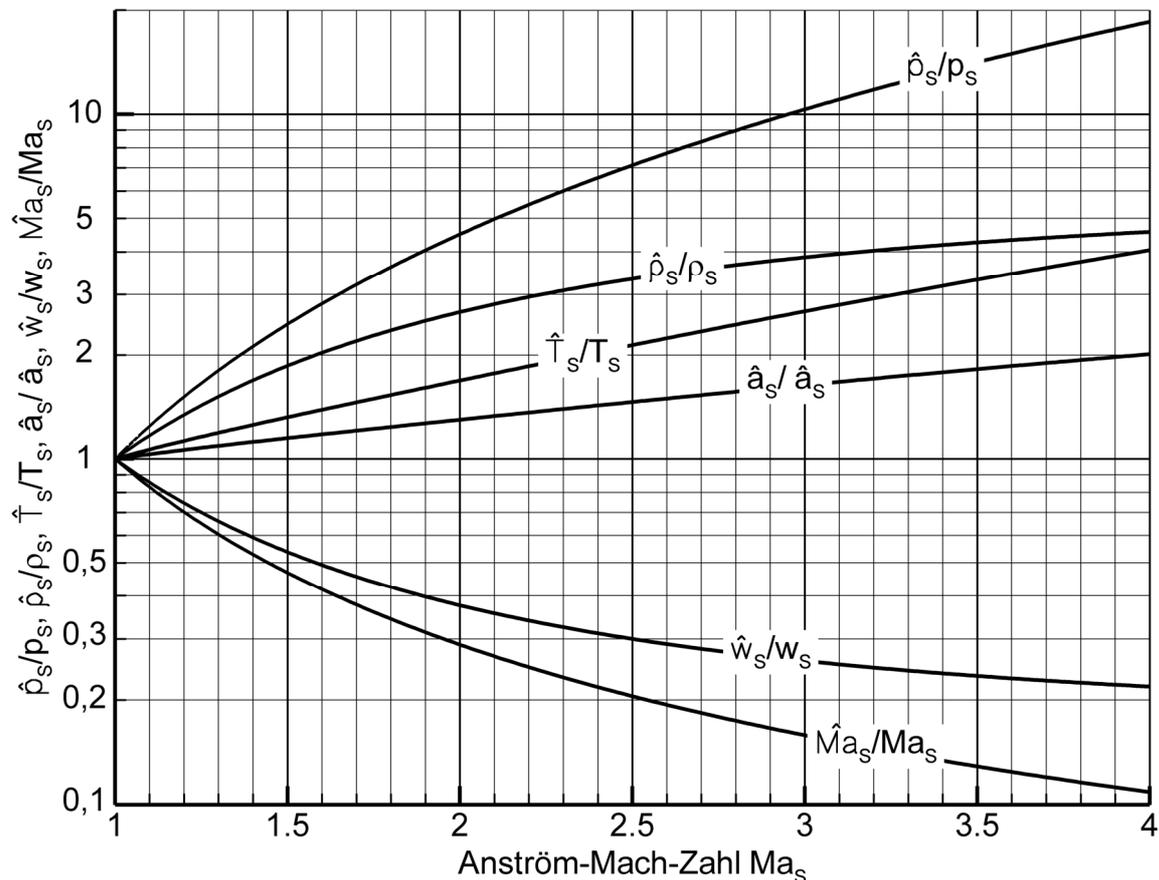
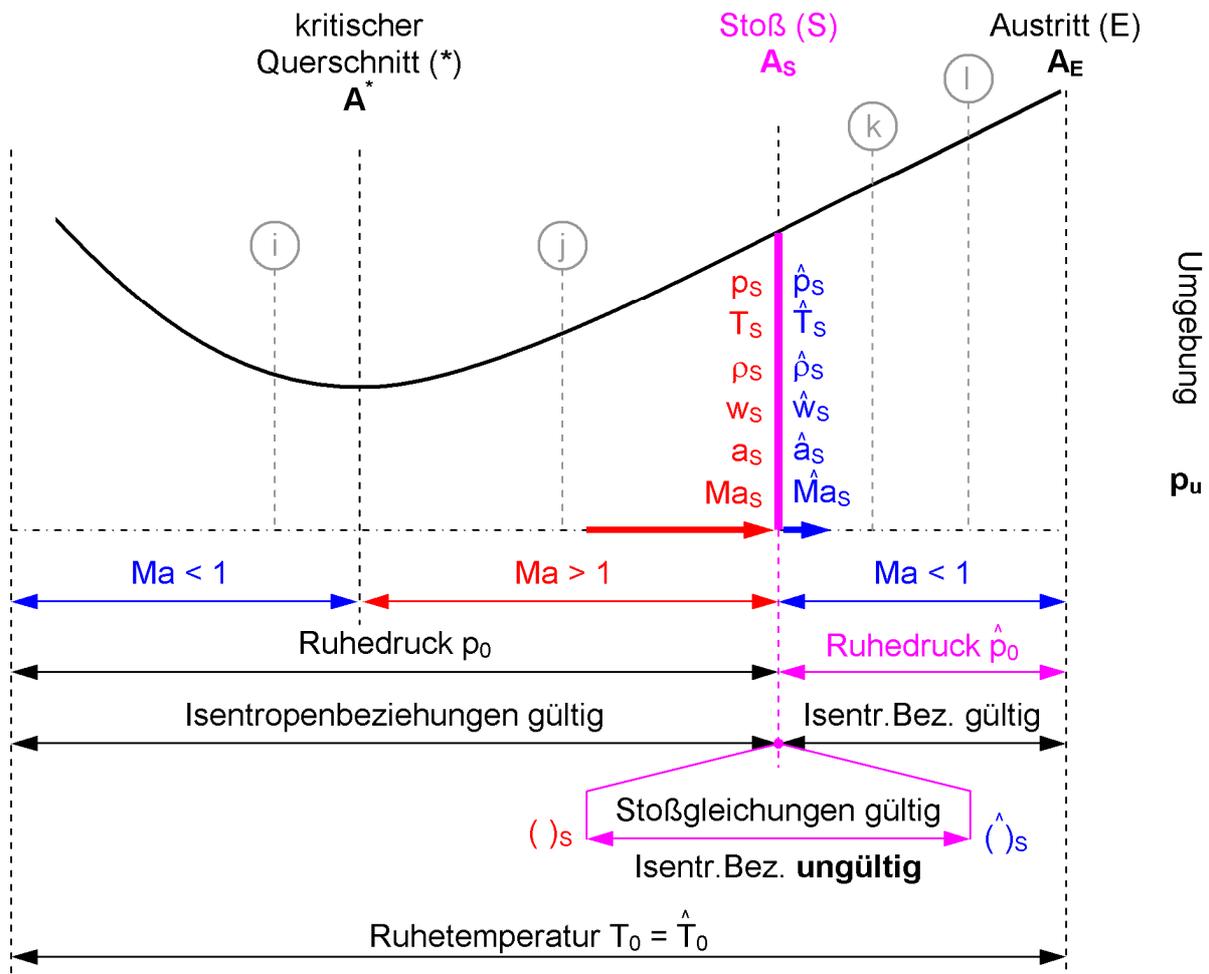


Abbildung 11.7-4: Änderung der Strömungsgrößen über den senkrechten Verdichtungsstoß

Der Verlauf folgender Formeln ist hier grafisch wiedergegeben:

$\frac{\hat{p}_s}{p_s} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (Ma_s^2 - 1)$	$\frac{\hat{w}_s}{w_s} = \frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma_s^2}{(\kappa + 1) \cdot Ma_s^2}$
$\frac{\hat{\rho}_s}{\rho_s} = \frac{(\kappa + 1) \cdot Ma_s^2}{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma_s^2}$	$\frac{\hat{a}_s}{a_s} = \sqrt{\frac{(2\kappa \cdot Ma_s^2 - (\kappa - 1)) \cdot (2 + (\kappa - 1) \cdot Ma_s^2)}{(\kappa + 1)^2 \cdot Ma_s^2}}$
$\frac{\hat{T}_s}{T_s} = \frac{(2\kappa \cdot Ma_s^2 - (\kappa - 1)) \cdot (2 + (\kappa - 1) \cdot Ma_s^2)}{(\kappa + 1)^2 \cdot Ma_s^2}$	$\frac{\hat{M}a_s}{Ma_s} = \frac{1}{Ma_s} \sqrt{\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma_s^2}{2\kappa \cdot Ma_s^2 - (\kappa - 1)}}$

Abbildung 11.7-5 zeigt zusammenfassend noch einmal eine Laval-Düse mit einem stehenden Verdichtungsstoß mit der in diesem Skript gebräuchlichen Nomenklatur, d.h. den verwendeten Indizes. Weiterhin sind die Gültigkeitsbereiche der Isentropenbeziehungen und Stoßgleichungen, die Machzahlen-Bereiche sowie der Ruhedruck vor und nach dem Stoß (die Berechnung erfolgt später) angegeben.



Achtung bei der Verwendung der Isentropenbeziehungen:

$i \leftrightarrow j$ möglich
$i \leftrightarrow k / l$ nicht möglich!
$j \leftrightarrow k / l$ nicht möglich!
$k \leftrightarrow l$ möglich

Abbildung 11.7-5: Schematische Darstellung einer Lavaldüse mit Verdichtungsstoß (die Dicke des Verdichtungsstoßes beträgt $0,23 \mu\text{m}$ bei $\rho = 1,4 \text{ kg/m}^3$, $T = 300 \text{ K}$ und $\text{Ma} = 2$)

- Ruhedruck p_0 : Kesseldruck für die Strömung vor dem Stoß.
- Ruhedruck \hat{p}_0 : Gesamtdruck für die Strömung nach dem Stoß. Mit diesem Kesseldruck und dem Gegendruck, bei dem der Verdichtungsstoß eingetreten ist,

kann in einer Laval-Düse keine Überschallgeschwindigkeit erreicht werden. Jedoch wird in einer gedachten Laval-Düse mit dem Druckverhältnis aus dem Gegendruck zum Ruhedruck nach dem Stoß zwar gerade Schallgeschwindigkeit ($Ma = 1$) im engsten Querschnitt der Düse erreicht, die aber sofort wieder in den Unterschall übergeht. Der gesamte divergente Düsenteil wirkt als Unterschalldiffusor. Diese gedachte Laval-Düse wird fortan eine *fiktive* Laval-Düse (siehe Kap.11.7.3).

An dieser Stelle sei wiederholt darauf hingewiesen (siehe Seite 84), dass die Verwendung der Isentropenbeziehungen zur Berechnung von Strömungsgrößen über den Stoß hinweg nicht erlaubt ist. Einzig die in diesem Kapitel hergeleiteten Stoßgleichungen können hierfür herangezogen werden.

Im Vorangegangenen sind die Änderungen der Zustandsgrößen über den Stoß als Funktion der Anström-Mach-Zahl behandelt worden. Da aber die Stärke eines Stoßes am anschaulichsten mit dem **Drucksprung** über den Stoß beschrieben wird, ist es angebracht, die Zustandsänderungen auch als Funktion dieses **Druckverhältnisses** \hat{p}_s/p_s oder $\Delta p_s/p_s = (\hat{p}_s - p_s)/p_s$ zu betrachten.

Das Druckverhältnis liefert unmittelbar durch Umformen

$\frac{\hat{p}}{p} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (Ma^2 - 1)$	(11.7-12)
---	-----------

den Zusammenhang

$Ma_s^2 = 1 + \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \left(\frac{\hat{p}_s}{p_s} - 1 \right)$	(11.7-16)
--	-----------

Damit ergeben sich aus

$\frac{\hat{p}}{p} = \frac{(\kappa + 1) \cdot Ma^2}{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2} \text{ und}$	(11.7-10)
---	-----------

$\frac{\hat{T}}{T} = \frac{(2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)) \cdot (2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2)}{(\kappa + 1)^2 \cdot Ma^2}$	(11.7-13)
---	-----------

die so genannten Rankine-Hugoniot-Beziehungen, mit denen die Zustandsgrößen nach und vor dem Stoß in Relation stehen:

$\frac{\hat{p}}{\rho} = \frac{1 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\frac{\hat{p}}{\rho}\right)}{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} + \left(\frac{\hat{p}}{\rho}\right)}$	(11.7-17)
$\frac{\hat{T}}{T} = \frac{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} + \left(\frac{\hat{p}}{\rho}\right)}{1 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\frac{\hat{p}}{\rho}\right)} \left(\frac{\hat{p}}{\rho}\right)$	(11.7-18)

Aus (11.7-17) lässt sich sofort der Grenzwert $(\hat{\rho}/\rho)_{\max}$ für $\hat{p} \rightarrow \infty$ (also für $Ma \rightarrow \infty$) ablesen.

$\frac{\hat{\rho}}{\rho} = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \Big _{\hat{p} \rightarrow \infty}$	
--	--

Es wird an dieser Stelle noch etwas zur Änderung einer weiteren Zustandsgröße, nämlich der Entropie, gesagt werden. Wie vorab schon erwähnt, ist die Unstetigkeit in der Strömung verlustbehaftet, was sich in einem Entropieanstieg widerspiegeln muss.

Wir gehen von der bekannten anisotropen Zustandsgleichung der Thermodynamik

$\frac{\hat{p}_s}{\rho_s} = e^{\frac{\hat{s}-s}{c_v}} \left(\frac{\hat{p}_s}{\rho_s}\right)^\kappa$	
---	--

aus und erhalten durch beiderseitiges Logarithmieren

$\ln \frac{\hat{p}}{p} = \frac{\hat{s} - s}{c_v} \quad \left(\frac{\hat{p}}{\rho} \right)^\kappa$	
--	--

Mit

$\frac{\hat{p}}{\rho} = \frac{(\kappa + 1) \cdot Ma^2}{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2} \quad \text{und}$	(11.7-10)
$\frac{\hat{p}}{p} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (Ma^2 - 1)$	(11.7-12)

erhalten wir

$\frac{\hat{s} - s}{c_v} = \ln \left[\frac{1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot (Ma^2 - 1)}{\left(\frac{(\kappa + 1) \cdot Ma^2}{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2} \right)^\kappa} \right]$	
---	--

Kurze Umformung liefert einen Ausdruck für die Entropiezunahme in Abhängigkeit von der Anström-Machzahl Ma_s .

$\frac{\hat{s} - s}{c_v} = \ln \left\{ \left[1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot (Ma_s^2 - 1) \right] \cdot \left[\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma_s^2}{(\kappa + 1) \cdot Ma_s^2} \right]^\kappa \right\}$	(11.7-19)
--	-----------

Wie in Abbildung 11.7-6 dargestellt ist, nimmt die Entropie mit zunehmender Mach-Zahl zu, es ist also $\hat{s} > s$. Bei $Ma_s = 1$ ist sie gleich Null.

Der Anstieg der Dichte über einen Stoß nähert sich bei hohen Mach-Zahlen einem Grenzwert $(\hat{p}/\rho)_{\max} = (\kappa + 1)/(\kappa - 1)$. Der Fall $Ma_s = 1$ entspricht einer Schallwelle. Man erkennt, dass der Anstieg der Entropie-Änderung bei $Ma_s = 1$ Null ist, was bedeutet, dass Stöße mit niedriger Überschall-Mach-Zahl ($Ma_s \gtrsim 1$) als näherungsweise isentrop angesehen werden können.

Für Unterschallströmungen ($Ma_s < 1$) würde sich nach (11.7-19) eine Entropieabnahme ergeben, was bedeutet, dass im Unterschall keine Stöße auftreten können.

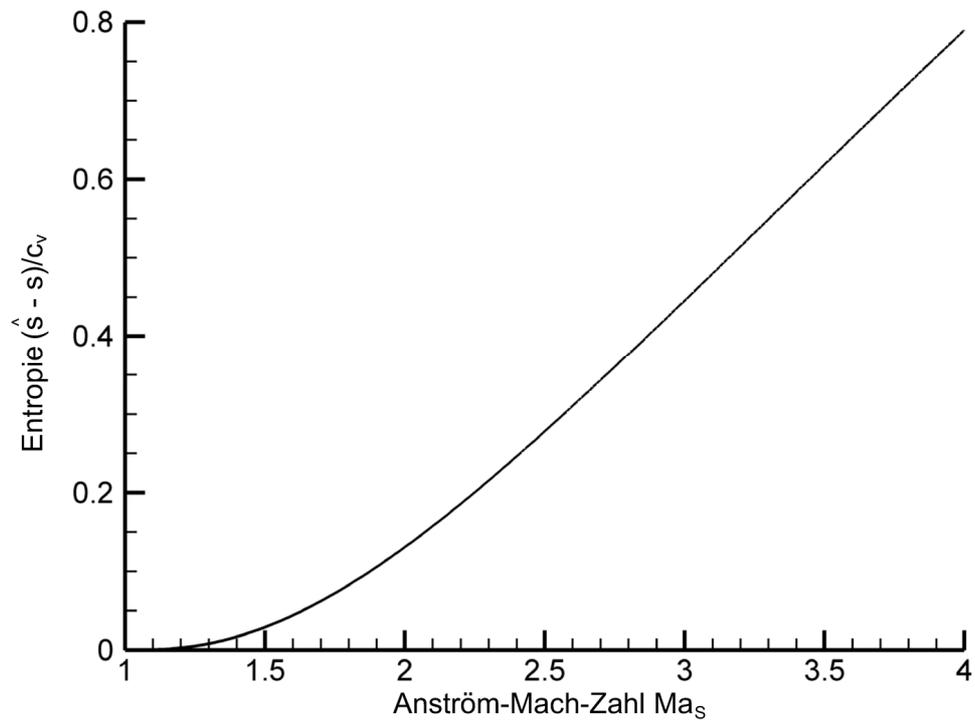


Abbildung 11.7-6: Entropieänderung über den senkrechten Verdichtungsstoß

11.7.2 Änderung der Ruhegrößen (**Gesamtgrößen**) über den Stoß

Bisher haben wir die Änderungen der statischen Zustandsgrößen über den senkrechten Verdichtungsstoß (VS) beschrieben. Jetzt wollen wir abschließend überlegen, wie sich die Ruhegrößen (=Gesamtgrößen) über einen Stoß ändern. Unser Ziel ist somit die Ermittlung von \hat{T}_0/T_0 , \hat{p}_0/p_0 und $\hat{\rho}_0/\rho_0$.

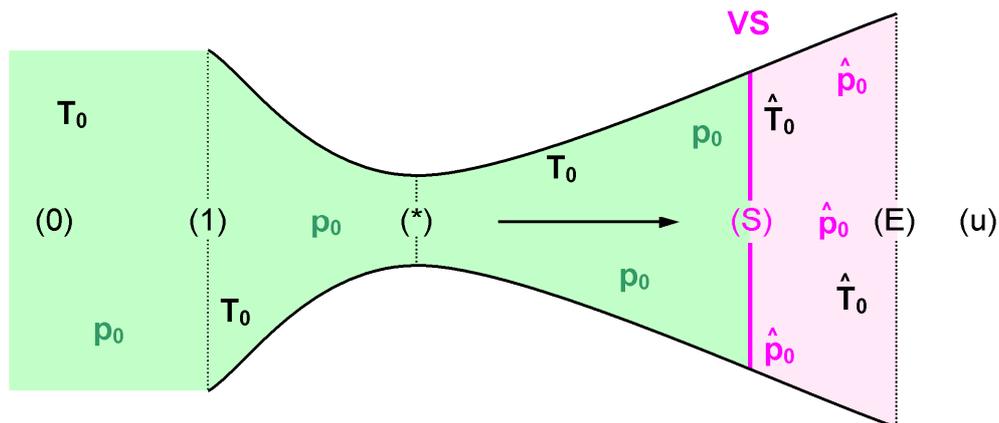


Abbildung 11.7-7: Ruhegrößen in einer Lavaldüse mit senkrechtem Verdichtungsstoß

Abbildung 11.7-8 verdeutlicht die zu untersuchenden Bereiche mit den zugehörigen Ruhegrößen, wobei nur Ruhetemperatur und –druck dargestellt sind; die Dichte ergibt sich aus beiden über das ideale Gasgesetz.

Aus dem Energieerhaltungssatz zwischen den Stellen vor VS und hinter VS

$\frac{1}{2} \cdot w^2 + c_p \cdot T = \text{konst.} = \frac{w_0^2}{2} + c_p \cdot T_0 = \frac{\hat{w}_0^2}{2} + c_p \cdot \hat{T}_0$	(11.3-3)
---	----------

folgt unmittelbar, dass sich die Ruhetemperatur über den Stoß nicht ändert:

$T_0 = \hat{T}_0$	(11.7-20)
-------------------	-----------

somit auch $a_0 = \hat{a}_0$.

Das Verhältnis der Ruhedrucke vor und nach dem Stoß erhält man aus der anisotropen Zustandsgrößenbeziehung aus der Thermodynamik

$\frac{p_0}{\hat{p}_0} = \left(\frac{T_0}{\hat{T}_0} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \cdot e^{-\frac{s_0 - \hat{s}_0}{c_p - c_v}},$	(11.7-21)
--	-----------

die sich mit $\hat{T}_0 = T_0$ vereinfacht zu

$\frac{p_0}{\hat{p}_0} = e^{-\frac{s_0 - \hat{s}_0}{c_p - c_v}}.$	
---	--

Hinsichtlich der Entropie ist festzustellen, **dass nicht zwischen Ruhe- und statischer Entropie unterschieden wird; es ist somit $\hat{s}_0 = \hat{s}$ und $s_0 = s$.** Der Nenner im Exponent der rechten Seite wird mit c_v erweitert und umgeformt

$\frac{p_0}{\hat{p}_0} = e^{-\frac{s - \hat{s}}{c_p - c_v} \cdot \frac{c_v}{c_v}} = e^{-\frac{\hat{s} - s}{c_v} \cdot \frac{1}{\frac{c_p}{c_v} - 1}}$	
---	--

Einsetzen von

$\frac{\hat{s} - s}{c_v} = \ln \left\{ \left[1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot (Ma^2 - 1) \right] \cdot \left[\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2}{(\kappa + 1) \cdot Ma^2} \right]^\kappa \right\} \text{ und}$	(11.7-19)
--	-----------

$\frac{c_p}{c_v} = \kappa$	(11.2-10)
----------------------------	-----------

ergibt bei Hineinziehen von $1/(\kappa-1)$ in den Logarithmus

$\frac{p_0}{\hat{p}_0} = e^{-\ln \left\{ \left[1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot (Ma^2 - 1) \right] \cdot \left[\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2}{(\kappa + 1) \cdot Ma^2} \right]^\kappa \right\} \cdot \frac{1}{\kappa - 1}} = e^{-\ln \left\{ \left[1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot (Ma^2 - 1) \right] \cdot \left[\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2}{(\kappa + 1) \cdot Ma^2} \right]^\kappa \right\}^{\frac{1}{\kappa - 1}}}$	
---	--

und schließlich das gesuchte Ruhedruckverhältnis

$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \left[1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot (\text{Ma}_s^2 - 1) \right]^{\frac{1}{1-\kappa}} \cdot \left[\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}_s^2}{(\kappa + 1) \cdot \text{Ma}_s^2} \right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}$	(11.7-22a)
--	------------

Infolge des Entropiezuwachses nimmt der Gesamtdruck über den Stoß ab. Dieser Gesamtdruckverlust $\Delta p_0 = p_0 - \hat{p}_0$ kann somit ähnlich wie der Entropieanstieg als Maß für die mit einem Stoß verbundenen Strömungsverluste angesehen werden. Eine analytische Lösung für $\text{Ma} = f(\hat{p}_0/p_0)$ gibt es nicht, die Machzahl lässt sich bei bekanntem Ruhedruckverhältnis aus Abbildung 11.7-8 ablesen.

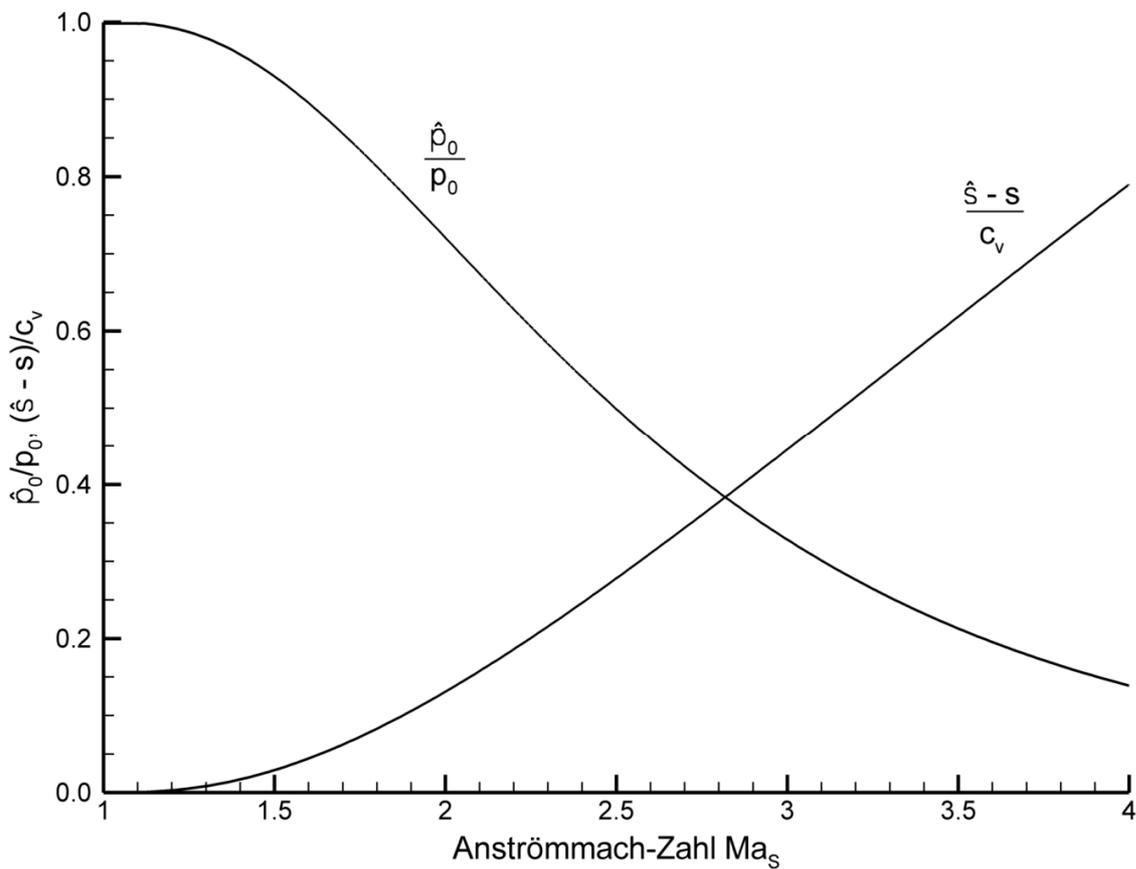


Abbildung 11.7-8: Änderung des Ruhedruckes über den senkrechten Verdichtungsstoß und Entropiezunahme

Anwendung der Gl. 11.7-22a:

Anwendung in der Praxis finden die Stoßgleichungen beispielsweise bei der Bestimmung der Mach-Zahl eines Flugzeugs im Überschallflug mit Hilfe eines Pitot-Rohres (Abbildung 11.7-10) oder in einer Überschallströmung.

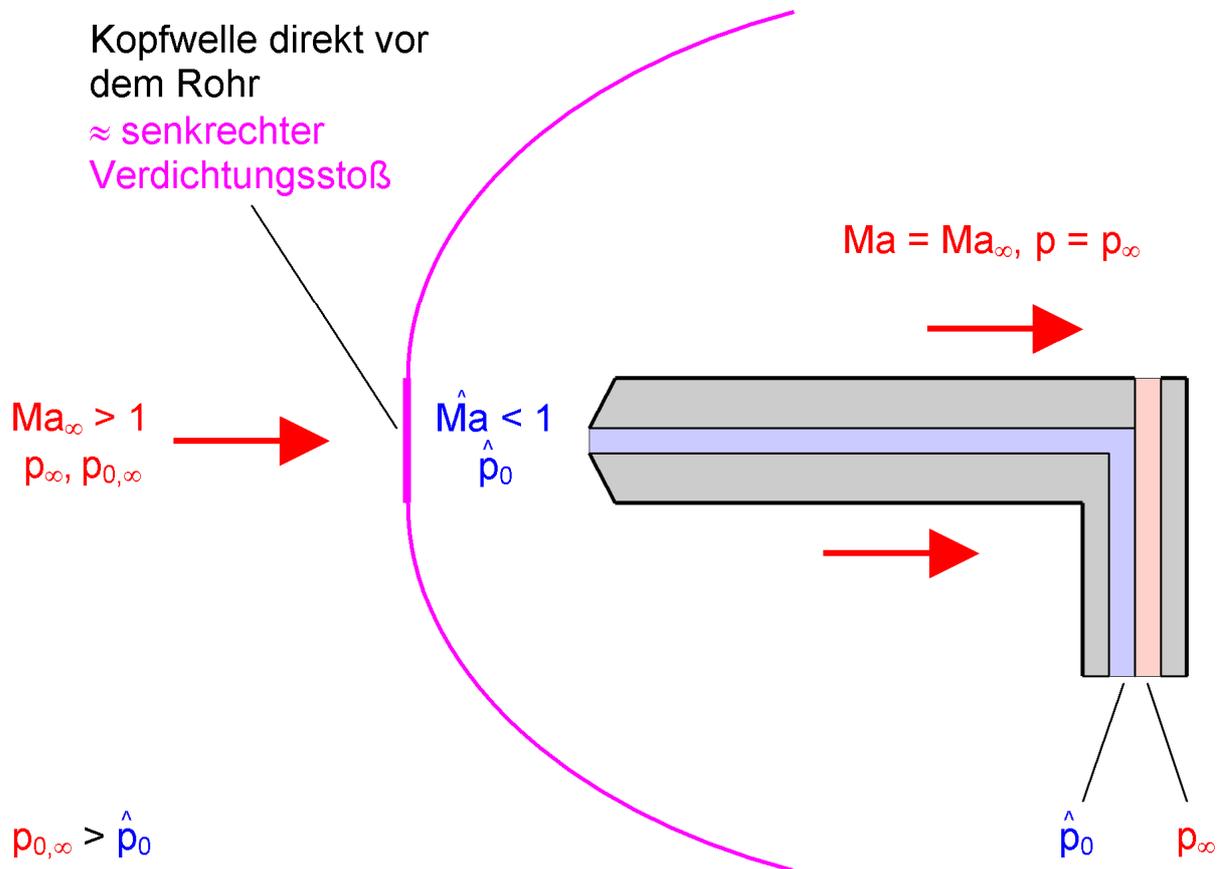


Abbildung 11.7-9: Pitot-Rohr in einer Überschallströmung mit abgelöstem Verdichtungsstoß

In einer Überschallströmung stellt das in der Strömung befindliche Pitot-Rohr eine Störung dar und verursacht einen abgelösten Verdichtungsstoß, der unmittelbar vor dem Rohr als senkrecht angesehen werden kann. Der mit dem Pitot-Rohr gemessene Druck ist der Gesamtdruck nach dem Stoß \hat{p}_0 und nicht der größere *Ruhe/Gesamtdruck* der Anströmung $p_{0,\infty}$.

Weiter stromabwärts hat sich aufgrund von Expansionswellen wieder der gleiche Zustand wie im Unendlichen (∞) eingestellt (gleichbedeutend direkt vor dem Verdichtungsstoß (s) mit der Anström-Machzahl Ma_∞) so dass mit einer Wandbohrung dort der statische Druck p_∞ gemessen werden kann, der dem Druck vor dem Verdichtungsstoß p_s entspricht.

Es stellt sich die Frage, was man mit diesen beiden mit dem Pitot-Rohr gemessenen Drücken, \hat{p}_0 und $p_s = p_\infty$ bestimmen kann? Damit lässt sich die Anström-Machzahl bestimmen, da mit den beiden gemessenen Drücken der funktionelle Zusammenhang $p_s/\hat{p}_0 = f(\text{Ma}_\infty)$ bestimmt werden kann. Im Folgenden wird er hergeleitet.

Das gemessene Druckverhältnis p_s/\hat{p}_0 kann mit dem Gesamtdruck erweitert werden, womit es über bekannte Beziehungen dargestellt werden kann:

$\frac{p_s}{\hat{p}_0} = \frac{\left(\frac{p_s}{p_0}\right)}{\left(\frac{\hat{p}_0}{p_0}\right)}$	(11.7-23)
---	-----------

Einsetzen von

$\frac{p_s}{p_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \text{Ma}_s^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \text{ (isentropie Strömung) und}$	(11.5-15)
---	-----------

$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \left[1 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot (\text{Ma}_s^2 - 1)\right]^{\frac{1}{1-\kappa}} \cdot \left[\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}_s^2}{(\kappa + 1) \cdot \text{Ma}_s^2}\right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}$	(11.7-22a)
--	------------

in (11.7-23) und Umstellen ergibt den gesuchten Zusammenhang zwischen dem mit dem Pitot-Rohr gemessenen Druckverhältnis und der Anström-Machzahl $\text{Ma}_\infty = \text{Ma}_s$.

$\frac{p_s}{\hat{p}_0} = \left\{ \frac{1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (\text{Ma}_s^2 - 1)}{\left(\frac{\kappa + 1}{2} \text{Ma}_s^2\right)^\kappa} \right\}^{\frac{1}{\kappa - 1}}, \text{ daraus iterativ } \text{Ma}_\infty = f(p_s/\hat{p}_0)$	
---	--

Daraus kann über einen iterativen Prozess die Anström-Machzahl $\text{Ma}_\infty = \text{Ma}_s$ berechnet werden.

Weiter mit der Vorlesung: Bestimmung der Verhältnisse der Ruhegrößen nach und vor dem Verdichtungsstoß:

Nachdem das Verhältnis der Ruhedrucke bestimmt wurde, bleibt noch das Verhältnis der Ruhedichten zu bestimmen. Aus der Zustandsgleichung des idealen Gases

$\frac{\hat{p}_0}{\hat{\rho}_0} = R \cdot \hat{T}_0 \quad \text{und} \quad \frac{p_0}{\rho_0} = R \cdot T_0$	(11.2-1)
--	----------

folgt mit $\hat{T}_0 = T_0$

$\frac{\frac{\hat{p}_0}{\hat{\rho}_0}}{\frac{p_0}{\rho_0}} = \frac{R \cdot \hat{T}_0}{R \cdot T_0} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\hat{p}_0}{\hat{\rho}_0} = \frac{p_0}{\rho_0}$	
---	--

<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 5px;"> $\frac{\hat{p}_0}{\hat{\rho}_0} = \frac{p_0}{\rho_0}$ </div>	(11.7-24)
---	-----------

Damit haben wir unser Ziel erreicht, die Verhältnisse der Ruhegrößen über einen senkrechten Stoß zu beschreiben.

Es ist unbedingt zu beachten, dass sich die *Kessel/Ruhe/Gesamtgrößen* über den Stoß hinweg ändern, die Strömung nach dem Stoß aus einem anderem Kesselzustand hervorgeht, als die Strömung vor dem Stoß. Beiden Zuständen gemeinsam ist die spezifische Gesamtenergie ($\frac{w_i^2}{2} + c_p \cdot T_i$), die sich über den Stoß hinweg nicht verändert.

Herleitung Nr. 2 (eine umständliche und langwierige Übung): Die in diesem Kapitel dargestellte Herleitung kann auch auf anderem Wege erreicht werden. Eine alternative Herleitung zu (11.7-22a) sei im Folgenden aufgeführt. Statt die anisentrope Zustandsgrößenbeziehung

$\frac{p_0}{\hat{p}_0} = \left(\frac{T_0}{\hat{T}_0} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \cdot e^{-\frac{s_0 - \hat{s}_0}{c_p - c_v}}$	(11.7-21)
---	-----------

zu verwenden, werden die Ruhedrucke p_0 und \hat{p}_0 über die Beziehung

$\frac{p_i}{p_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_i^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}$	(11.5-15)
--	-----------

bestimmt. Es ist dann

$p_0 = \frac{p_s}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_s^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}} \quad \text{und} \quad \hat{p}_0 = \frac{\hat{p}_s}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \hat{Ma}_s^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}}$	
--	--

Das Verhältnis der Ruhedrucke lautet dann

$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{\hat{p}_s \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_s^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}}{p_s \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \hat{Ma}_s^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}}$	
---	--

Das Druckverhältnis \hat{p}_s/p_s wird durch

$\frac{\hat{p}_s}{p_s} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (Ma_s^2 - 1)$	(11.7-12)
---	-----------

ersetzt.

Im Folgenden wird wieder auf den Index (s) zur Kennzeichnung des Stoßes verzichtet.

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{p}_0}{p_0} &= \frac{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \hat{Ma}^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}} \cdot \left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (Ma^2 - 1)\right) = \\
 &= \left[\frac{2 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2}{2 + \frac{\kappa-1}{2} \hat{Ma}^2}\right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left(\frac{\kappa+1}{\kappa+1} + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (Ma^2 - 1)\right) = \\
 &= \left[\frac{2 + (\kappa-1) \cdot Ma^2}{2 + (\kappa-1) \cdot \hat{Ma}^2}\right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left(\frac{(\kappa+1) + 2\kappa \cdot (Ma^2 - 1)}{\kappa+1}\right) = \\
 &= \left[\frac{2 + (\kappa-1) \cdot Ma^2}{2 + (\kappa-1) \cdot \hat{Ma}^2}\right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left(\frac{\kappa+1 + 2\kappa \cdot Ma^2 - 2\kappa}{\kappa+1}\right) = \\
 &= \left[\frac{2 + (\kappa-1) \cdot Ma^2}{2 + (\kappa-1) \cdot \hat{Ma}^2}\right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left(\frac{2\kappa \cdot Ma^2 - \kappa + 1}{\kappa+1}\right) = \\
 &= \left[\frac{2 + (\kappa-1) \cdot Ma^2}{2 + (\kappa-1) \cdot \hat{Ma}^2}\right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left(\frac{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa-1)}{\kappa+1}\right)
 \end{aligned}$$

Hierin wird der Ausdruck für die Mach-Zahl nach dem Stoß \hat{Ma}

$$\hat{Ma} = \sqrt{\frac{2 + (\kappa-1) \cdot Ma^2}{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa-1)}}$$

(11.7-15)

eingesetzt und es wird elementar umgeformt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{p}_0}{p_0} &= \left[\frac{2 + (\kappa-1) \cdot Ma^2}{2 + (\kappa-1) \cdot \sqrt{\frac{2 + (\kappa-1) \cdot Ma^2}{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa-1)}}}\right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left(\frac{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa-1)}{\kappa+1}\right) = \\
 &= \left[\frac{2 + (\kappa-1) \cdot Ma^2}{2 + (\kappa-1) \cdot \frac{2 + (\kappa-1) \cdot Ma^2}{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa-1)}}\right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left(\frac{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa-1)}{\kappa+1}\right)
 \end{aligned}$$

Es wird der erste Term elementar umgeformt

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2}{2 + (\kappa - 1) \cdot \frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2}{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)}} \right] = \\
 & = \left[\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2}{\frac{2 \cdot (2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1))}{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)} + \frac{(\kappa - 1) \cdot (2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2)}{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)}} \right] = \\
 & = \left[\frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2) \cdot (2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1))}{2 \cdot (2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)) + (\kappa - 1) \cdot (2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2)} \right] = \\
 & = \left[\frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2) \cdot (2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1))}{2\kappa + 2 + 4\kappa Ma^2 - 4\kappa + (\kappa - 1)^2 Ma^2 + 2\kappa - 2} \right] = \left[\frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2) \cdot (2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1))}{4\kappa Ma^2 + (\kappa - 1)^2 Ma^2} \right] = \\
 & = \left[\frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2) \cdot (2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1))}{Ma^2 \cdot (4\kappa + \kappa^2 - 2\kappa + 1)} \right] = \left[\frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2) \cdot (2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1))}{Ma^2 \cdot (\kappa^2 + 2\kappa + 1)} \right] = \\
 & = \left[\frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2) \cdot (2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1))}{Ma^2 \cdot (\kappa + 1)^2} \right]
 \end{aligned}$$

und in die Gleichung wieder eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{p}_0}{p_0} & = \left[\frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2) \cdot (2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1))}{Ma^2 \cdot (\kappa + 1)^2} \right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left(\frac{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right) = \\
 & = \left[\frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2) \cdot (2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1))}{Ma^2 \cdot (\kappa + 1)^2} \right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left(\frac{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1-\kappa}{1-\kappa}} = \\
 & = \left[\frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2)}{Ma^2 \cdot (\kappa + 1)} \right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left[\frac{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left(\frac{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1-\kappa}{1-\kappa}} = \\
 & = \left[\frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2)}{Ma^2 \cdot (\kappa + 1)} \right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left[\frac{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right]^{\frac{\kappa+1-\kappa}{1-\kappa}} = \\
 & = \left[\frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2)}{Ma^2 \cdot (\kappa + 1)} \right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left[\frac{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right]^{\frac{1}{1-\kappa}}
 \end{aligned}$$

$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \left[\frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2)}{Ma^2 \cdot (\kappa + 1)} \right]^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \cdot \left[\frac{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right]^{\frac{1}{1-\kappa}}$	(11.7-25)
---	-----------

Das ganze kann noch weiter vereinfacht werden. Es ist

$\begin{aligned} \frac{(2 + (\kappa - 1) \cdot Ma^2)}{Ma^2 \cdot (\kappa + 1)} &= \frac{1}{Ma^2} \left(\frac{2 + \kappa \cdot Ma^2 - Ma^2}{\kappa + 1} \right) = \frac{1}{Ma^2} \left(\frac{1 + \kappa + 1 - \kappa + \kappa \cdot Ma^2 - Ma^2}{\kappa + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{Ma^2} \left(\frac{(1 + \kappa) + \kappa(Ma^2 - 1) - (Ma^2 - 1)}{\kappa + 1} \right) = \frac{1}{Ma^2} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (Ma^2 - 1) \right) \end{aligned}$

und

$\frac{2\kappa \cdot Ma^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} = \frac{2\kappa \cdot Ma^2 - 2\kappa + \kappa + 1}{\kappa + 1} = 1 + \frac{2\kappa(Ma^2 - 1)}{\kappa + 1}$	
--	--

Damit wird (11.7-25) zu

$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \left[\frac{1}{Ma^{2\kappa}} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (Ma^2 - 1) \right)^\kappa \cdot \left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (Ma^2 - 1) \right) \right]^{\frac{1}{1-\kappa}}$	(11.7-22b)
--	------------

Über elementare Umformung können (11.7-22a) und (11.7-22b) ineinander überführt werden.

11.7.3 Fiktiver kritischer Querschnitt

Fiktiver kritischer Querschnitt beim Verdichtungsstoß:

Über den Verdichtungsstoß hinweg ändern sich nicht nur der Ruhedruck p_0 und die Ruhedichte ρ_0 . Bei Berechnungen der Laval-Düse stromabwärts des Stoßes darf nun nicht mehr der kritische Querschnitt A^* verwendet werden. An seine Stelle tritt der fiktive kritische Querschnitt nach dem Verdichtungsstoß \hat{A}_f^* .

Es soll zunächst einmal geklärt werden, was unter dem fiktiven kritischen Querschnitt \hat{A}_f^* zu verstehen ist. Das verdeutlicht die nachfolgende Skizze.

Fall Flächenverhältnis $A^* < A_f^*$

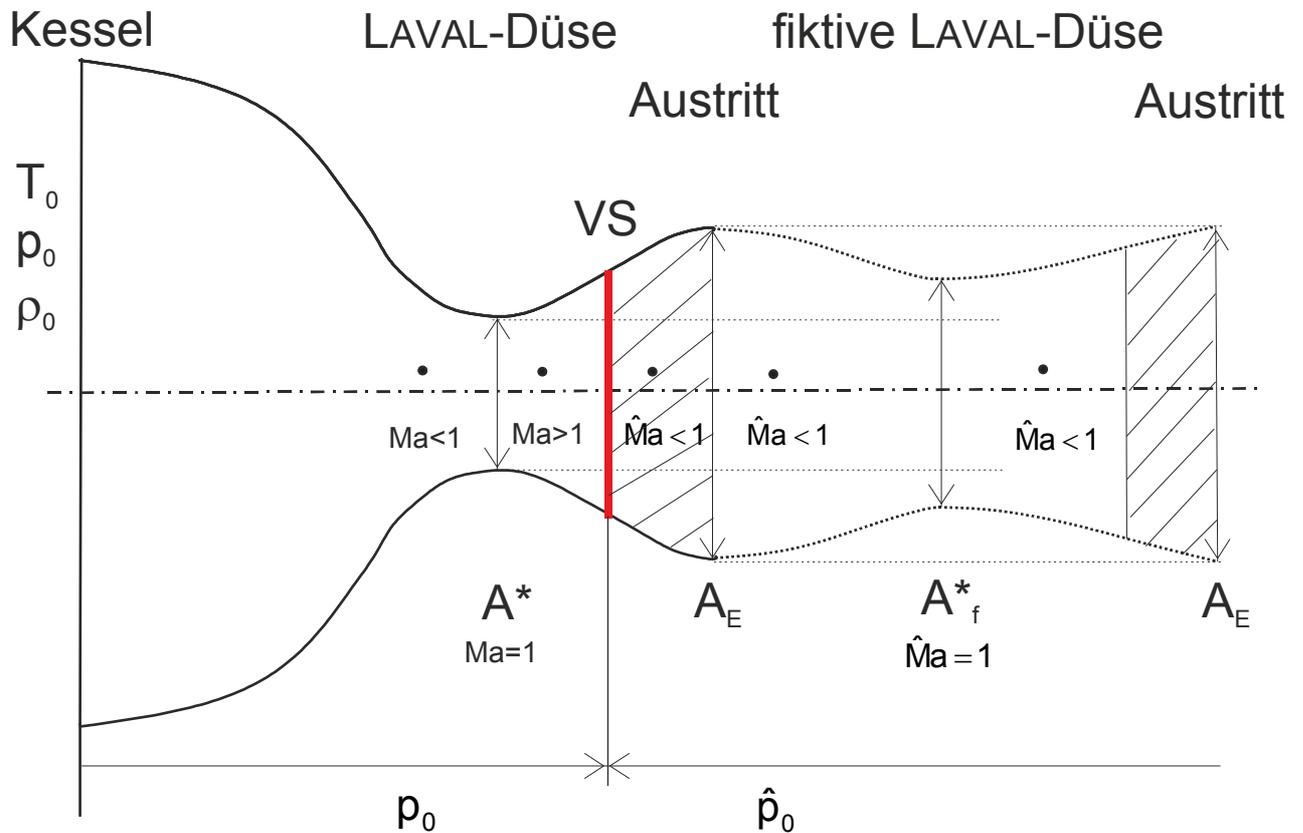


Abbildung 11.7-10: Skizze zum Verständnis des fiktiven kritischen Querschnittes nach dem Stoß

Statische/Verdichtungsstoß Zustandsgrößen	Gesamt/Ruhe (VS) Zustandsgrößen	Statische/fiktive kritische Zustandsgrößen
$p_s < \hat{p}_s$	$p_0 > \hat{p}_0$	$p^* = 0,528 \cdot p_0 > \hat{p}_f^* = 0,528 \cdot \hat{p}_0$
$\rho_s < \hat{\rho}_s$	$\rho_0 > \hat{\rho}_0$	$\rho^* > \hat{\rho}_f^*$
$T_s < \hat{T}_s$	$T_0 = \hat{T}_0$	$T^* = \hat{T}_f^*$
$a_s < \hat{a}_s$	$a_0 = \hat{a}_0$	$a^* = \hat{a}_f^* = w^* = \hat{w}_f^*$
$w_s > \hat{w}_s$		$A^* < \hat{A}_f^*$
$Ma_s > \hat{Ma}_s$		$Ma^* = \hat{Ma}_f^*$

Der Massen- und Energieerhaltungssatz bleiben durch die anisentrope Zustandsänderung über den Verdichtungsstoß unberührt:

$$\dot{m} = \hat{m}_S \dots \dots \dots \text{Erhaltung der Masse}$$

$$c_p \cdot T_i + \frac{1}{2} w_i^2 = c_p \cdot \hat{T}_i + \frac{1}{2} \hat{w}_i^2 \quad \text{Erhaltung der Energie}$$

Es ist ohne weiteres denkbar, nach dem Verdichtungsstoß die Mündung wieder zu verjüngen und dadurch eine neue fiktive LAVAL-Düse zu erhalten. Dabei wird es wieder einen engsten Querschnitt geben, diesmal, da wir uns hinter dem Stoß befinden nicht A^* sondern \hat{A}_f^* , bei dem auch Schallgeschwindigkeit herrscht. Aufgrund der Dissipationsvorgänge und der damit einhergehenden Tatsache, dass der Ruhedruck \hat{p}_0 nach dem Stoß kleiner ist als davor, muss dieser engste bzw. kritische Querschnitt eine andere Größe (er wird größer) haben als vor dem Stoß.

Ziel der Vorlesung ist es, das Verhältnis $\left(\frac{A^*}{\hat{A}_f^*} \right)$ aus dem Ansatz der

Massenerhaltung durch die Querschnitte A^* und \hat{A}_f^* zu gewinnen.

$\rho^* \cdot w^* \cdot A^* = \hat{\rho}^* \cdot \hat{w}^* \cdot \hat{A}_f^*$	(11.7-26)
$\frac{A^*}{\hat{A}_f^*} = \frac{\hat{\rho}^* \cdot \hat{w}^*}{\rho^* \cdot w^*} = \frac{\hat{\rho}^* \cdot \hat{a}^*}{\rho^* \cdot a^*}$	(11.7-27)

Einführen der Ruhegrößen mit Hilfe der kritischen Verhältnisse

$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{1-\kappa}} \Rightarrow \rho^* = \rho_0 \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{1-\kappa}} \quad \text{und} \quad \hat{\rho}^* = \hat{\rho}_0 \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{1-\kappa}}$ $\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} \Rightarrow a^* = a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} \quad \text{und} \quad \hat{a}^* = \hat{a}_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}}$	(11.5-16)
--	-----------

ergibt:

$\frac{A^*}{\hat{A}_f^*} = \frac{\hat{\rho}_0 \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\kappa}} \cdot \hat{a}_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}}}{\rho_0 \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\kappa}} \cdot a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}}} = \frac{\hat{\rho}_0 \cdot \hat{a}_0}{\rho_0 \cdot a_0}$	(11.7-28)
---	-----------

Die Schallgeschwindigkeit wird durch

$a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}$	(11.4-8)
-------------------------------------	----------

und die Dichte mit Hilfe des idealen Gasgesetzes

$\frac{p}{\rho} = R \cdot T \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{p}{R \cdot T}$	(11.2-1)
---	----------

ausgedrückt. Damit folgt:

$\frac{A^*}{\hat{A}_f^*} = \frac{\hat{\rho}_0}{R \cdot \hat{T}_0} \cdot \frac{R \cdot T_0}{\rho_0} \cdot \frac{\sqrt{\kappa \cdot R \cdot \hat{T}_0}}{\sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_0}}$	(11.7-29)
---	-----------

Da die Ruhetemperatur

$T_0 = \hat{T}_0$	(11.7-20)
-------------------	-----------

über den Stoß konstant bleibt, vereinfacht sich (11.7-29) zu:

$\frac{A^*}{\hat{A}_f^*} = \frac{\hat{p}_0}{p_0}$	(11.7-30)
---	-----------

Gleichung (11.7-30) stellt das Verhältnis der kritischen Querschnitte zum Verhältnis der Ruhedrucke dar.

Da $\hat{p}_0 < p_0$ ist, ist auch $\hat{A}_f^* > A^*$.

Die vorher diskutierte Düsenströmung kann jetzt auch für den Fall des nicht angepassten Druckes im Austrittsquerschnitt mit Hilfe des senkrechten Verdichtungsstoßes erklärt werden. Liegt kein angepasstes Druckverhältnis $p_G' = p_u' = p_G/p_0$ vor (siehe Fall 3 in Kap.11.6.2), so stellt sich an einer bestimmten Stelle in der Düse ein senkrechter Verdichtungsstoß ein, dessen Drucksprung gerade so groß sein muss, dass der im Austrittsquerschnitt herrschende Umgebungsdruck (Gegendruck) erreicht wird. Zwischen dem Stoß und dem

Austrittsquerschnitt muss nach den Stoßbeziehungen die Strömungsgeschwindigkeit überall kleiner als die örtliche Schallgeschwindigkeit sein.

Die nachfolgende Skizze zeigt noch mal den Verlauf von statischen und Ruhe/Gesamt/Totalgrößen und Mach-Zahl in der Düse bei einem senkrechten Verdichtungsstoß im divergenten Teil bei $c = 40$.

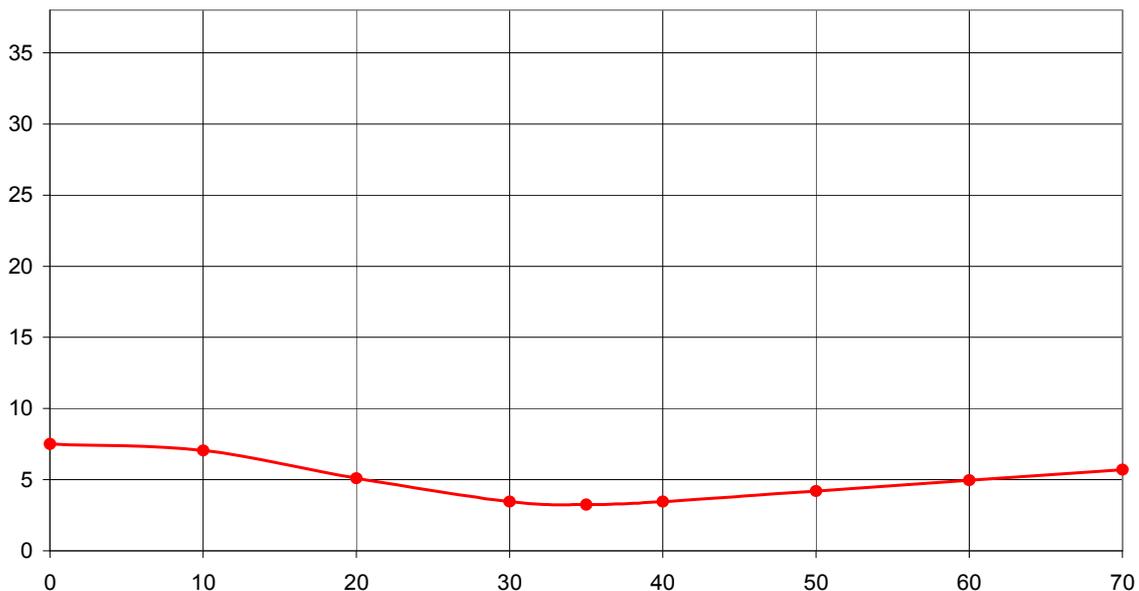
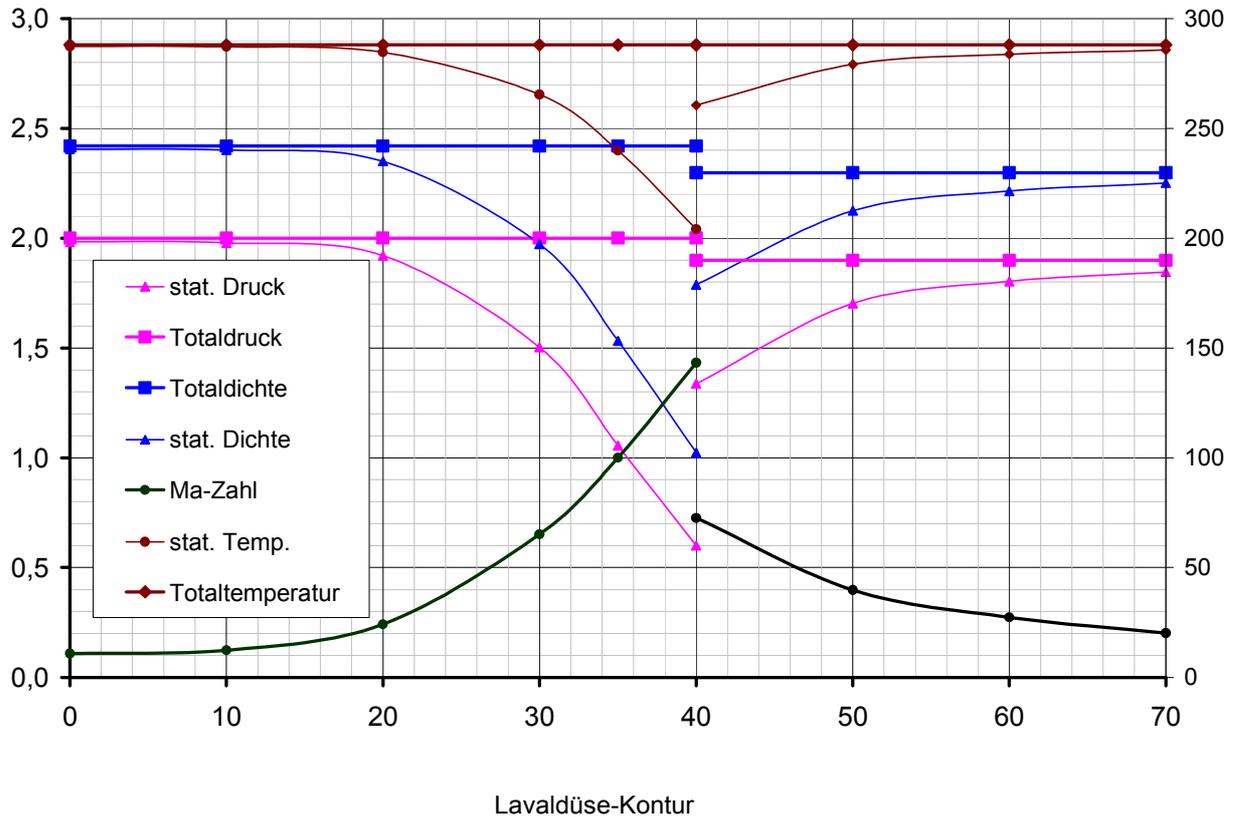


Abbildung 11.7-11: Verlauf der Zustandsgrößen beim Verdichtungsstoß

Fiktiver kritischer Querschnitt in einer Unterschallströmung:

Analog dazu kann man sich auch bei einer reinen Unterschallströmung – egal ob bei einer LAVAL-Düse oder einer rein divergenten Düse – einen fiktiven kritischen Querschnitt A_f^* denken. Dieser ist dabei notwendigerweise kleiner als der kleinste Querschnitt der realen Düsengeometrie.

Fall Flächenverhältnis $A_{min} > A_f^*$

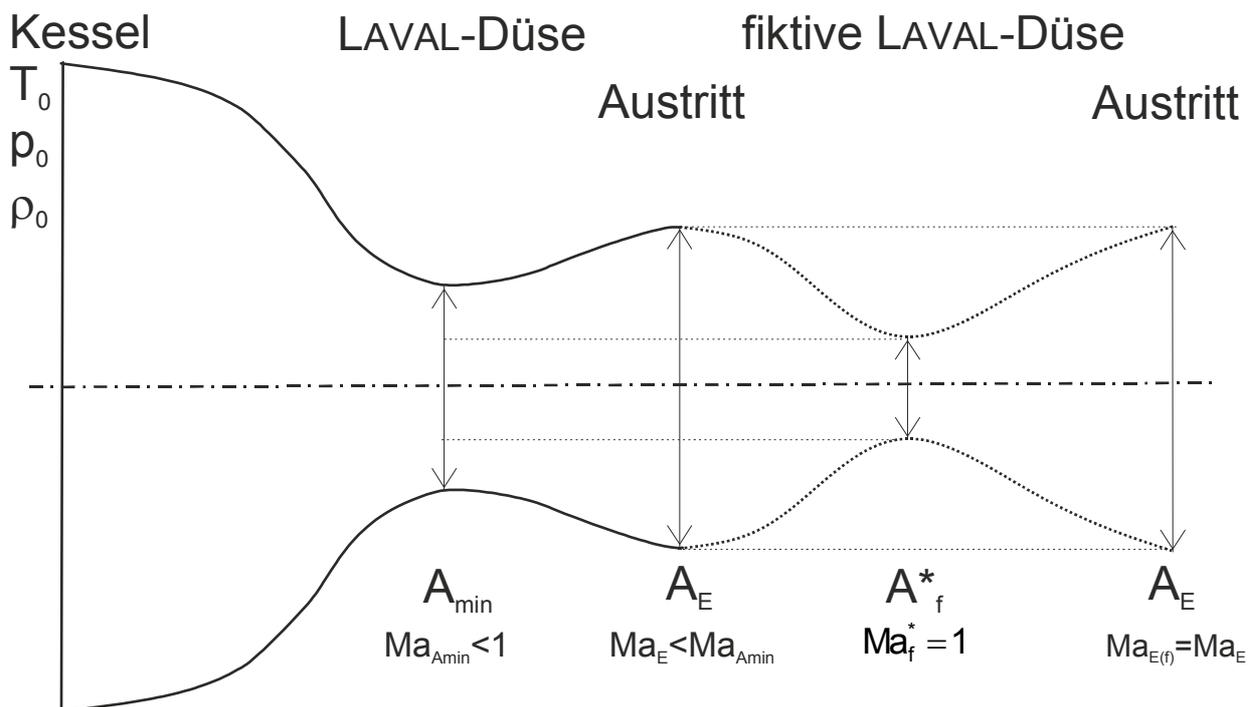


Abbildung 11.7-12: Skizze zum Verständnis des fiktiven kritischen Querschnittes in einer Unterschallströmung

Gesamt-Zustandsgrößen	Statische/fiktive Zustandsgrößen in A_{Amin} und A_f^*
$p_0 = p_{0f}$	$p_{Amin} > p_f^*$
$\rho_0 = \rho_{0f}$	$\rho_{Amin} > \rho_f^*$
$T_0 = T_{0f}$	$T_{Amin} > T_f^*$
$a_0 = a_{0f}$	$w_{Amin} < w_f^* = a_f^*$
	$A_{Amin} > A_f^*$
	$Ma_{Amin} < Ma_f^* = 1$

Erklärung: Wenn in einer Laval-Düse nur die Unterschallströmung erreicht wird ($Ma < 1$), ist der engste Querschnitt dieser Düse $A_{min.}$ ein minimaler aber kein kritischer Querschnitt, an welchem die $Ma < 1$ sein wird. In einer fiktiven Laval-Düse mit einem kritischen Querschnitt A^* bedeutet nach der Definition eine $Ma = 1$ in diesem Querschnitt. Die Größe von A^* muss logischerweise kleiner als die Querschnittsfläche $A_{min.}$ mit $Ma < 1$ sein.

Mitunter ist man bei Berechnungen auf diese fiktiven Größen angewiesen (siehe Übungsmanuskript).

Beispiel 1: LAVAL-Düse mit senkrechtem Verdichtungsstoß bei bekannter Position des Stoßes

Als Position des Stoßes wird dabei nicht die Position entlang der Längsachse gemeint, sondern das Verhältnis von Stoßquerschnitt A_S zu engstem Düsenquerschnitt A^* . Da die Düsengeometrie in der Praxis bekannt ist, d.h. der Querschnitt als Funktion der x-Position $A = f(x)$ vorliegt, kann darüber bei Bedarf die Position entlang der Längsachse bestimmt werden.

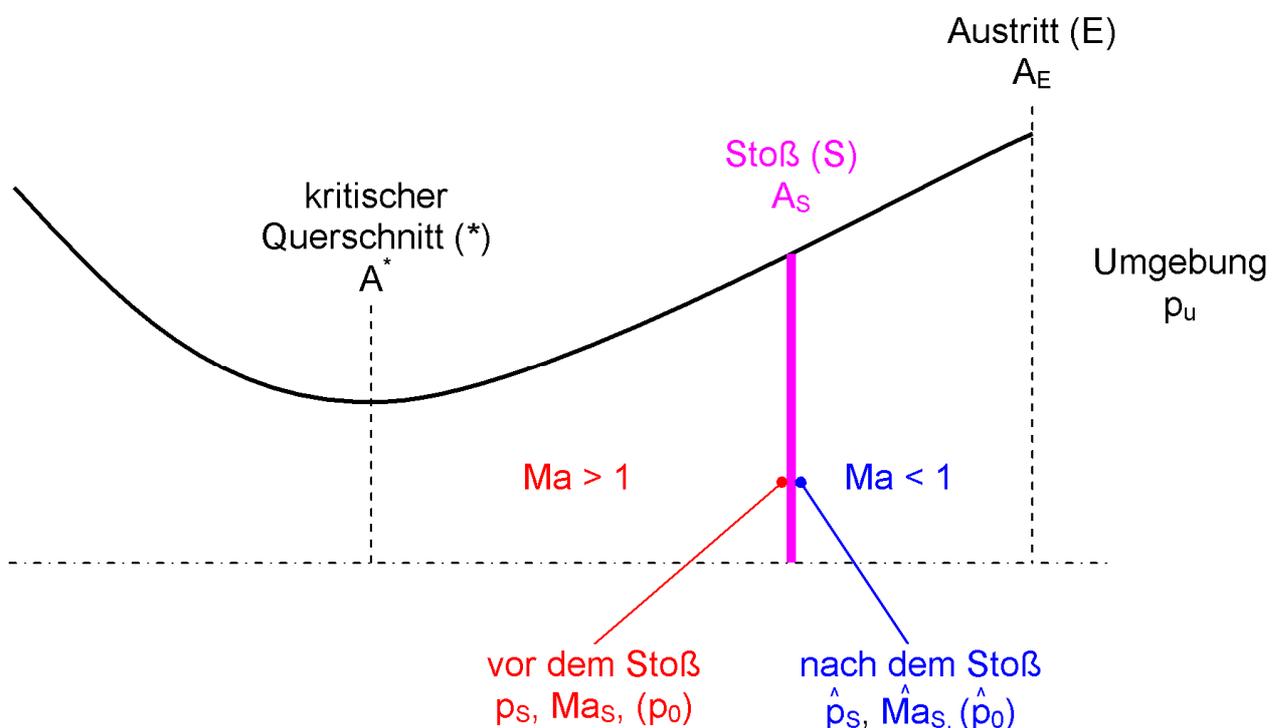


Abbildung 11.7-13: LAVAL-Düse mit senkrechtem Verdichtungsstoß

Für die in Abbildung 11.7-13 dargestellte Düse soll der Umgebungsdruck $p_u = p_E$ so gewählt werden, dass ein senkrechter Verdichtungsstoß bei der Position (S) auftritt. Folgende Werte sind bekannt:

$$p_0 = 1 \text{ bar} \quad A^* = 0,1 \text{ m}^2 \quad A_S = 0,19 \text{ m}^2 \quad A_E = 0,35 \text{ m}^2$$

Zunächst wird das kritische Flächenverhältnis A^*/A_S bei der Position des Stoßes berechnet und damit aus Abbildung 11.6-8 die Machzahl direkt vor dem Stoß abgelesen:

$\frac{A^*}{A_S} = \frac{0,1 \text{ m}^2}{0,19 \text{ m}^2} = 0,526 \quad \implies \quad Ma_S = 2,15$	
---	--

oder die Ma-Zahl wird aus Gl. (11.6-10) iterativ berechnet:

$\frac{A^*}{A_i} = Ma_i \cdot \left[\frac{2}{\kappa + 1} \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_i^2 \right) \right]^{\frac{1 + \kappa}{2(1 - \kappa)}}$	(11.6-10).
$\frac{A^*}{A_S} = \frac{0,1 \text{ m}^2}{0,19 \text{ m}^2} = 0,5263158 \quad \implies \quad Ma_S = 2,13883$	

Damit kann die Mach-Zahl \hat{Ma} nach dem Stoß entweder nach

$\hat{Ma}_S = \sqrt{\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma_S^2}{2\kappa \cdot Ma_S^2 - (\kappa - 1)}} = \sqrt{\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot 2,13883^2}{2\kappa \cdot 2,13883^2 - (\kappa - 1)}}$	(11.7-15)
--	-----------

$\hat{Ma}_S = 0,555552$ berechnet werden, oder über das in Abbildung 11.7-4 ablesbare Verhältnis \hat{Ma}_S/Ma_S .

$$\hat{Ma}_S/Ma_S = 0,257 \quad \implies \quad \hat{Ma}_S = 0,257 \cdot 2,15 = 0,554$$

Hieraus folgt mit $\hat{Ma}_S = 0,555552$ aus Gl. 11.6-32 rechnerisch:

$\frac{A^*}{A_i} \hat{=} \frac{\hat{A}_f^*}{\hat{A}_S} = \hat{Ma}_S \cdot \left[\frac{2}{\kappa + 1} \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_i^2 \right) \right]^{\frac{1 + \kappa}{2(1 - \kappa)}} \quad \implies$	(11.6-10)
$\frac{\hat{A}_f^*}{\hat{A}_S} = 0,8021021$	

oder aus Abbildung 11.6-8 das– fiktive – kritische Flächenverhältnis

\hat{A}_f^*/A_S grafisch:

$\hat{Ma}_S = 0,554 \quad \implies \quad \frac{\hat{A}_f^*}{\hat{A}_S} = 0,8$	
---	--

mit welchem sich das Flächenverhältnis \hat{A}^*/A_E bestimmen lässt

$\frac{\hat{A}_f^*}{A_E} = \frac{0,8021021 \cdot A_S}{A_E} = \frac{0,8021021 \cdot 0,19 \text{ m}^2}{0,35 \text{ m}^2}$ $\implies \frac{\hat{A}_f^*}{A_E} = 0,435426$	
---	--

um darüber das Druckverhältnis p_E/\hat{p}_0 grafisch (Abbildung 11.6-8) zu bestimmen:

$\frac{\hat{A}_f^*}{A_E} = 0,434 \quad \implies \quad \frac{p_E}{\hat{p}_0} = 0,954$	
--	--

Oder rechnerisch durch iterative Lösung der Gleichung (11.6-30):

$\frac{A^*}{A_i} = 3,8639255 \cdot \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	(11.7-31)
---	-----------

$\frac{\hat{A}_f^*}{A_E} = 0,435426 \quad \implies \quad \frac{p_E}{\hat{p}_0} = 0,95321$	
---	--

Der Ruhedruck nach dem Stoß \hat{p}_0 ist noch unbekannt. Er wird über das Ruhedruckverhältnis mit Hilfe von

$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \left[\frac{1}{Ma^{2\kappa}} \left(1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (Ma^2 - 1) \right)^\kappa \cdot \left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (Ma^2 - 1) \right) \right]^{\frac{1}{1-\kappa}} = 0,656208$	(11.7-22b)
---	------------

oder grafisch nach Abbildung 11.7-8 über die Machzahl Ma_S bestimmt.

$Ma_S = 2,15 \quad \implies \quad \frac{\hat{p}_0}{p_0} = 0,65$	
---	--

Einsetzen der grafisch ermittelten Werte liefert

$\frac{p_E}{\hat{p}_0} = 0,954 \rightarrow p_E = 0,954 \cdot \hat{p}_0 = 0,954 \cdot 0,65 \cdot p_0$	
$p_u = p_E = 0,62 \text{ bar}$	

Einsetzen der rechnerisch ermittelten Werte liefert

$\frac{p_E}{\hat{p}_0} = 0,95321 \rightarrow p_E = 0,95321 \cdot \hat{p}_0 = 0,95321 \cdot 0,656208 \cdot p_0$	
--	--

Ein Umgebungsdruck p_u

$p_u = p_E = 0,625508 \text{ bar}$	
------------------------------------	--

von 0,625508 bar führt also zur gegebenen Lage des senkrechten Verdichtungsstoßes.

Ein **Absenken** dieses Wertes führt zu einer Verschiebung der Stoßlage in Richtung des Austrittsquerschnittes, bis der Stoß gerade im Austrittsquerschnitt steht.

Ein **Anheben** des Druckes lässt den Stoß in Richtung des engsten Querschnittes (*) wandern, bis er genau im engsten Querschnitt steht, d.h. dort $Ma = 1$ herrscht, sonst aber überall Unterschallströmung. Der Stoß ist dann so schwach geworden, dass er im Grenzfall verschwindet.

Aufgrund der einfachen Messbarkeit des Umgebungsdruckes ist dieser in der Regel die bekannte Größe und nicht die Position des Verdichtungsstoßes. Aufbauend auf Beispiel 1 soll im folgenden Beispiel bei bekanntem Gegendruck die Position des Verdichtungsstoßes A^*/A_S ermittelt werden.

Beispiel 2: LAVAL-Düse mit senkrechtem Verdichtungsstoß bei bekanntem Gegendruck

Für die in Abbildung 11.7-13 dargestellte Düse soll für gegebenen Gegendruck (Umgebungsdruck) $p_u = p_E$ die Position des senkrechten Verdichtungsstoßes in der Form des Flächenverhältnisses A^*/A_S bestimmt werden. Folgende Werte sind bekannt:

$$p_0 = 1 \text{ bar} \quad A^* = 0,1 \text{ m}^2 \quad A_E = 0,35 \text{ m}^2 \quad p_u = p_E = 0,625508 \text{ bar}$$

Der erste Schritt besteht in der Bestimmung des **Ruhedruckes \hat{p}_0 nach dem Stoß** auf Grundlage der folgenden zwei Gleichungen:

$\frac{A^*}{A} = 3,8639255 \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	(11.7-32)
$\frac{A^*}{\hat{A}_f} = \frac{\hat{p}_0}{p_0}$	(11.7-30)

Durch Anpassen der Indizes in Gl. (11.6-6)

$A \rightarrow A_E \quad A^* \rightarrow \hat{A}_f^* \quad p \rightarrow p_E \quad p_0 \rightarrow \hat{p}_0$

wird Gl. (11.7-31) überführt in

$\frac{\hat{A}_f^*}{A_E} = 3,8639255 \cdot \left(\frac{p_E}{\hat{p}_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_E}{\hat{p}_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	
---	--

Wir haben damit ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit den zwei unbekanntem \hat{A}_f^* und \hat{p}_0 . Beide Gleichungen werden nach \hat{A}_f^* umgestellt, gleichgesetzt und es wird nach \hat{p}_0 aufgelöst.

$\hat{A}_f^* = A_E \cdot 3,8639255 \cdot \left(\frac{p_E}{\hat{p}_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_E}{\hat{p}_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}},$ $\hat{A}_f^* = A^* \cdot \frac{p_0}{\hat{p}_0}$ $A_E \cdot 3,8639255 \cdot \left(\frac{p_E}{\hat{p}_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_E}{\hat{p}_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = A^* \cdot \frac{p_0}{\hat{p}_0}$	
--	--

Die rechte Seite wird mit p_E/p_E erweitert.

$A_E \cdot 3,8639255 \cdot \left(\frac{p_E}{\hat{p}_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_E}{\hat{p}_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = A^* \cdot \frac{p_0}{\hat{p}_0} \cdot \frac{p_E}{p_E} = A^* \cdot \frac{p_E}{\hat{p}_0} \cdot \frac{p_0}{p_E}$	
---	--

Es wird der Übersichtlichkeit halber $z = p_E/\hat{p}_0$ eingeführt und umgeformt:

$A_E \cdot 3,8639255 \cdot z^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - z^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = A^* \cdot z \cdot \frac{p_0}{p_E}$	
$z^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - z^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = z \cdot \frac{A^* \cdot p_0}{A_E \cdot 3,864 \cdot p_E}$	
$\frac{z^{\frac{1}{\kappa}}}{z} \cdot \sqrt{1 - z^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \frac{A^* \cdot p_0}{A_E \cdot 3,864 \cdot p_E}$	

Die rechte Seite wird umgeformt:

$\frac{z^{\frac{1}{\kappa}}}{z} \cdot \sqrt{1 - z^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = z^{\frac{1}{\kappa}-1} \cdot \sqrt{1 - z^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = z^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - z^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = z^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot \sqrt{1 - z^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$	
---	--

Es wird wieder substituiert: $y = \frac{1-\kappa}{\kappa}$ bzw. $-y = \frac{\kappa-1}{\kappa}$ und $C = \frac{A^* \cdot p_0}{p_E \cdot A_E \cdot 3,864}$ und man erhält:

$z^y \cdot \sqrt{1 - z^{-y}} = z^y \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{z^y}} = \sqrt{(z^y)^2 - z^y} = C$	
---	--

Beidseitiges Quadrieren

$(z^y)^2 - z^y = C^2$	
-----------------------	--

und Einführen von $u = z^y$ liefert die quadratische Gleichung

$u^2 - u = C^2$	
-----------------	--

Deren Lösungsgleichung ist

$u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + C^2} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + 4C^2} \right]$	
---	--

Die korrekte Lösung nach der Rücksubstitution lautet:

$$\left(\frac{p_E}{\hat{p}_0}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{A^* \cdot p_0}{3,864 \cdot A_E \cdot p_E}\right)^2} \right]$$

Es wird nach \hat{p}_0 aufgelöst:

$$\frac{p_E}{\hat{p}_0} = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{A^* \cdot p_0}{3,864 \cdot A_E \cdot p_E}\right)^2} \right] \right\}^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}$$

$$\hat{p}_0 = p_E \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{A^* \cdot p_0}{3,8639255 \cdot A_E \cdot p_E}\right)^2} \right] \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (11.7-33)$$

$$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{p_E}{p_0} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{A^* \cdot p_0}{3,8639255 \cdot A_E \cdot p_E}\right)^2} \right] \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (11.7-34)$$

Gleichung (11.7-33) gibt eine Möglichkeit an die Hand, mittels einfach messbarer Größen, also bei Kenntnis des engsten Querschnittes A^* , des Austrittsquerschnitts A_E , des Ruhedrucks p_0 und des anliegenden Gegendrucks p_E , den Ruhedruck \hat{p}_0 zu bestimmen. Mit diesem kann dann über das Verhältnis der Ruhedrücke \hat{p}_0/p_0 aus Abbildung 11.7-8 die Machzahl vor dem Stoß Ma_S bestimmt werden, wodurch dann alle weiteren Größen bestimmbar sind.

Der Ruhedruck nach dem Stoß \hat{p}_0 lässt sich über (11.7-33) berechnen. Es ist

$$\hat{p}_0 = p_E \cdot 1,053 = 0,62 \text{ bar} \cdot 1,053 = 0,653 \text{ bar},$$

womit sich das Verhältnis der Ruhedrücke \hat{p}_0/p_0 zu

$$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{0,653 \text{ bar}}{1 \text{ bar}} = 0,653$$

ergibt. Damit wird aus Abbildung 11.7-8 die Machzahl Ma_S vor dem Stoß abgelesen:

$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = 0,653 \qquad \implies Ma_S = 2,15$	
---	--

Oder iterativ aus Gl. 11.7-22b berechnet

$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \left[\frac{1}{Ma^{2\kappa}} \left(1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (Ma^2 - 1) \right)^\kappa \cdot \left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (Ma^2 - 1) \right) \right]^{\frac{1}{1-\kappa}}$	(11.7-22b)
--	------------

$Ma_S = 2,1388253$

Über diese kann direkt aus

$\frac{A^*}{A_i} = Ma_i \cdot \left[\frac{2}{\kappa+1} \cdot \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_i^2 \right) \right]^{\frac{1+\kappa}{2(1-\kappa)}}$	(11.6-10)
--	-----------

oder Abbildung 11.6-8 das gesuchte Flächenverhältnis A^*/A_S ermittelt werden.

$\frac{A^*}{A_S} = 2,15 \cdot \left[\frac{2}{1,4+1} \cdot \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 2,15^2 \right) \right]^{\frac{1+1,4}{2(1-1,4)}} = 0,5263453$	
--	--

Damit kann A_S berechnet werden :

$AS = 0,1899894$

Im Allgemeinen:

Zur Bestimmung der Position des Verdichtungsstoßes A^*/A_S anhand des Gegendruckverhältnisses p_E/p_0 und des Austrittsquerschnittsverhältnisses A^*/A_E bedarf es der drei folgenden Formeln.

$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \left[\frac{1}{Ma_S^{2\kappa}} \left(1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (Ma_S^2 - 1) \right)^\kappa \cdot \left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1} (Ma_S^2 - 1) \right) \right]^{\frac{1}{1-\kappa}} \quad (11.7-22b)$	(11.7-35)
$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{p_E}{p_0} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{A^* \cdot p_0}{3,864 \cdot A_E \cdot p_E} \right)^2} \right] \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (11.7-34)$	

$$\frac{A^*}{A_S} = Ma_S \cdot \left[\frac{2}{\kappa + 1} \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_S^2 \right) \right]^{\frac{1+\kappa}{2(1-\kappa)}} \quad (11.7-34)$$

Die beiden ersten Formeln werden gleichgesetzt und damit numerisch die Mach-Zahl Ma_S vor dem Stoß berechnet. Analytisch ist das nicht möglich. Mit Ma_S kann dann sofort die Position des Stoßes anhand des Flächenverhältnisses A^*/A_S durch Gl.11.6-10) berechnet werden.

Die folgende Abbildung 11.7-14 stellt die Position des Verdichtungsstoßes in Abhängigkeit vom Gegendruckverhältnis p_u/p_0 für verschiedene Austrittsquerschnittsverhältnisse A^*/A_E dar. Die sieben verschiedenen Betriebszustände der Lavaldüse sind entsprechend Kapitel 11.6.2 bezeichnet.

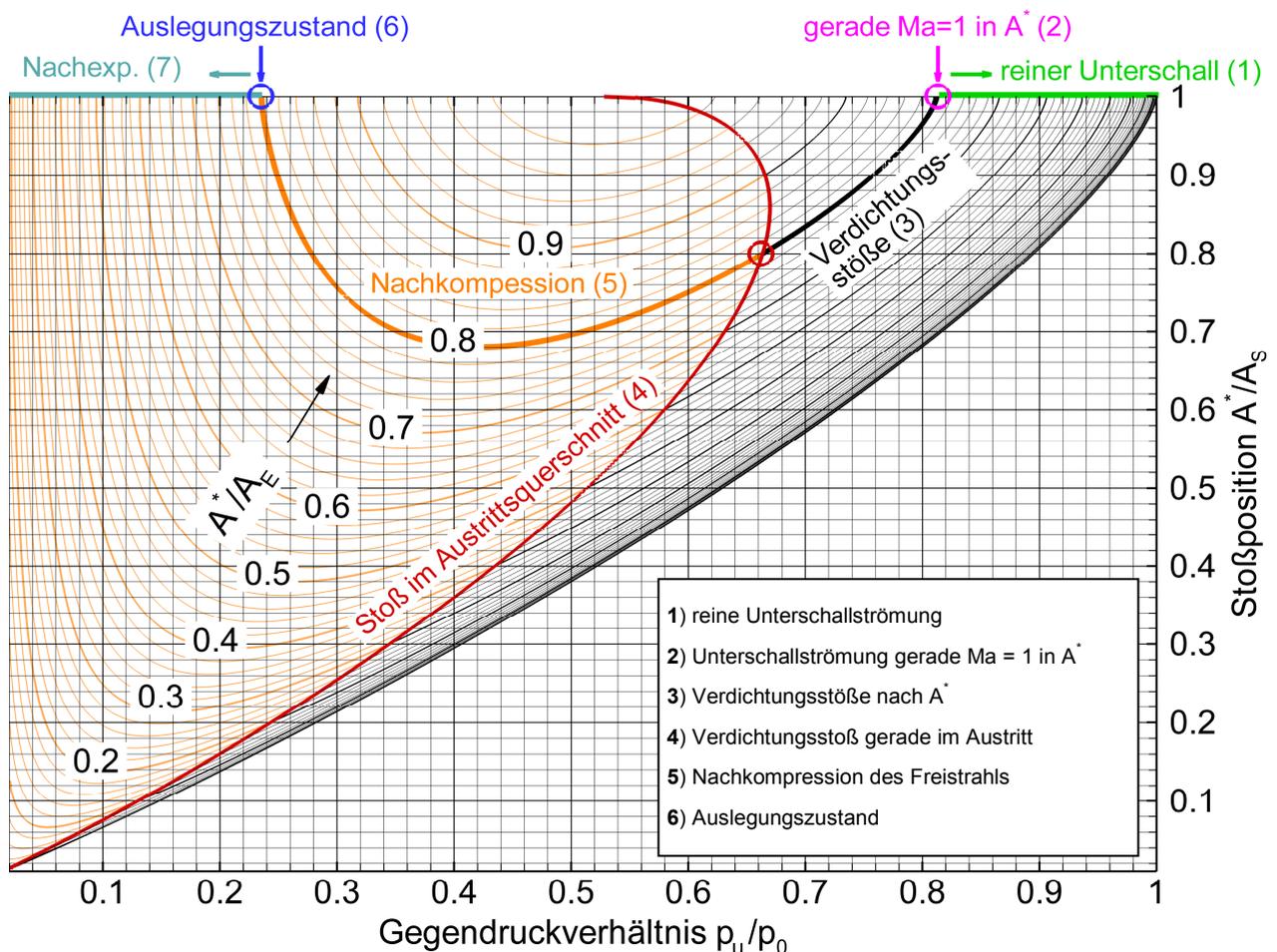


Abbildung 11.7-14: Nomogramm des Gleichungssystems (11.7-35)

Es wird auch hier noch einmal an der Abnahme des Flächenverhältnisses A^*/A_S deutlich, dass die Verdichtungsstöße bei abnehmendem Gegendruckverhältnis in Richtung Austritt wandern, d.h. in Richtung der Grenzlinie $A^*/A_E = A^*/A_S$.

Bei der rot markierten Grenzlinie steht der Stoß genau im Austrittsquerschnitt. Der orange eingefärbte Bereich markiert den Betriebszustand der LAVAL-Düse, bei der es zu Nachkompression oder Nachexpansion des Freistrahls kommt. Der Druck im Austrittsquerschnitt p_E entspricht in diesen beiden Fällen nicht mehr dem Umgebungsdruck p_u , so dass

$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{p_E}{p_0} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{A^* \cdot p_0}{3,864 \cdot A_E \cdot p_E} \right)^2} \right] \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$	(11.7-34)
---	-----------

dann keine Gültigkeit mehr besitzt.

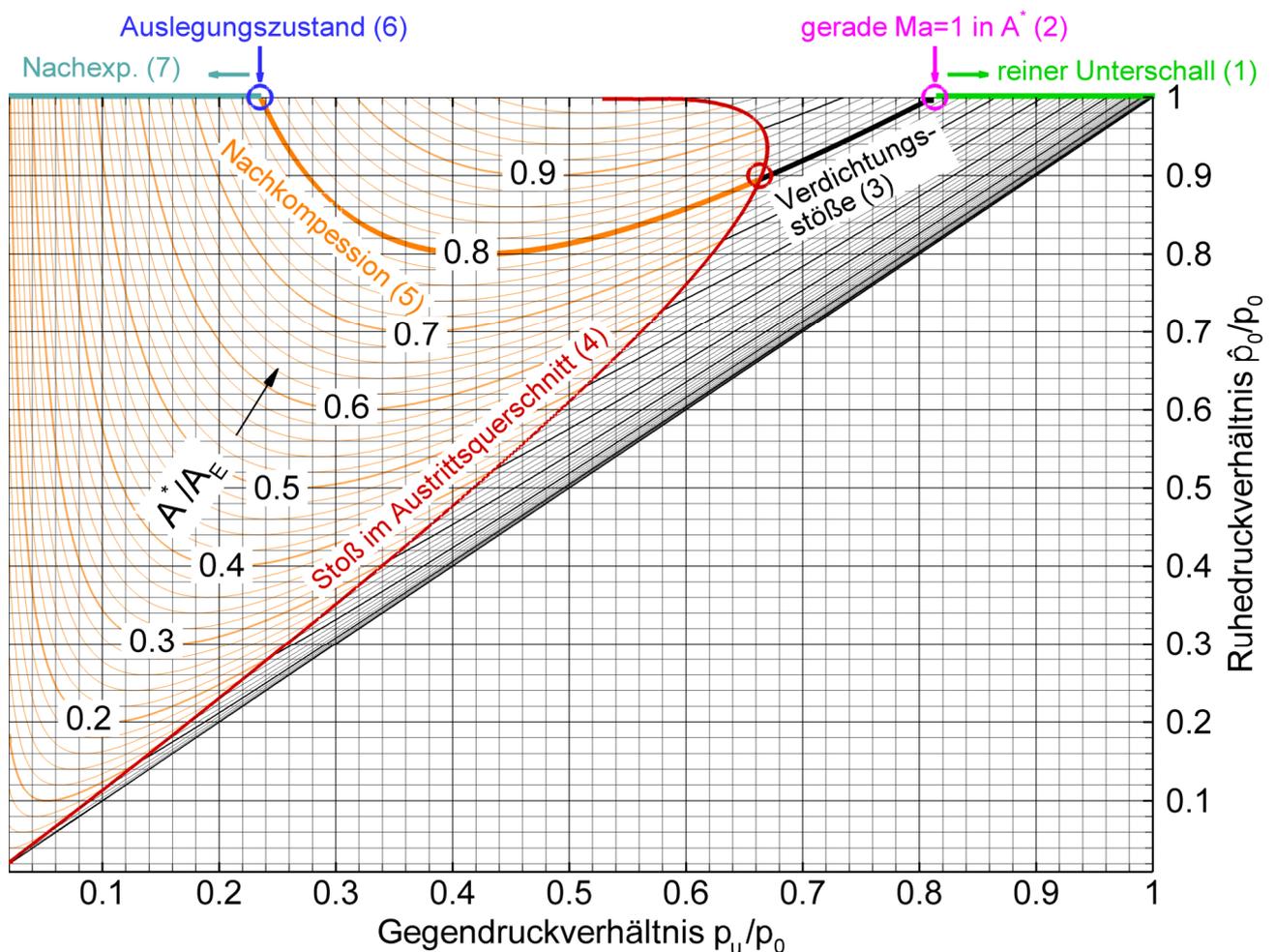


Abbildung 11.7-15: Graphische Darstellung von Gl. (11.7-31)

Abbildung 11.7-15 stellt Gleichung (11.7-31), also das Ruhedruckverhältnis \hat{p}_0/p_0 als Funktion des Gegendruckverhältnisses p_u/p_0 für verschiedene Austrittsquerschnittsverhältnisse A^*/A_E dar.

11.8. Kritische MACH-Zahl Ma^*

Im minimalen Querschnitt der Lavaldüse wird bei ausreichend kleinem Gegendruck p_u Schallgeschwindigkeit erreicht $a^* = w^*$ und man spricht nun vom kritischen Zustand an dieser Stelle, $Ma = 1$. Die betreffenden Größen werden durch einen Stern gekennzeichnet und als kritische Größen bezeichnet (A^* , p^* , T^* , ρ^* , $a^* = w^*$).

Eine besondere Bedeutung hat in diesem Zusammenhang die sogenannte kritische MACH-Zahl Ma^* (auch Lavalzahl genannt), die ebenfalls wie kritische Größen mit einem Stern gekennzeichnet wird, obwohl es nicht die MACH-Zahl im kritischen Querschnitt A^* ist (diese ist $Ma = 1$).

Die kritische Mach-Zahl Ma^* (auch Lavalzahl genannt) wird im Gegensatz zur „normalen“ Mach-Zahl Ma ,

$Ma_i = \frac{w_i}{a_i},$	(11.5-6)
---------------------------	----------

die die lokale Geschwindigkeit auf die lokale Schallgeschwindigkeit bezieht, **als Verhältnis von lokaler Geschwindigkeit zu kritischer Schallgeschwindigkeit a^* definiert:**

$Ma_i^* = \frac{w_i}{a^*}$	(11.8-1)
----------------------------	----------

Da für isentrope und adiabate Rohrströmung a^* eine Konstante ist (da die kritische Temperatur T^* sich nicht ändert), ist auch Ma_i^* proportional zur Geschwindigkeit w_i . Die Normierung mit der kritischen Schallgeschwindigkeit hat also offensichtlich den Vorteil, dass im Nenner nicht mehr die lokal variable Schallgeschwindigkeit a_i steht, sondern die bei unveränderten Ruhewerten konstante a^* .

Die Machzahl Ma_i ist aber im Rohr nicht proportional zu w_i , da sich mit w_i die Temperatur T_i und somit die Schallgeschwindigkeit a_i ändern. Deshalb verwendet man im Maschinenbau vorzugsweise Ma_i^* .

Beim Flug eines Körpers in der freien Atmosphäre wird die Temperatur der umgebenden Luft, also die Temperatur der Grundströmung, nicht durch die Geschwindigkeit des Körpers geändert, für $T_\infty = \text{konst.}$ gilt auch

$$a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_\infty} = \text{konst.}$$

In diesem Fall ist Ma_i proportional zu w_i . In der Flugmechanik arbeitet man meistens mit der Ma_i .

Die Beziehung zwischen kritischer Mach-Zahl Ma^* und „normaler“ Mach-Zahl Ma soll im Folgenden hergeleitet werden.

Herleitung 1:

In Gl. (11.8-1) ersetzen wir die lokale Geschwindigkeit w_i nach Gl. (11.5-6) durch

$Ma_i = \frac{w_i}{a_i} \Rightarrow w_i = Ma_i \cdot a_i,$	(11.5-6)
--	----------

und die kritische Schallgeschwindigkeit nach Gl. (11.5-16) durch

$\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} \Rightarrow a^* = a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}},$	(11.5-16)
--	-----------

und erhalten

$Ma_i^* = \frac{Ma_i \cdot a_i}{a_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}}} = Ma_i \cdot \frac{a_i}{a_0} \cdot \sqrt{\frac{\kappa+1}{2}}.$	(11.8-2)
---	----------

Das Verhältnis der lokalen Schallgeschwindigkeit a_i zur Ruhe-Schallgeschwindigkeit a_0 ersetzen wir durch Gl. (11.5-15)

$\frac{a_i}{a_0} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot Ma_i^2\right)^{-\frac{1}{2}},$	(11.8-3)
--	----------

was den gesuchten Ausdruck für Ma^* ergibt:

$$\begin{aligned}
 Ma_i^* &= Ma_i \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2}} = Ma_i \frac{\sqrt{\frac{\kappa + 1}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma_i^2}} = \\
 &= \sqrt{\frac{(\kappa + 1) \cdot Ma_i^2}{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma_i^2}}
 \end{aligned}
 \tag{11.8-4}$$

Herleitung 2 (eine umständliche und langwierige):

Ausgangspunkt für die zweite Herleitung bildet die Energiegleichung (11.3-3) zwischen dem Kessel (0) und einer beliebigen Position (i):

$$c_p \cdot T_0 = \frac{w_i^2}{2} + c_p \cdot T_i
 \tag{11.8-5}$$

Für c_p setzen wir

$$c_p = \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1}
 \tag{11.2-10}$$

ein, ersetzen die Temperatur T mithilfe des idealen Gasgesetzes durch

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T \Rightarrow T = \frac{1}{R} \frac{p}{\rho}
 \tag{11.2-1}$$

und erhalten

$$\frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} \cdot \frac{1}{R} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{w_i^2}{2} + \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} \cdot \frac{1}{R} \frac{p_i}{\rho_i},
 \tag{11.8-6}$$

was nach w_i aufgelöst

$$w_i^2 = \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_i}{\rho_i} \right)
 \tag{11.8-7}$$

wird. Das Verhältnis p_0/ρ_0 wird ausgeklammert und die rechte Seite mit $(\kappa + 1)$ erweitert:

$ \begin{aligned} w_i^2 &= \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_i}{\rho_i} \right) = \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left(1 - \frac{p_i}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_i} \right) \\ &= \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{\kappa + 1}{\kappa + 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left(1 - \frac{p_i}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_i} \right) \\ &= \left(\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \right) \cdot \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \cdot \left(1 - \frac{p_i}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_i} \right) \end{aligned} $	(11.8-8)
--	----------

Der erste in Klammern stehende Term entspricht a^{*2} , wie folgende Rechnung zeigt.

Die kritische Schallgeschwindigkeit a^* ist

$a^* = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T^*}$	(11.4-8)
---	----------

mit

$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\kappa + 1} \Rightarrow T^* = \frac{2 \cdot T_0}{\kappa + 1}$	(11.5-16)
---	-----------

Eingesetzt erhalten wir

$a^* = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot \frac{2 \cdot T_0}{\kappa + 1}},$	(11.8-9)
---	----------

wobei die Ruhetemperatur entsprechend

$T_0 = \frac{1}{R} \frac{p_0}{\rho_0}$	(11.2-1)
--	----------

ersetzt wird. Wir erhalten somit

$a^* = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot \frac{2}{\kappa + 1} \cdot \frac{1}{R} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}} \quad \text{bzw.}$	(11.8-10)
---	-----------

$a^{*2} = \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0},$	
--	--

womit wir (11.8-8) auch schreiben können als

$w_i^2 = a^{*2} \cdot \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \cdot \left(1 - \frac{p_i}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_i} \right)$	(11.8-11)
---	-----------

Mit der isentropen Verhältnisgleichung

$\frac{p_i}{p_j} = \left(\frac{\rho_i}{\rho_j} \right)^\kappa \Rightarrow \frac{p_i}{p_0} = \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\kappa,$	(11.2-11)
--	-----------

ersetzen wir das Ruhedruckverhältnis p_i/p_0 , gleichzeitig dividieren wir durch a^{*2} , und erhalten:

$\begin{aligned} \frac{w_i^2}{a^{*2}} &= \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\kappa \cdot \frac{\rho_0}{\rho_i} \right] = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\kappa \cdot \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} \right] \end{aligned}$	(11.8-12)
--	-----------

Mit

$Ma_i^* = \frac{w_i}{a^*} \Rightarrow Ma_i^{*2} = \frac{w_i^2}{a^{*2}}.$	(11.8-1)
--	----------

lässt sich das Ruhedichtenverhältnis ρ_i/ρ_0 als Funktion der kritischen Mach-Zahl Ma^* auflösen:

$Ma_i^{*2} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} = 1 - \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} \Rightarrow \frac{\rho_i}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cdot Ma_i^{*2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}.$	(11.8-13)
--	-----------

Andererseits kann man in

$w_i^2 = \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_i}{\rho_i} \right)$	(11.8-7)
--	----------

auch die örtliche Schallgeschwindigkeit

$a_i^2 = \kappa \cdot \frac{p_i}{\rho_i},$	(11.4-7)
--	----------

ausklammern:

$\begin{aligned} w_i^2 &= \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_i}{\rho_i} \right) = \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i} \cdot \left(\frac{p_0}{p_i} \cdot \frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \right) \\ &= \kappa \cdot \frac{p_i}{\rho_i} \cdot \frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left(\frac{p_0}{p_i} \cdot \frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \right) \\ &= a_i^2 \cdot \frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left(\frac{p_0}{p_i} \cdot \frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \right) \end{aligned}$	(11.8-14)
---	-----------

Division durch a_i^2 liefert

$\frac{w_i^2}{a_i^2} = Ma_i^2 = \frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left(\frac{p_0}{p_i} \cdot \frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \right),$	(11.8-15)
---	-----------

das Ruhedruckverhältnis p_0/p_i wird wieder mithilfe der isentropen Verhältnissgleichung

$\frac{p_i}{p_j} = \left(\frac{\rho_i}{\rho_j} \right)^\kappa \Rightarrow \frac{p_0}{p_i} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_i} \right)^\kappa,$	(11.2-11)
--	-----------

ersetzt:

$$\begin{aligned}
 \text{Ma}_i^2 &= \frac{2}{\kappa-1} \cdot \left(\frac{p_0}{p_i} \cdot \frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \right) = \frac{2}{\kappa-1} \cdot \left(\left(\frac{\rho_0}{\rho_i} \right)^\kappa \cdot \frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \right) \\
 &= \frac{2}{\kappa-1} \cdot \left(\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{-\kappa} \cdot \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right) - 1 \right) \\
 &= \frac{2}{\kappa-1} \cdot \left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{1-\kappa} - 1 \right]
 \end{aligned}
 \tag{11.8-16}$$

Die Gleichung wird wieder nach dem Ruhedichtenverhältnis ρ_i/ρ_0 aufgelöst:

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot \text{Ma}_i^2 \right)^{\frac{-1}{\kappa-1}}.
 \tag{11.8-17}$$

Es werden nun die beiden Ausdrücke für ρ_i/ρ_0 , Gln. (11.8-13) und (11.8-17) gleichgesetzt und nach Ma^* aufgelöst:

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \text{Ma}_i^{*2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} &= \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot \text{Ma}_i^2 \right)^{\frac{-1}{\kappa-1}} \\
 \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \text{Ma}_i^{*2} \right) &= \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot \text{Ma}_i^2 \right)^{-1} \\
 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \text{Ma}_i^{*2} &= \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot \text{Ma}_i^2} \\
 -\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \text{Ma}_i^{*2} &= \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot \text{Ma}_i^2} - 1 = \frac{1 - \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot \text{Ma}_i^2 \right)}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot \text{Ma}_i^2} \\
 -\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \text{Ma}_i^{*2} &= -\frac{\frac{\kappa-1}{2} \cdot \text{Ma}_i^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot \text{Ma}_i^2} \\
 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \text{Ma}_i^{*2} &= \frac{(\kappa-1) \cdot \text{Ma}_i^2}{2 + (\kappa-1) \cdot \text{Ma}_i^2} \\
 \text{Ma}_i^{*2} &= \frac{(\kappa-1) \cdot \text{Ma}_i^2}{2 + (\kappa-1) \cdot \text{Ma}_i^2} \cdot \frac{\kappa+1}{\kappa-1}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ma}_i^{*2} = \frac{(\kappa + 1) \cdot \text{Ma}_i^2}{2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}_i^2}.$$

(11.8-18)

Damit haben wir durch die 2. Herleitung die gleiche Formel, wie in Gl. (11.8-4) erreicht.

Diskussion:

Fall 1: Ma – Zahl ist klein

Ist Ma klein, so ist $(\kappa - 1) \cdot \text{Ma}_i^2 \ll 2$ und dieser Term kann im Nenner vernachlässigt werden, wodurch sich für die kritische Mach-Zahl Ma^* auch schreiben lässt:

$$\text{Ma}_i^{*2} = \frac{(\kappa + 1)}{2} \text{Ma}_i^2 \Rightarrow \text{Ma}_i^* = \text{Ma}_i \cdot \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2}},$$

(11.8-19)

d.h. die kritische Mach-Zahl Ma^* ist nur unwesentlich größer als Ma.

Fall 2: Ma – Zahl ist groß

Bei großen Werten von Ma hingegen wächst sie nur geringfügig mit Ma und nähert sich für $\text{Ma} \rightarrow \infty$ einem Grenzwert, wie folgende Rechnung zeigt. Gl. (11.8-18) kann man auch umschreiben zu

$$\text{Ma}_i^{*2} = \frac{(\kappa + 1) \cdot \text{Ma}_i^2}{2 + (\kappa - 1) \cdot \text{Ma}_i^2} = \frac{\text{Ma}_i^2}{\text{Ma}_i^2} \frac{(\kappa + 1)}{\frac{2}{\text{Ma}_i^2} + (\kappa - 1)} = \frac{(\kappa + 1)}{\frac{2}{\text{Ma}_i^2} + (\kappa - 1)}.$$

(11.8-20)

Der Term $2/\text{Ma}_i^2$ im Nenner verschwindet für $\text{Ma} \rightarrow \infty$ und ergibt für die kritische Mach-Zahl Ma^* den Grenzwert

$$\text{Ma}_i^*_{\text{Ma} \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \approx 2,45.$$

(11.8-21)

Der Verlauf der kritischen Mach-Zahl Ma^* in Abhängigkeit von der Mach-Zahl Ma ist mit dem Grenzwert für $Ma \rightarrow \infty$ und der Näherungslösung für kleine Mach-Zahlen nach Gl. (11.8-19) in Abbildung 11.8-1 dargestellt.

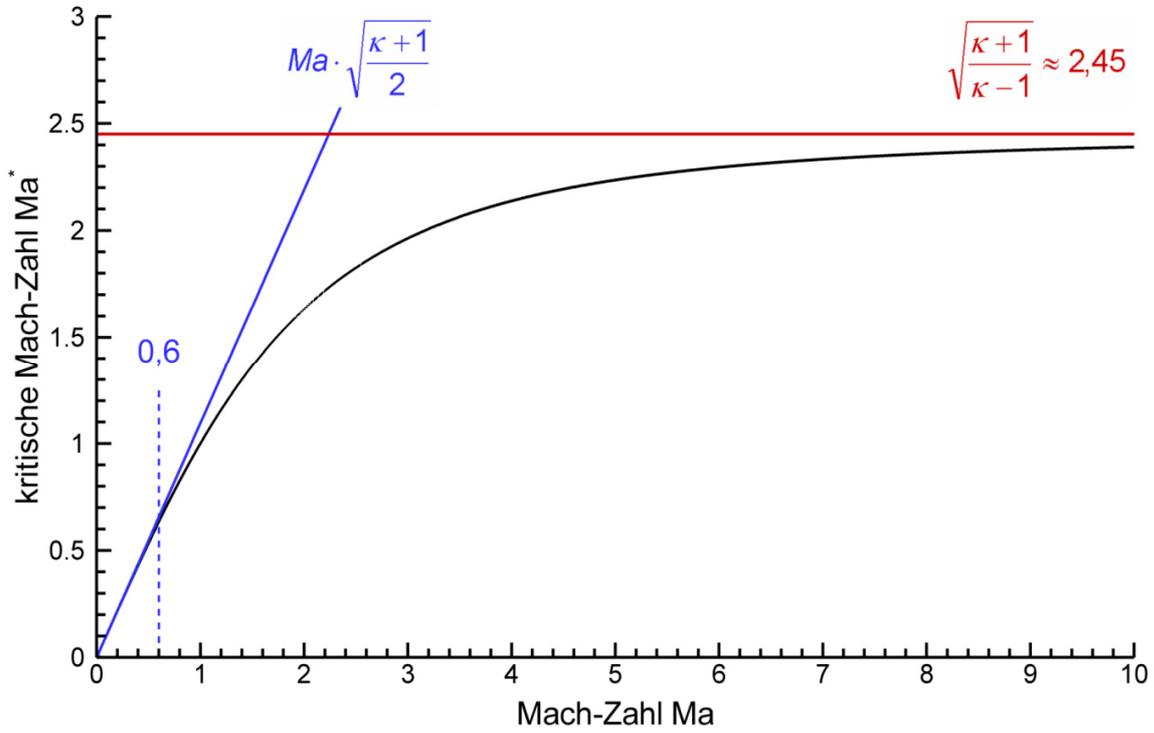


Abbildung 11.8-1: Kritische Mach-Zahl Ma^* als Funktion von Ma

11.9. Einfluss von Wärmezufuhr und -abfuhr auf die Strömung

Im Rahmen der Vorlesung wurden nur Gasströmungen durch adiabate Stromröhren betrachtet.

Der Vollständigkeit halber sei neben der geometrischen Gestaltung der Düsen (variabler Querschnitt) zur Beeinflussung der Strömungsgeschwindigkeit eine weitere Möglichkeit erwähnt.

Generell gilt, dass Unterschallströmungen durch Wärmezufuhr und Überschallströmungen durch Wärmeabfuhr beschleunigt werden können. Eine Verzögerung der Strömung erfolgt bei Unterschallströmungen durch Wärmeabfuhr bei Überschallströmungen durch Wärmezufuhr.

So lässt sich auch bei konvergenten Düsen oder Kanälen mit konstantem Querschnitt eine Unterschallströmung durch Wärmezufuhr bis auf Schallgeschwindigkeit beschleunigen. Eine weitere Beschleunigung auf Überschallgeschwindigkeit kann ab diesem Punkt durch anschließende Wärmeabfuhr mittels Kühlung erreicht werden.

11.10. Weiterführendes zur Mach-Zahl

Mithilfe der Mach-Zahl kann eine Klassifizierung der Strömung vorgenommen werden:

$Ma \leq 0,3$	inkompressible Strömung	
$0,3 < Ma \leq 0,75$	Unterschall	(Subsonic)
$0,75 < Ma \leq 1,25$	Schallnah	(Transsonic)
$1,25 < Ma \leq 5$	Überschall	(Supersonic)
$Ma > 5$	Hyperschall	(Hypersonic)

Eine momentane punktförmige Störung breitet sich in einer homogenen Gasströmung (konstante Geschwindigkeit u_∞) in Form einer Kugelwelle aus, deren Mittelpunkt sich mit der Strömungsgeschwindigkeit u_∞ bewegt. Wenn diese Störung ständig wirkt (weil sie z.B. durch ein Hindernis ausgelöst wird, das mit u_∞ überströmt wird), werden also ständig neue Kugelwellen ausgesandt. Ist u_∞ kleiner als die Schallgeschwindigkeit a , so können die Druckstörungen jeden Punkt des Strömungsfeldes erreichen, insbesondere auch alle stromaufwärts gelegenen Punkte.

Ist aber $u_\infty > a$, so entsteht die in Abbildung 11.10-1 skizzierte Situation. Da die Kugelwelle als Ganzes schneller stromabwärts bewegt wird als sich (kleine) Druckstörungen von ihrem Mittelpunkt ausgehend ausbreiten, können die Druckstörungen nur diejenigen Punkte im Strömungsfeld erreichen, die innerhalb des umhüllenden Kegels mit dem halben Öffnungswinkel α liegen. Aus den geometrischen Verhältnissen ergibt sich α zu

$\sin(\alpha) = \frac{a \cdot \Delta t}{u_\infty \cdot \Delta t} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{Ma} \text{ bzw. } \alpha = \arcsin \frac{1}{Ma},$	(11.10-1)
--	-----------

d.h. mit wachsender Mach-Zahl entsteht ein immer spitzerer Kegel als Einflussgebiet für die Druckstörungen.

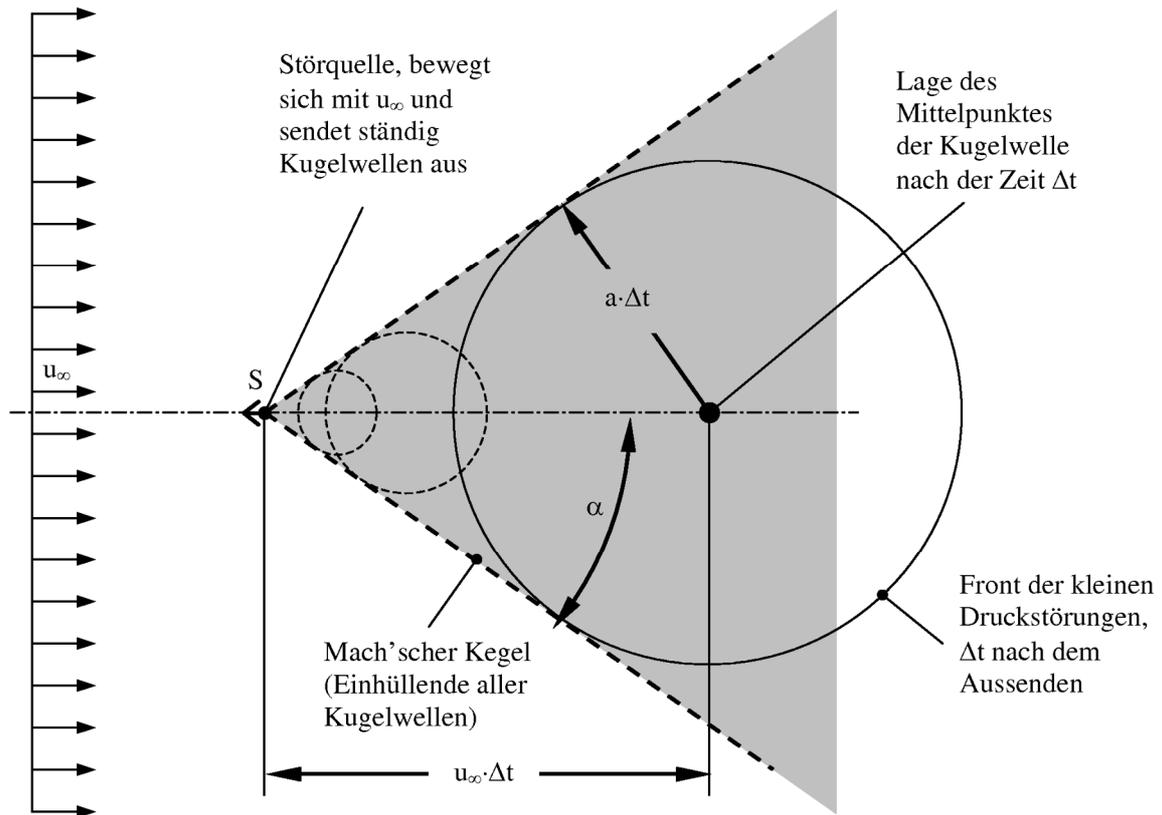


Abbildung 11.10-1: Front der bei S ausgehenden Druckstörungen nach der Zeit Δt und Mach'scher Kegel

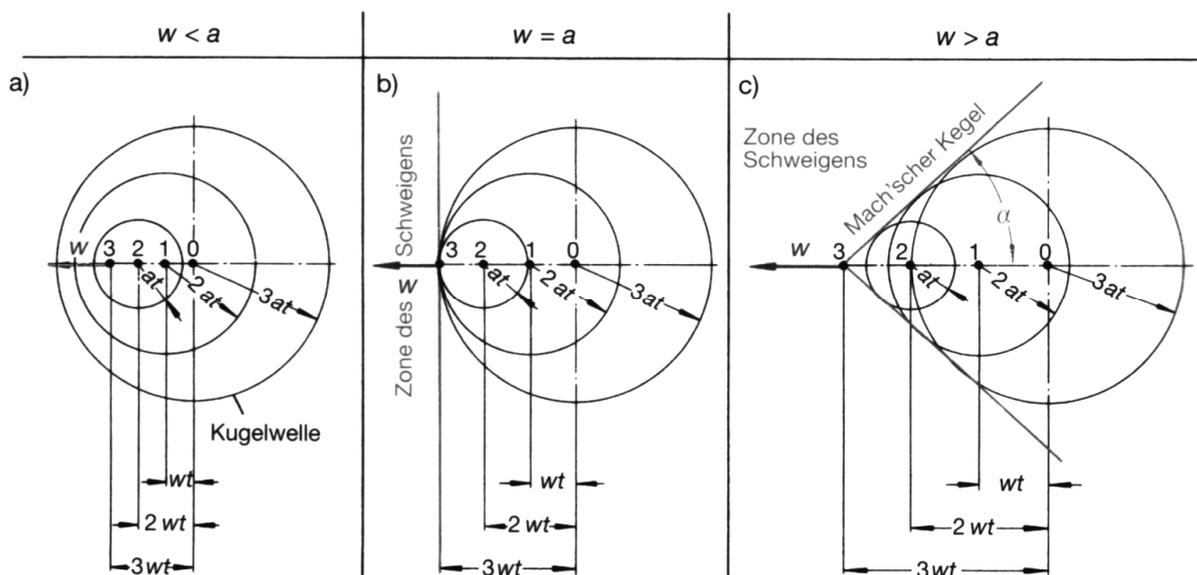


Abbildung 11.10-2: Ausbreitung von Druckstörungen bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Störquelle