Prof. Guido Sweers **WS 2012/2013**
Jan M. Krämer

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 7

Der Container neben der Physik, in den die Übungsaufgaben eingeworfen werden, ist in der Regel nur bis zum Ende des Übungsbetriebs geöffnet. Um Störungen bei der Abgabe zu vermeiden, sind wir zu folgender Regelung gekommen:

- Abgabe in den Briefkasten im Container bis spätestens Mittwoch 16:00,
  oder
- Abgabe am Donnerstag um 10:00 Uhr im Hörsaal am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1: [**5 Pkt.**] Gegeben sei das folgende System:

$$\begin{cases} u'(t) &= 1 - (v(t))^2 \\ v'(t) &= 1 - (u(t) - v(t))^2 \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte des Systems.

b) Entscheiden Sie bei jedem Gleichgewichtspunkt, ob er stabil oder instabil ist.

Aufgabe 2: [**5 Pkt.**] Gegeben sei das System

$$\begin{cases} u'(t) &= e^{v(t)-u(t)} - 1 \\ v'(t) &= \sin(\pi + u(t) + v(t)) \end{cases} \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems.

b) Berechnen Sie das um (π, π) linearisierte System.

c) Ist (π, π) ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt von (1)?

d) Skizzieren Sie eine Trajektorie in einer Umgebung von (π, π).

Aufgabe 3: [**5 Pkt.**] Für welche der folgenden Differentialgleichungen ist $\mathbb{R}$ das maximale Existenzintervall?

a) $x'(t) = \dfrac{\sin(x(t))}{1 + t^2 + (x(t))^2}$ mit $x(0) = 0$,

b) $x'(t) = e^{tx(t)}$ mit $x(0) = 0$,

c) $x'(t) = e^{-tx(t)}$ mit $x(0) = 0$.

Aufgabe 4: [**0 Pkt.**] Gegeben sei folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} (1 + x^2)y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems, indem Sie annehmen, dass sich die Lösung $y(x)$ als Potenzreihe schreiben lässt. Berechnen Sie die ersten fünf Koeffizienten.

Aufgabe 5: [0 Pkt.] Gegeben sei das System von Differentialgleichungen

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u),\ t \geq 0.$$

A sei eine Matrix mit konstanten Koeffizienten und für die Eigenwerte λ_i gelte $\operatorname{Re}\lambda_i < a$. Die Funktion f sei stetig und es gebe eine stetige Funktion $g(t)$, so dass $|f(t,x)| \leq g(t)\,|x|$.

a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante c gibt, so dass $\left\|e^{tA}\right\| \leq ce^{at}$.

b) Zeigen Sie, dass jede Lösung der Formel

$$u(t) = e^{tA}u(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, u(s))ds$$

genügt.

c) Verwenden Sie das Lemma von Grönwall für die Funktion $\Phi(t) = e^{-at}\,|u(t)|$, um zu zeigen, dass

$$|u(t)| \leq C\,|u(0)|\,e^{at+G(t)}$$

gilt. Hier ist $G(t) := \int_0^t g(s)ds$ und C hängt nicht von u ab.

Aufgabe 6: [5 Pkt.] Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x^2 - y \\ y^2 - 1 - x \end{pmatrix}.$$

Ein Gleichgewichtspunkt ist $(0, 1)$. In der Abbildung finden Sie Stromlinien zu den Lösungen. Wenn man Anfangswerte in der Nähe von $(0.4, 1.2)$ nimmt, dann können die Lösungskurven in verschiedene Richtungen laufen. Ist dies ein Widerspruch zu der stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten? Begründen Sie die Antwort.