Definition

Im Raum H sei ein orthonormales System $\{e_i\}$ von Elementen gegeben. Wenn es kein anderes Element $x \in H$ verschieden von Null gibt, das zu allen Elementen e_i orthogonal ist, heißt dieses System **vollständig**.

Definition. Das System $\{e_i\}$ heißt abgeschlossen in H, wenn für jedes $x \in H$ gilt die **Parsevalsche Gleichung**

$$\sum_1^\infty |c_i|^2 = \|x\|^2 \text{ für } \forall x \in H.$$

Ein abgeschlossenes orthonormales System heißt auch Orthonormalbasis des Hilbert-Raums H.

Ein beispiel des vollständiges Orthonormalsystems ist das folgende System: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \ldots\right\}$ im reelen Raum $L_2[-\pi,\pi]$.

Behauptung. In beliebigen separablen Hilbert-Raum existiert ein vollständiges Orthonormalsystem.

Beweis: Es sei $G=\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$ eine beliebige abzählbare Menge in H, $\bar{G}=H$, $g_j \neq 0$, $j=1,2,\ldots$. Mit L_1 bezeichnen wir der Raum der durch $e_1 = g_1/\|g_1\|$ erzeugt ist. g_{n_2} sei das erste Element aus G, $g_{n_2} \notin L_1$ und h_2 die Projektion von g_{n_2} auf $H \dot{-} L_1$. Als e_2 nehmen wir das Element $\frac{h_2}{\|h_2\|} =: e_2$

Mit L_2 bezeichnen wir der Raum, der durch e_1 und e_2 erzeugt ist. Sei g_{n_3} das erste Element aus G, das nicht zu L_2 gehört und h_3 die Projektion von g_{n_3} auf $H \dot{-} L_2$. Dann setzen wir $e_3 = \frac{h_3}{\|h_3\|}, \ldots$ Durch diesen Weg erhalten wir ein orthonormales System $e_1, e_2, \ldots$. Da nach der Konstruktion jedes g_m einem L_n angehört, so durch den Systems $\{e_i\}$ ung $\{g_i\}$ Unterraume übereinstimmen. Wir merken, daß $\{e_i\}$ nicht endlich sein kann. Wäre es endlich (aus s Elementen), dann gibt es kein $s+1$ unabhängiges Elemente, was widerspricht dem Fakt, dass H - unendlichdimensional ist. $\triangle$

Isomorphie der separablen Hilbert-Räume: Es sei H ein separabler Hilbert-Raum, $\{e_i\}$ vollständiges Orthonormalsystem. Dann

Dann konvergiert die Reihe $\sum_1^\infty |c_i|^2$, für beliebiges $x \in H$, wobei c_i die Fourie Koeffizienten von x bezüglich $\{e_i\}$ sind. $\tilde{x} = (c_1, c_2, \ldots)$ kann man als Element aus l_2 ansehen. $\forall x \in H$ ist also ein $\tilde{x} \in l_2$ zugeordnet und da $\{e_i\}$ vollständig ist, folgt $\|x\|_H = \left(\sum_1^\infty |c_i|^2\right)^{1/2} = \|\tilde{x}\|_{l_2}$ (1a) (Isometrie)

Somit $\forall x, y \in H$ sind die entsprechende Elemente $\tilde{x}, \tilde{y} \in l_2$ zugeordnet und für $x \pm y$ entspricht $\tilde{x} \pm \tilde{y}$. Aus (1a) folgt

$$\|x - y\|_H = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{l_2}.$$

Es sei $\tilde{z} \in l_2$ ($z = (d_1, d_2, \ldots)$). Wir setzen $z_n = \sum_1^n d_i e_i$, $z_n \in H$. Es gilt

$$\|z_m - z_n\|_H^2 = \left\|\sum_{n+1}^m d_i e_i\right\|^2 = \sum_{n+1}^m |d_i|^2 \to 0,\ m, n \to \infty, \text{ weil } \sum_1^\infty |d_i|^2 < \infty$$

$\Rightarrow \{z_m\}$ eine Fundamentalfolge in H ist $\Rightarrow \exists z \in H$, sodaß

$(z, e_i) = \lim_{n \to \infty} (z_n, e_i) = d_i$ ist.

d_i sind die Fourie Koeffizienten von z bezüglich $\{e_i\}$.

Somit $\forall \tilde{z} \in l_2$ entspricht ein $z \in H$.

Die beschriebene Zuordnung zwischen H und l_2 ist isometrisch und isomorph. Es gilt

Satz: Jeder komplexe (reelle) separable Hilbert-Raum ist dem komplexen (reelen) Raum l_2 isomorph und isometrisch, Folglich sind alle separable komplexen (reellen) Hilbert-Räume isomorph-isometrisch.

Folgerung (Riesz, Fischer), Die reele Räume $L_2[0,1]$ und l_2 sind isomorph und isometrisch.

Die allgemeine Form linearer Funktionale auf Hilbert Raum.

Es sei f ein linearer Funktional auf H (H ist Hilbert-Raum). Ein komplexes Funktional heißt **linear**, wenn es aditiv, homogen und stetig ist. Bezeichne mit $L = \ker f = \{x \in H, f(x) = 0\}$. L ist eine Teilmenge von H. Weil f linear ist $\Rightarrow$ L ein linearer Teilraum von H ist.

Bezeichne mit x_0 die Projektion von $x \in H$ (x ist beliebig), auf den Unterraum $H \dot{-} L$. Dann ist $f(x_0) = \alpha \neq 0$ und für $x_1 = \frac{x_0}{\alpha}$ hat man $f(x_1) = 1$. Und wenn $f(x) = \beta$, dann

$$f(x) - \beta f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x - \beta x_1) = 0 \Rightarrow x - \beta x_1 = z,\ z \in L.$$

oder $x = \beta x_1 + z \Rightarrow H = L \dot{+} \{x_1\}$. Nach der Voraussetzung $z \perp x_1 \Rightarrow (x, x_1) = \beta \|x_1\|^2 \Leftrightarrow f(x) = \left(x, \frac{x_1}{\|x_1\|^2}\right)$.

Wenn wir jetzt $\frac{x_1}{\|x_1\|} \stackrel{!}{=} u$, dann erhalten wir $f(x) = (x, u)$ (2a)

(2a) ist die Darstellung von f. Jetzt zeigen wir, daß u eindeutig bestimmt ist. Wir nehmen das Gegenteil an: $\exists v$, so daß

$f(x) = (x, v) \Rightarrow (x, u - v) = 0 \quad \forall x \in H \Rightarrow v = u$.

Aus (2a) folgt $|f(x)| \leq \|x\| \cdot \|u\| \Rightarrow \|f\| \leq \|u\|$ und wenn $x = u \Rightarrow$

$f(u) = \|u\| \cdot \|u\| \Rightarrow \|f\| = \|u\|$.

Somit haben wir das folgende Satz bewiesen:

Satz: Jedes lineare Funktional auf einen Hilbert-Raum hat die Form (*) $f(x) = (x, u)$, wobei u durch $f(x)$ eindeutig bestimmt und $\|f\| = \|u\|$ ist $(u \in H)$.

Die umgekehrte Behauptung ist auch richtig: die Formel (*) definiert für jedes $u \in H$ ein lineares Functional f auf H mit $\|f\| = \|u\|$. Somit definiert (*) einen isometrischen Isomorphismus zwischen H und H^*.