Funktionalanalysis Woche 4

Dualraum, Konvergenz und Hilbertraum

4.1 Dualraum

Wenn nichts Anderes geschrieben wird, ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum in Abschnitt 4.1.

Definition 4.1 *Man nennt*

$$V^* := BL\left((V, \|\cdot\|) ; (\mathbb{R}, |\cdot|)\right)$$

den ***Dualraum*** *von V. Dieser Raum $(V^*, \|\cdot\|_*)$ mit*

$$\|A\|_* = \sup\left\{\frac{|Av|}{\|v\|}; v \in V \setminus \{0\}\right\}$$

ist ein normierter Vektorraum.

Der zweite Teil der Definition ist eigentlich eine Behauptung, die man jedoch direkt zeigen kann.

Weil $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist, folgt aus Theorem 2.10, dass $(V^*, \|\cdot\|_*)$ für jeden normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

. . . .

Beispiel 4.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und betrachte den normierten Vektorraum $\left(L^1(\Omega), \|\cdot\|_{L^1(\Omega)}\right)$. Er ist sogar ein Banachraum. Für jede Funktion $v \in L^\infty(\Omega)$ kann man $\phi_v : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definieren durch*

$$\phi_v(f) := \int_\Omega v(x) f(x)\, dx.$$

Man kann zeigen, dass $\phi_v \in L^1(\Omega)^*$.

Gibt es für alle $\phi \in L^1(\Omega)^*$ ein $v \in L^\infty(\Omega)$ derart, dass $\phi = \phi_v$?

Ja, das kann man, aber der Beweis ist nicht einfach. Sie finden ihn bei Steinhaus[1].

Beispiel 4.3 *Für jede Funktion $f \in L^1(\Omega)$ ist auch $\phi_f : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ wohldefiniert durch*

$$\phi_f(v) := \int_\Omega f(x) v(x)\, dx. \tag{4.1}$$

[1] H. Steinhaus: Additive und stetige Funktionaloperationen, Math. Zeitschrift 5 (1919), 186–221.

Auch hier kann man zeigen, dass $\phi_f \in L^\infty(\Omega)^*$. Gibt es für alle $\phi \in L^\infty(\Omega)^*$ ein $f \in L^1(\Omega)$ derart, dass $\phi = \phi_f$? Nein. Ein Gegenbeispiel zu zeigen ist jedoch nicht einfach, wenn Ω beschränkt ist.

Beispiel 4.4 *Sei nun $p \in (1,\infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $f \in L^p(\Omega)$ ist $\phi_f \in L^q(\Omega)^*$, wohldefiniert durch (4.1). Auch gibt es für jedes $\phi \in L^q(\Omega)^*$ ein $f \in L^p(\Omega)$ derart, dass $\phi = \phi_f$.*

. . . .

Aufgabe 4.1 *Zeigen Sie für $v \in L^\infty(\Omega)$ und ϕ_v aus Beispiel 4.2, dass $\phi_v \in L^1(\Omega)^*$ gilt.*

$\Phi_v(f) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$

- wir müssen zeigen, dass $\Phi: L^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ linear und beschränkt ist
- die Linearität folgt direkt aus der Linearität des Integrals: Für $f, g \in L^1(\Omega)$ und $s, t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Phi_v(sf+tg) = \int_\Omega (sf(x)+tg(x))v(x)\,dx = s\int_\Omega f(x)v(x)\,dx + t\int_\Omega g(x)v(x)\,dx$$
$$= s\,\Phi_v(f) + t\,\Phi_v(g).$$

- Φ_v ist beschränkt, denn

$$|\Phi_v(f)| = \left|\int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx\right| \le \|v\|_\infty \int_\Omega |f(x)|\,dx = \|v\|_\infty \|f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow \|\Phi_v\|_* \le \|v\|_\infty$$

Aufgabe 4.2 1. *Zeigen Sie, dass*

$$\phi : \left\{ v \in C(\mathbb{R});\ \lim_{x\to\infty} v(x) \text{ und } \lim_{x\to-\infty} v(x) \text{ existieren} \right\} \to \mathbb{R}$$

wohldefiniert ist durch

$$\phi(v) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M} \int_{-M}^{M} v(x)\,dx.$$

2. *Zeigen Sie, dass man dieses Funktional zu $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})^*$ erweitern kann.*

3. *Kann man für dieses ϕ eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ finden derart, dass $\phi = \phi_f$ wie in (4.1)?*

Definition 4.5 *Sei $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ und $v \in V$. Wenn für jedes $A \in V^*$ gilt, dass*

$$\lim_{n\to\infty} Av_n = Av,$$

dann heißt die Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***schwach konvergent*** *nach v. Man sagt v ist der* ***schwache Limes*** *von $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und man schreibt*

$$v_n \rightharpoonup v \text{ für } n \to \infty.$$

Lemma 4.6 *Sei $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ und $v \in V$.*
Wenn $v_n \to v$ für $n \to \infty$, dann $v_n \rightharpoonup v$ für $n \to \infty$.

Das heißt also:

Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

Beweis. Sei $A \in V^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |Av_n - Av| &= \lim_{n\to\infty} |A(v_n - v)| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \|A\|_* \|v_n - v\| \\
&\le \|A\|_* \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0
\end{aligned}$$

und $\lim_{n\to\infty} Av_n = Av$. ■

Schwache Konvergenz ist auch wirklich schwächer als normale Konvergenz, die man dann auch oft als starke Konvergenz beschreibt. Ein Beispiel dazu sehen wir später.

Ähnlich mit starkem Limes ist, dass eine Folge auch nur höchstens einen schwachen Limes haben kann:

Lemma 4.7 *Sei $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ und $v, w \in V$. Wenn $v_n \rightharpoonup v$ und $v_n \rightharpoonup w$, dann gilt $v = w$.*

Beweis. Sei $v \neq w$. In Korollar 3.11 findet man, dass es ein stetiges lineares Funktional $\phi \in V^*$ gibt, mit

$$\phi(v) \neq \phi(w).$$

Wenn $v_n \rightharpoonup v$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \phi(v_n) = \phi(v)$ und ähnlich gilt $\lim_{n\to\infty} \phi(v_n) = \phi(w)$, ein Widerspruch. ■

Aufgabe 4.3 *Wir betrachten $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ mit $\|\cdot\|$ der euklidischen Norm.*

1. *Beschreiben Sie alle Elemente in $(\mathbb{R}^n)^*$.*
2. *Geben Sie eine Norm an für $(\mathbb{R}^n)^*$.*

1. · alle linearen Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ sehen wie folgt aus:

$$f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad \text{mit } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

· diese sind auch linear beschränkt, denn

$$|f(x)| = \left| \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left\| \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \right\| \|x\|$$

2. $\|\cdot\|_*$ definiert durch

$$\|f\|_* = \left\| \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \right\| \quad \text{für } f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

ist eine Norm für $(\mathbb{R}^n)^*$.

4.2 Doppelt dual

Wenn man schon für einen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ den normierten Dualraum $(V^*, \|\cdot\|_*)$ definiert, dann kann man ja auch den doppelt Dualen $(V^{**}, \|\cdot\|_{**})$ definieren. Dabei kann man direkt für jedes $v \in V$ einen Operator $F_v \in V^{**}$ finden, nämlich durch

$$F_v(\phi) = \phi(v) \text{ für } \phi \in V^*. \tag{4.2}$$

Für $v = 0$ folgt $F_v(\phi) = 0$ für alle $\phi \in V^*$ und die triviale Abbildung liegt in V^{**}. Es gilt $|\phi(v)| \leq \|\phi\|_* \|v\|$ und

$$\begin{aligned} \|F_v\|_{**} &= \sup\left\{\frac{|F_v(\phi)|}{\|\phi\|_*}; 0 \neq \phi \in V^*\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{|\phi(v)|}{\|\phi\|_*}; 0 \neq \phi \in V^*\right\} \leq \|v\|. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Lemma 4.8 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Sei $v \in V$ und $F_v \in V^{**}$ definiert durch (4.2). Dann gilt*

$$\|F_v\|_{**} = \|v\|.$$

Beweis. Für $v = 0$ folgt die Aussage direkt. Nehmen wir an, $\|v\| \neq 0$. Die Abschätzung nach oben findet man in (4.3). Für die Abschätzung in der anderen Richtung definiert man $f_v : \mathrm{Span}(v) \to \mathbb{R}$ durch

$$f_v(tv) = t\|v\| \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Mit Hahn-Banach kann man diese lineare Funktion mit Norm 1 erweitern zu $\phi_v \in V^*$ mit gleicher Norm und dies zeigt, dass das Supremum in (4.3) angenommen wird für $\phi = \phi_v$. ■

Weil $(V^{**}, \|\cdot\|_{**})$ immer ein Banachraum ist, auch wenn $(V, \|\cdot\|)$ das nicht ist, weiß man, dass V^{**} im Allgemeinen echt größer als V ist. Anders gesagt, wenn $(V, \|\cdot\|)$ kein Banachraum ist, dann gibt es $F \in V^{**}$, die man nicht als F_v für $v \in V$ schreiben kann.

Definition 4.9 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Wenn für jedes $F \in V^{**}$ ein $v \in V$ existiert derart, dass*

$$F_v(\phi) = \phi(v) \text{ für } \phi \in V^*,$$

*dann heißt $(V, \|\cdot\|)$ **reflexiv**.*

. . . .

Beispiel 4.10

- *Für $p \in (1, \infty)$ ist $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ reflexiv.*
- *$(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ und $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ sind nicht reflexiv.*
- *$\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\right)$, für $p \in (1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, ist reflexiv.*
- *$\left(L^1(\Omega), \|\cdot\|_{L^1(\Omega)}\right)$ und $\left(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$ sind nicht reflexiv.*

Wenn der normierte Vektorraum nicht reflexiv ist, ist die folgende Konvergenz interessant:

Definition 4.11 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V^*$ und $\phi \in V^*$. Wenn für jedes $v \in V$ gilt, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(v) = \phi(v),$$

*dann heißt die Folge **schwach-$*$ konvergent** in V^* nach ϕ. Man schreibt*

$$\phi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ für } n \to \infty.$$

Schwach-konvergent für eine Folge $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V^*$ bedeutet, dass

$$\lim_{n\to\infty} F(\phi_n) = F(\phi) \text{ für alle } F \in V^{**}.$$

Wenn eine Folge schwach-$*$ konvergent ist, dann bedeutet das für F_v in (4.2), dass

$$\lim_{n\to\infty} F_v(\phi_n) = F_v(\phi) \text{ für alle } v \in V.$$

Also gilt für $\phi_n, \phi \in V^*$, dass

$$\phi_n \to \phi \implies \phi_n \rightharpoonup \phi \implies \phi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \phi.$$

Wenn $(V, \|\cdot\|)$ nicht reflexiv ist, dann ist schwach-$*$ konvergent schwächer als schwach konvergent.

Theorem 4.12 (Banach-Alaoglu) *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein separabler Banachraum. Dann hat jede beschränkte Folge von Funktionalen $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V^*$ eine schwach-$*$ konvergente Teilfolge.*

Beweis. Beschränkt heißt hier, dass $c \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$\|\phi_n\|_* \le c \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Separabel bedeutet, dass es eine abzählbare dichte Teilmenge $S = \{v_m\}_{m\in\mathbb{N}^+} \subset V$ gibt.

• Wir werden Teilfolge $\{\phi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ finden mit $\phi_{n_k}(v_m)$ konvergent für alle $v_m \in S$ durch ein sogenanntes Diagonalverfahren.

Weil $\{\phi_n(v_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist in $\mathbb{R}$, gibt es eine konvergente Teilfolge und $\phi_{n_{1,k}}(v_1) \to c_1 =: \phi(v_1)$ für $k \to \infty$. Diese Teilfolge hat wiederum ein Teilfolge mit $\phi_{n_{2,k}}(v_2) \to c_2 =:$

$\phi(v_2)$ für $k \to \infty$. Und so weiter. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}^+$, dass

$$\phi_{n_{k,k}}(v_m) \to \phi(v_m) \text{ für } k \to \infty \tag{4.4}$$

und ϕ ist wohldefiniert auf der dichten Teilmenge S von V. Dann liefert $\phi_{n_k} := \phi_{n_{k,k}}$ die gewünschte Teilfolge.

• Wenn $v_m, v_\ell \in S$, dann folgt

$$\begin{aligned} |\phi(v_m) - \phi(v_\ell)| &= \lim_{k\to\infty} \left|\phi_{n_{k,k}}(v_m) - \phi_{n_{k,k}}(v_\ell)\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left|\phi_{n_{k,k}}(v_m - v_\ell)\right| \le c\,\|v_m - v_\ell\|\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dies bedeutet, dass ϕ Lipschitz-stetig ist mit Konstante c auf S.

• Weil S dicht in V liegt, gibt es für jedes $v \in V$ eine Folge $\{v_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $v_{m_k} \to v$ für $k \to \infty$. Wegen (4.5) ist die Erweiterung von ϕ auf V, definiert durch

$$\phi(v) := \lim_{k\to\infty} \phi(v_{m_k}) \tag{4.6}$$

nicht abhängig von der gewählten Folge. Deshalb ist ϕ durch (4.6) wohldefiniert und außerdem, wenn $v_{m_k} \to v$ und $v_{n_k} \to w$ für $k \to \infty$, dann folgt

$$\begin{aligned} |\phi(v) - \phi(w)| &= \lim_{k\to\infty} |\phi(v_{m_k}) - \phi(v_{n_k})| \\ &\le \lim_{k\to\infty} c\,\|v_{m_k} - v_{n_k}\| = c\,\|v - w\|\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dies bedeutet, dass $\phi : V \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist mit Konstante c.

• Die Linearität von ϕ zeigt man durch Approximation mit $\phi_{n_{k,k}}$ für k genügend groß: Sei $v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es $v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3} \in S$ mit

$$\|v - v_{k_1}\|\,, \|w - v_{k_2}\|\,, \|(\alpha v + \beta w) - v_{k_3}\| < \varepsilon.$$

Man bekommt die folgenden Abschätzungen: Mit (4.7) folgt:

$$\begin{aligned} &|\phi(\alpha v + \beta w) - \alpha\phi(v) - \beta\phi(w)| \le \\ &|\phi(v_{k_3}) - \alpha\phi(v_{k_1}) - \beta\phi(v_{k_2})| + (1 + |\alpha| + |\beta|)\,c\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Mit (4.4) folgt für k genügend groß, dass für $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\left|\phi(v_{k_i}) - \phi_{n_{k,k}}(v_{k_i})\right| < \varepsilon. \tag{4.9}$$

Die Linearität von $\phi_{n_{k,k}}$ zeigt

$$\begin{aligned} &\left|\phi_{n_{k,k}}(v_{k_3}) - \alpha\phi_{n_{k,k}}(v_{k_1}) - \beta\phi_{n_{k,k}}(v_{k_2})\right| \\ &\quad = \left|\phi_{n_{k,k}}(v_{k_3} - \alpha v_{k_1} - \beta v_{k_2})\right| \\ &\le c\,\|v_{k_3} - \alpha v_{k_1} - \beta v_{k_2}\| \le c\,(1 + |\alpha| + |\beta|)\,\varepsilon \end{aligned} \tag{4.10}$$

Kombiniert man (4.8), (4.9) und (4.10), so folgt

$$|\phi(\alpha v + \beta w) - \alpha\phi(v) - \beta\phi(w)| < (1 + |\alpha| + |\beta|)\,(2c + 1)\,\varepsilon$$

Aus (4.7) folgt dann, dass $\|\phi\|_* \le c$.

• Wir müssen noch zeigen, dass $\phi_{n_{k,k}} \overset{*}{\rightharpoonup} \phi$. Für $v_n \in S$ gilt dies wegen der Konstruktion. Für $v \in V \setminus S$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $v_n \in S$ mit $\|v - v_n\| < \varepsilon$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \left|\phi_{n_{k,k}}(v) - \phi(v)\right| &\le \left|\phi_{n_{k,k}}(v) - \phi_{n_{k,k}}(v_n)\right| + \\ &\quad + \left|\phi_{n_{k,k}}(v_n) - \phi(v_n)\right| + |\phi(v_n) - \phi(v)| \\ &\le \left|\phi_{n_{k,k}}(v_n) - \phi(v_n)\right| + 2c\varepsilon. \end{aligned}$$

Weil $\left|\phi_{n_{k,k}}(v_n)-\phi(v_n)\right| \to 0$ für $k\to\infty$ gilt, folgt

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\phi_{n_{k,k}}(v)-\phi(v)\right| \le 2c\varepsilon$$

und weil dies für jedes $\varepsilon>0$ gilt, findet man

$$\phi_{n_{k,k}} \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ für } k\to\infty,$$

und das war noch zu beweisen. ■

Definition 4.13 *Sei $(V,\|\cdot\|)$ ein Banachraum. Die Teilmenge $A\subset V$ heißt* ***schwach folgenkompakt****, wenn jede Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ eine in A schwach-konvergente Teilfolge hat: Es gibt $v\in A$ und $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit*

$$\lim_{k\to\infty}\phi(v_{n_k})=\phi(v) \text{ für alle } \phi\in V^*.$$

Proposition 4.14 *Sei $(V,\|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Wenn $(V^*,\|\cdot\|_*)$ separabel ist, dann ist $(V,\|\cdot\|)$ separabel.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ eine abzählbare dichte Teilmenge in V^*. Dann liegt

$$\mathcal{F}_1 := \{f/\|f\|_*\,;\ f\in\mathcal{F}\setminus\{0\}\}$$

dicht in $\{g\in V^*;\|g\|_*=1\}$ und ist auch abzählbar, sagen wir

$$\mathcal{F}_1=\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\,.$$

Weil $\|f_k\|_*=1$ findet man $v_k\in V$ mit $\|v_k\|=1$ und

$$f_k(v_k)>\tfrac12.$$

Dann ist $V_0:=\overline{\operatorname{Span}\left(\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right)}$ ein separabler Teilraum von V. Für die Separabilität nehme man die Kombinationen in $\operatorname{Span}\left(\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right)$ mit rationalen Koeffizienten.

Wir zeigen, dass $V=V_0$: Wenn $V\neq V_0$, dann gibt es $\tilde v\in V\setminus V_0$. Für

$$V_1=\{v_0+t\tilde v; v_0\in V_0 \text{ und } t\in\mathbb{R}\}$$

definiert man $g(v_0+t\tilde v)=t\|\tilde v\|$. Dies ist ein beschränktes lineares Funktional auf V_1 mit Norm 1, das man mit Theorem 3.10 erweitern kann zu $\tilde g\in V^*$ mit $\|\tilde g\|_*=1$.

Dieses $\tilde g$ kann man wiederum approximieren mit Elementen f_{k_n} aus $\mathcal{F}_1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\tfrac12 < f_{k_n}(v_{k_n}) = f_{k_n}(v_{k_n})-\tilde g(v_{k_n}) &\le \left|f_{k_n}(v_{k_n})-\tilde g(v_{k_n})\right|\\ &\le \|f_{k_n}-\tilde g\|_*\,\|v_{k_n}\| = \|f_{k_n}-\tilde g\|_* \to 0,\end{aligned}$$

ein Widerspruch. ■

Als Korollar von Banach-Alaoglu und der letzten Proposition finden wir das nächste Ergebnis:

Korollar 4.15 *Sei $(V,\|\cdot\|)$ ein reflexiver, separabler Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel in V schwach kompakt.*

. . . .

Aufgabe 4.4 *Beweisen Sie dieses Korollar.*

Sei $\overline{B_1(0)} = \{v \in V, \|v\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel und $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1(0)}$ eine Folge.

zz: $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine in $\overline{B_1(0)}$ schwach konvergente Teilfolge

- Setze $U = \overline{\operatorname{span}\{v_n, n \in \mathbb{N}\}}$

$\Rightarrow$ 1. U ist reflexiv (Übung)
2. U ist seperabel

$\Longrightarrow U^{**}$ ist seperabel

$\Longrightarrow U^{*}$ ist seperabel (Übung)

- mit Banach-Alaoglu folgt, dass $\{F_{v_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach * konvergente Teilfolge besitzt $\rightarrow$ es ex. $F \in U^{**}$ und $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ s.d.

$$F_{v_{n_k}}(\phi) \longrightarrow F(\phi) \quad \text{für alle } \phi \in U^* \text{ und } k \to \infty$$

- da U reflexiv ist, ex. ein $v \in U$ s.d. $F = F_v$

$\Rightarrow \phi(v_{n_k}) = F_{v_{n_k}}(\phi) \longrightarrow F(\phi) = F_v(\phi) = \phi(v)$ für alle $\phi \in U^*$

- da für alle $\varphi \in V^*$ auch $\varphi|_U \in U^*$ folgt auch

$$\phi(v_{n_k}) \longrightarrow \phi(v) \quad \text{für alle } \phi \in V^*$$

$\Longrightarrow v_{n_k} \rightharpoonup v$ für $k \to \infty$

4.3 Hilbertraum

Wenn $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum ist, dann hat die Norm $\|\cdot\|$, definiert durch

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

eine Eigenschaft, die man auch das Parallelogrammgesetz nennt:

$$\sum \text{Seitenlängen}^2 = \sum \text{Diagonallängen}^2.$$

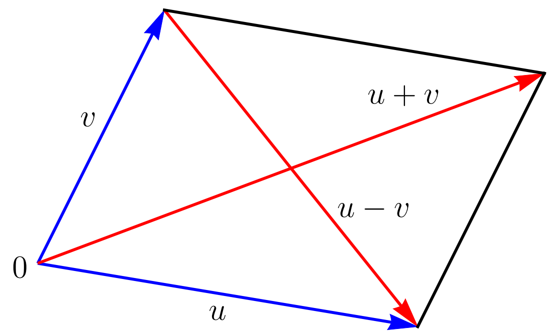


Abbildung 4.1: Illustration zum Parallelogrammgesetz

Lemma 4.16 *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum mit der induzierten Norm $\|\cdot\|$, so gilt*

$$2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \quad \text{für alle } u, v \in H.$$

Als nächstes werden wir einige Teilräume anschauen.

Definition 4.17 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und S eine endliche oder unendliche Menge in V. Man definiert*

$$\operatorname{Span}(S) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k s_k;\, c_k \in \mathbb{R},\ s_k \in S \text{ und } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Wenn $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist, nennt man $\overline{\operatorname{Span}(S)}$ den durch S ***generierten Teilraum*** *von V.*

Auch wenn S unendlich viele Elemente hat, ist die lineare Hülle $\operatorname{Span}(S)$ die Menge der endlichen linearen Kombinationen von Elementen aus S.

Lemma 4.18 *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und S eine endliche oder unendliche Menge in H. Dann ist*

$$S^\perp := \{v \in H; \langle v, s\rangle = 0 \text{ für alle } s \in S\}$$

ein abgeschlossener Teilraum von H.
*Man nennt $S^\perp$ den **Orthogonalraum** zu S.*

Beweis. Dass $S^\perp$ ein Teilraum von H ist, folgt aus

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, s\rangle = \alpha \langle v_1, s\rangle + \beta \langle v_2, s\rangle$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2 \in V$. Dieser Raum ist sogar abgeschlossen: Wenn $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ und $v_n \in S^\perp$, dann gilt wegen Cauchy-Schwarz für $s \in S$, weil $\langle v_n, s\rangle = 0$, dass

$$|\langle v, s\rangle| = |\langle v - v_n, s\rangle| \le \|v - v_n\| \, \|s\| \to 0,$$

für $n \to \infty$, also $\langle v, s\rangle = 0$. ■

Wenn V ein Teilraum von H ist, dann gilt

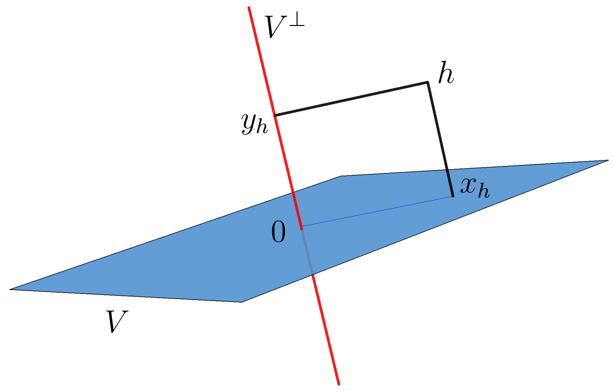
$$V \cap V^\perp = \{0\},$$

denn $v \in V \cap V^\perp$ bedeutet $\langle v, v\rangle = 0$. Auch gilt

$$V \subset V^{\perp\perp}$$

mit Gleichheit im Fall, dass V ein abgeschlossener Teilraum ist.

Genaueres über Teilraum und dessen Orthogonalraum finden Sie im nächsten technischen Theorem.



Theorem 4.19 *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und V ein abgeschlossener Teilraum in H. Dann gilt folgendes:*

1. *$H = V \oplus V^\perp$, bei dem $\oplus$ bedeutet: für jedes $h \in H$ existiert genau ein Paar $(x_h, y_h) \in V \times V^\perp$ mit $h = x_h + y_h$*
2. *und für die so wohl-definierten Abbildungen*

$$P_V : H \to V \text{ mit } P_V(h) = x_h,$$
$$P_{V^\perp} : H \to V^\perp \text{ mit } P_{V^\perp}(h) = y_h,$$

hat man:

(a) $P_V, P_{V^\perp}$ sind linear und stetig mit

$$\|P_V\|_{H\to H}, \|P_{V^\perp}\|_{H\to H} \le 1;$$

(b) $\|h - P_V(h)\| = \inf_{x\in V} \|h - x\|$ und
$$\|h - P_{V^\perp}(h)\| = \inf_{y \in V^\perp} \|h - y\|.$$

*NB: P_V nennt man die **orthogonale Projektion** auf V.*

Beweis. Wir fangen hinten an. Sei $h \in H$ und $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V$ eine Folge mit

$$\|h - x_n\| \to \inf_{x\in V} \|h - x\| =: d.$$

Wegen Lemma 4.16 gilt

$$\begin{aligned} & \|x_n - x_m\|^2 = \|(h - x_n) - (h - x_m)\|^2 \\ = \; & 2\|h - x_n\|^2 + 2\|h - x_m\|^2 - \|2h - x_n - x_m\|^2 \\ = \; & 2\|h - x_n\|^2 + 2\|h - x_m\|^2 - 4\left\|h - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \\ \leq \; & 2\|h - x_n\|^2 + 2\|h - x_m\|^2 - 4d^2 \to 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dann ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und weil H ein Hilbertraum ist, ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sogar auch konvergent und konvergiert zu einem $x_\infty \in V$, weil V abgeschlossen ist.

Seien nun $x_\triangle$ und $x_\triangledown$ zwei solche Minimalstellen, dann gilt ähnlich wie in (4.11), dass

$$\|x_\triangle - x_\triangledown\|^2 \leq 2\|h - x_\triangle\|^2 + 2\|h - x_\triangledown\|^2 - 4d^2 = 0$$

und es folgt $x_\triangle = x_\triangledown$. Also gibt es ein eindeutiges $x_\infty \in V$ mit

$$\|h - x_\infty\| = \inf_{x\in V} \|h - x\|$$

und wir definieren

$$P_V(h) := x_\infty. \tag{4.12}$$

- Es gilt, dass $h - P_V(h) \in V^\perp$, denn wenn es $v \in V$ gibt mit $\langle h - P_V(h), v\rangle \neq 0$, dann folgt mit

$$t = \frac{\langle h - P_V(h), v\rangle}{\|v\|}$$

ein Widerspruch:

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|h - P_V(h) - tv\|^2 \\ &= \|h - P_V(h)\|^2 - 2t\langle h - P_V(h), v\rangle + t^2\|v\|^2 \\ &= \|h - P_V(h)\|^2 - \langle h - P_V(h), v\rangle^2 < d^2. \end{aligned}$$

- Außerdem ist $P_V(h)$ das einzige Element von V mit

$$h - P_V(h) \in V^\perp.$$

Wenn auch $v \in V$ diese Eigenschaft hat, dann gilt

$$V \ni P_V(h) - v = (h - v) - (h - P_V(h)) \in V^\perp$$

und weil $V \cap V^\perp = \{0\}$, folgt $P_V(h) = v$.

Für jedes $h \in H$ gibt es also ein eindeutiges Paar $(x, y) \in V \times V^\perp$ mit $h = x + y$, nämlich

$$x = P_V(h) \text{ und } y = h - P_V(h).$$

Das zeigt $H = V \oplus V^\perp$.

- P_V ist linear: Sei $h = c_1h_1 + c_2h_2$ mit $c_i \in \mathbb{R}$ und $h_i \in H$. Weil

$$c_1P_V(h_1) + c_2P_V(h_2) \in V$$

und

$$\begin{aligned} & h - (c_1P_V(h_1) + c_2P_V(h_2)) \\ = \; & c_1(h_1 - P_V(h_1)) + c_2(h_2 - P_V(h_2)) \in V^\perp, \end{aligned}$$

und weil die Zerlegung eindeutig ist, folgt

$$P_V(h) = c_1P_V(h_1) + c_2P_V(h_2).$$

- $\|P_V\|_{H\to H} \le 1$: Für $h \in H$ gilt

$$\begin{aligned}\|h\|^2 &= \|h - P_V(h) + P_V(h)\|^2 \\ &= \|h - P_V(h)\|^2 + 2\langle h - P_V(h), P_V(h)\rangle + \|P_V(h)\|^2 \\ &= \|h - P_V(h)\|^2 + \|P_V(h)\|^2\end{aligned}$$

und $\|P_V(h)\|^2 \le \|h\|^2$. Dies zeigt auch, dass für

$$P_{V^\perp} := I - P_V$$

gilt $\|P_{V^\perp}\| \le 1$.

- Schlussendlich zeigen wir noch, dass

$$\inf_{v\in V^\perp} \|h - v\| = \|h - P_{V^\perp}(h)\|. \tag{4.13}$$

Weil $P_{V^\perp}(h) \in V^\perp$, folgt

$$\inf_{v\in V^\perp} \|h - v\| \le \|h - P_{V^\perp}(h)\|. \tag{4.14}$$

Außerdem, folgt für alle $v \in V^\perp$, dass

$$w := h - P_V(h) - v \in V^\perp.$$

So findet man weil $P_V(h) \in V$, dass $\langle w, P_V(h)\rangle = 0$ und

$$\begin{aligned}\|h - v\|^2 &= \|w + P_V(h)\|^2 \\ &= \|w\|^2 + 2\langle w, P_V(h)\rangle + \|P_V(h)\|^2 \\ &= \|w\|^2 + \|P_V(h)\|^2 \ge \|P_V(h)\|^2 \\ &= \|h - P_{V^\perp}(h)\|^2. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Aus (4.14) und (4.15) folgt (4.13). ■

Wenn $V = \operatorname{Span}(a)$ für $\|a\| = 1$, dann gilt

$$P_V(h) = \langle a, h\rangle\, a \text{ und } V^\perp = \{h \in H; \langle a, h\rangle = 0\}.$$

Die Zerlegung ist eindeutig und es gilt $\langle a, h\rangle\, a \in \operatorname{Span}(a) = V$ und $h - \langle a, h\rangle\, a \in V^\perp$:

$$\langle h - \langle a, h\rangle\, a, a\rangle = \langle h, a\rangle - \langle a, h\rangle \|a\|^2 = 0.$$

. . . .

Aufgabe 4.5 *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und seien $a, b \in H$ zwei unabhängige Elemente. Wir setzen $V = \operatorname{Span}(a, b)$. Geben Sie eine Formel für $P_V(h)$.*

$$P_V(h) = \frac{\langle a,h\rangle}{\|a\|^2} a + \frac{\langle b - \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|^2} a, h\rangle}{\left\| b - \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|^2} a\right\|^2}\left(b - \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|^2} a\right)$$

bemerke, dass $a \perp b - \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|^2} a$, weil

$$\langle a, b - \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|^2} a\rangle = \langle a,b\rangle - \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|^2}\|a\|^2 = 0.$$

Theorem 4.20 (Der Darstellungssatz von Riesz für Hilberträume) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Dann gilt:*

1. *Für alle $v \in H$ ist $u \mapsto \langle v, u\rangle : H \to \mathbb{R}$ ein Element von H^*.*

2. *Für jedes $\phi \in H^*$ gibt es $v \in H$ mit $\phi(u) = \langle v, u\rangle$ für alle $u \in H$.*

Dieses Theorem besagt, dass man H und H^* identifizieren kann. In den nächsten Kapiteln werden wir das auch machen und statt H^* nur noch H schreiben.

Beweis. 1. Aus den Eigenschaften vom inneren Produkt folgt, dass ϕ_v, definiert durch $\phi_v(u) = \langle v, u\rangle$, linear ist. Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz zeigt die Beschränktheit:

$$|\phi_v(u)| = |\langle v, u\rangle| \leq \|v\| \, \|u\| \text{ für alle } u \in H.$$

Also gilt $\phi_v \in H^*$.

2. Sei $\phi \in H^*$ und definiere $V := \operatorname{Ker}(\phi)$. Weil $\phi \in H^*$ gilt, ist $\operatorname{Ker}(\phi)$ ein abgeschlossener Teilraum von H. Für $\phi = 0$ finden wir $\phi(u) = \langle 0, u\rangle$. Für $\phi \neq 0$ gilt $V \neq H$ und es gibt $a \in V^\perp$ mit $\|a\| = 1$.

Wir zeigen, dass

$$V^\perp = \operatorname{Span}(a).$$

Wenn es ein unabhängiges $b \in V^\perp$ gäbe, dann würde gelten, dass

$$\phi(\phi(a)\, b - \phi(b)\, a) = 0,$$

und

$$V^\perp \ni \phi(a)\, b - \phi(b)\, a \in \operatorname{Ker}(\phi) = V.$$

Also $\phi(a)\, b = \phi(b)\, a$ und weil $\phi(a) \neq 0$ sind a, b abhängig.

Aus Theorem 4.19 folgt dann, dass

$$H = \operatorname{Span}(a) \oplus \operatorname{Ker}(\phi)$$

und weil

$$P_{\operatorname{Span}(a)}(h) = \langle a, h\rangle\, a$$

folgt

$$\begin{aligned} \phi(h) &= \phi\left(P_{\operatorname{Span}(a)}(h)\right) + \phi\left(P_{\operatorname{Ker}(\phi)}(h)\right) \\ &= \phi(\langle a, h\rangle\, a) = \langle a, h\rangle\, \phi(a) = \langle \phi(a)\, a, h\rangle. \end{aligned}$$

Setzen wir $v = \phi(a)\, a$, so folgt $\phi(h) = \langle v, h\rangle$. ■

Aufgabe 4.6 *Im obigen Beweis steht der Satz: „Weil $\phi \in H^*$ gilt, ist $\operatorname{Ker}(\phi)$ ein abgeschlossener Teilraum von H“. Zeigen Sie dies.*

- $\ker(\phi)$ ist ein Teilraum von H, da $\ker(\phi) \neq \emptyset$ und für alle $x, y \in \ker(\phi)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) = 0$, also $x+y \in \ker(\phi)$ und $\phi(\alpha x) = \alpha\, \phi(x) = 0$, also $\alpha x \in \ker(\phi)$
- $\ker(\phi)$ ist abgeschlossen, da $\{0\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist und $\ker(\phi)$ das Urbild von 0 unter der stetigen Abbildung ϕ ist (Analysis II)

Wiederholung: Man kann mit der Definition von Stetigkeit zeigen:

$$A \subset H \text{ offen} \Longrightarrow \phi^{-1}(A) \text{ offen}$$

Damit finden wir:

$$\ker(\phi) = \phi^{-1}(0) = H \setminus \underbrace{\phi^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}\setminus\{0\}}_{\text{offen}})}_{\text{offen}} \quad \text{abgeschlossen}$$

Beispiel 4.21 *Für den Hilbertraum $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kann man nun zeigen, dass schwache Konvergenz tatsächlich schwächer ist als starke Konvergenz. Betrachte nämlich die Folge $\left\{x^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2$ definiert, durch*

$$x_k^{(n)} = \delta_{nk} := \begin{cases} 1 & \text{für } n = k. \\ 0 & \text{für } n \neq k. \end{cases}$$

Dieses δ_{nk} nennt man Kronecker Delta.
Man findet $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = 0$ und das bedeutet, dass $0 \in \ell^2$ als einziger Limes in Frage kommt. Weil jedoch $\left\|x^{(n)} - 0\right\|_2 = 1$ gilt, konvergiert die Folge nicht. Sei $\phi \in H^*$, dann gilt wegen Riesz, dass $v \in H$ existiert mit $\phi(u) = \langle v, u\rangle$ für alle $u \in H$. Es folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle v, x^{(n)} \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_k \delta_{nk} = \lim_{n\to\infty} v_n = 0.$$

Also gilt $x^{(n)} \rightharpoonup 0$ für $n \to \infty$.

. . . .

Aufgabe 4.7 *Wir betrachten den Hilbertraum $\left(L^2(0,\pi), \|\cdot\|_2\right)$. $L^2(0,\pi)$ ist die Menge aller quadratisch integrierbaren Funktionen $f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ und*

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^{\pi} f(x)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Geben Sie eine Folge an, die schwach konvergiert und nicht stark, und zeigen Sie dies.

- betrachte $f_n(x) = \sin(nx)$
- Es gilt $f_n \in L^2(0,\pi)$

1. f_n konvergiert schwach gegen Null:
   - für $g \in C_c^{\infty}(0,\pi)$ gilt
     $$\int_0^{\pi} \sin(nx) g(x) dx = \left[-\frac{1}{n}\cos(nx) g(x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(nx) g'(x) dx \le \frac{1}{n}\|g'\|_{\infty} \to 0$$
   - da $C_c^{\infty}(0,\pi) \subset L^2(0,\pi)$ dicht, gilt auch
     $$\int_0^{\pi} \sin(nx) g(x) dx \to 0 \text{ für alle } g \in L^2(\Omega)$$
     $$\overset{\text{Riesz}}{\Longrightarrow} \phi(\sin(nx)) \to 0 \text{ für alle } \phi \in (L^2(\Omega))^*$$
2. f_n konvergiert nicht stark:
   - als Grenzwert kommt nur 0 in Frage, jedoch gilt:
     $$\int_0^{\pi} |\sin(nx)|^2 dx = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} |\sin(x)|^2 dx = \int_0^{\pi} |\sin(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2} \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^+$$

Aufgabe 4.8 *Begründen Sie, dass jedes $\phi \in (\ell^2)^*$ wie folgt zu schreiben ist:*

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k x_k. \tag{4.16}$$

Welche Bedingung erfüllt $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$?

Aufgabe 4.9 *Sei $p, q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie die Ungleichung von Hölder für Reihen:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^q\right)^{1/q} \quad \text{für } \alpha \in \ell^p, \beta \in \ell^q.$$

Aufgabe 4.10 *Sei $p, q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

1. *Zeigen Sie, dass mit $v \in \ell^q$ für die Abbildung $\phi_v = \phi$, definiert durch (4.16), gilt, dass $\phi_v \in (\ell^p)^*$ und, dass $\|\phi_v\|_{(\ell^p)^*} \le \|v\|_{\ell^q}$.*
2. *Zeigen Sie $\|\phi_v\|_{(\ell^p)^*} = \|v\|_{\ell^q}$ mit Hilfe von $\phi_v(\tilde{v})$ für*
   $$\tilde{v}_k = \begin{cases} v_k^{q/p} & \text{wenn } v_k \ge 0, \\ -|v_k|^{q/p} & \text{wenn } v_k < 0. \end{cases}$$
3. *Für $p \in (1,\infty)$ ist $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ reflexiv. Zeigen Sie, dass es für jede Abbildung $\phi \in (\ell^p)^*$ ein $v \in \ell^q$ gibt mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und ϕ als in (4.16).*
4. *Gibt es auch für $\left(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty\right)$, dass für jedes $\phi \in (\ell^\infty)^*$ ein $v \in \ell^1$ existiert derart, dass*
   $$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k x_k?$$
   Schauen Sie Aufgaben 3.3 und 3.8 nochmals an.