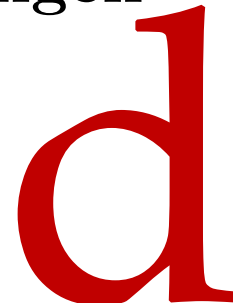


Gewöhnliche Differentialgleichungen

Woche 5

Approximationen und Funktionsfolgen



5.1 Approximationen

Wir werden in diesem Kapitel einige Möglichkeiten vorstellen, wie man eine Lösung einer Differentialgleichung approximieren kann. Um es nicht unnötig kompliziert zu machen, werden wir eine Gleichung erster Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

betrachten und nicht gleich ein System von Gleichungen erster Ordnung. Wenn man genau hinschaut, sollte man bemerken, dass die Approximationen für ein solches System, das heißt

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x)),$$

ähnlich sind.

Wenn man weiß, dass es eine Lösung gibt, kann man diese Lösung mit Approximationen darstellen. Jedoch ist es nicht nur deswegen nützlich, sondern man kann auch hoffen, dass gute Approximationen auch tatsächlich zu einer Lösung konvergieren ohne dass man a-priori weiß, dass es eine Lösung gibt. Genauer gesagt, wenn man eine Folge von Approximationen $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hat, die auf irgendeine passende Art eine Cauchy-Folge von Funktionen bilden, also $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$, kann man hoffen, dass diese Cauchy-Folge eine konvergente Folge bildet, also $\exists y_\infty$ mit $\|y_n - y_\infty\| \rightarrow 0$, und dass der Limes eine Lösung ist. Genau diesen Vorgang werden wir detailliert darstellen, um die Existenz einer Lösung nachzuweisen.

5.2 Numerische Methoden zur Approximation

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

und geben einige numerische Möglichkeiten, um die Lösung einer Differentialgleichung zu approximieren. Angenommen wird, dass f und y_0 gegeben sind. Die Funktion $x \mapsto y(x)$ wird gesucht. Die zwei einfachsten Verfahren sind die **Euler-Verfahren**.

Algorithmus 5.1 Das Euler-Vorwärts-Verfahren

Man nehme $h > 0$ eine kleine Zahl und setze $x_n = x_0 + nh$.

Man setze $y_0 = y_0$ und definiere iterativ:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung 5.1.1 Hier steht nichts anderes als

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n).$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist eine Approximation der Ableitung in Vorwärtsrichtung.

Verwendet man eine Approximation der Ableitung in Rückwärtsrichtung, so folgt:

Algorithmus 5.2 Das Euler-Rückwärts-Verfahren

Man nehme $h > 0$ eine kleine Zahl und setze $x_n = x_0 + nh$.

Man setze $y_0 = y_0$ und man löse y_{n+1} iterativ aus der Gleichung:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Meistens braucht man ein zusätzliches numerisches Verfahren um y_{n+1} zu bestimmen.

In beiden Fällen definiert man die approximative Lösung \tilde{y} in zwischenliegenden Stellen durch lineare Interpolation:

$$y(x) = \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} y_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n} y_n \quad \text{für } x \in (x_n, x_{n+1}).$$

Daher auch der Name „Polygonzugverfahren“. Siehe auch Abbildung 5.1.

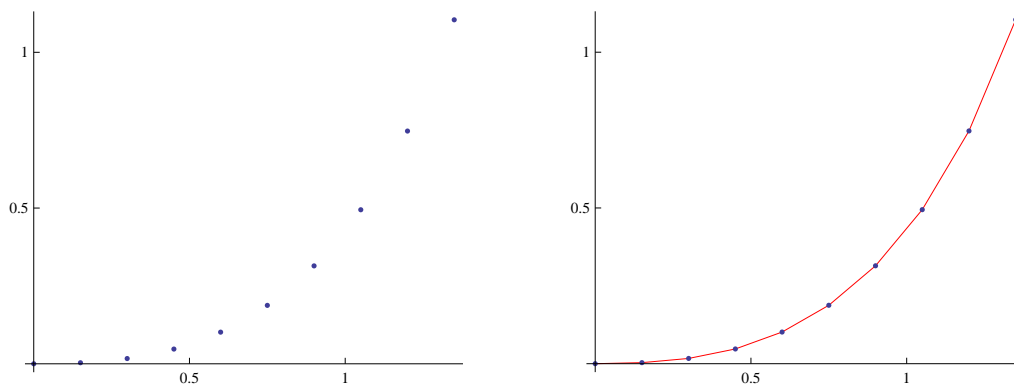


Abbildung 5.1: Links die diskreten Stellen aus der Approximation und rechts der Polygonzug

Bemerkung 5.2.1 Das vorwärts gerichtete Verfahren ist einfacher, da es explizit ist. Für die Rückwärtsrichtung muss man in jedem Schritt y_{n+1} implizit lösen. Leider ist die Vorwärtsrichtung instabiler.

Bemerkung 5.2.2 Cauchy hat wesentlich zum mathematischen Verständnis dieses Polygonzugverfahrens beigetragen und darum wird dieses Verfahren oft auch Euler-Cauchy-Verfahren genannt.

Bemerkung 5.2.3 Beide Eulerschen Polygonzugverfahren sind Einschrittverfahren. Das erste ist ein explizites, das zweite ein implizites Verfahren. Man kann sich selber davon überzeugen, dass

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y} + h \left(\frac{1}{2} f(x_n, \mathbf{y}_n) + \frac{1}{2} f(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \right)$$

oder

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h f \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \frac{\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_{n+1}}{2} \right)$$

eine Lösung besser approximieren könnte. Beide Vorschläge wären implizit. Stattdessen kann man auch Mehrschrittverfahren anwenden. Zum Beispiel das **Zweischritt-Adams-Bashforth-Verfahren**:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \left(\frac{3}{2} f(x_n, \mathbf{y}_n) - \frac{1}{2} f(x_{n-1}, \mathbf{y}_{n-1}) \right).$$

Bei diesem Verfahren braucht man zwei Startwerte: \mathbf{y}_0 und \mathbf{y}_1 .

Bemerkung 5.2.4 Ein Verfahren, das bekannt ist für seine gute Konvergenz, ist das vierstufige **Runga-Kutta-Verfahren**:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1}^{(1)} &= \mathbf{y}_n + h f(x_n, \mathbf{y}_n), \\ \mathbf{y}_{n+1}^{(2)} &= \mathbf{y}_n + h f \left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}), \frac{1}{2}(\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_{n+1}^{(1)}) \right), \\ \mathbf{y}_{n+1}^{(3)} &= \mathbf{y}_n + h f \left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}), \frac{1}{2}(\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_{n+1}^{(2)}) \right), \\ \mathbf{y}_{n+1}^{(4)} &= \mathbf{y}_n + h f(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^{(3)}), \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \frac{1}{6}\mathbf{y}_{n+1}^{(1)} + \frac{1}{3}\mathbf{y}_{n+1}^{(2)} + \frac{1}{3}\mathbf{y}_{n+1}^{(3)} + \frac{1}{6}\mathbf{y}_{n+1}^{(4)}. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.2.5 Wie schnell ein solches Verfahren zu einer echten Lösung konvergiert, hängt ab von der Regularität der rechten Seite f und von der Größe ihrer Ableitungen. Grob gesagt macht Euler-Vorwärts in jedem Schritt einen Fehler der Größenordnung h^2 . Weil man in einem festen Intervall $1/h$ Schritte braucht, bekommt man bei diesem Verfahren einen Fehler von Ordnung h . Runga-Kutta macht für genügend glatte f in jedem Schritt einen Fehler der Größenordnung h^5 . Auf einem festen Intervall hat der Fehler Größenordnung h^4 .

Beispiel 5.3 Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem¹:

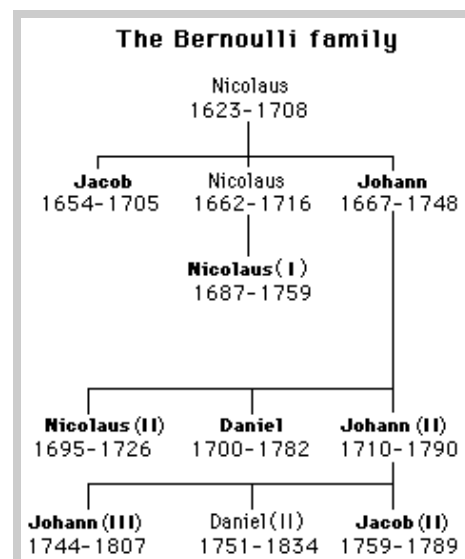
$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y(x)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

¹Die Differentialgleichung $y'(x) = x^2 + y(x)^2$ ist eine der einfachsten, die man nicht mit elementaren Standardfunktionen lösen kann. Jacob Bernoulli (1654–1705) hat sich schon mit dieser Gleichung beschäftigt.

Es gibt übrigens 8 Bernoullis in der Mathematik. Dieser Jacob, auch Jacob I genannt, ist der bekannteste und ist derjenige nach dem die Differentialgleichung benannt worden ist. Mehr dazu finden Sie in

The MacTutor History of Mathematics archive,
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/>

wo auch das Bild des Stammbaums rechts entnommen worden ist. Euler (1707–1783) hat studiert bei Johann Bernoulli und war befreundet mit Daniel Bernoulli.



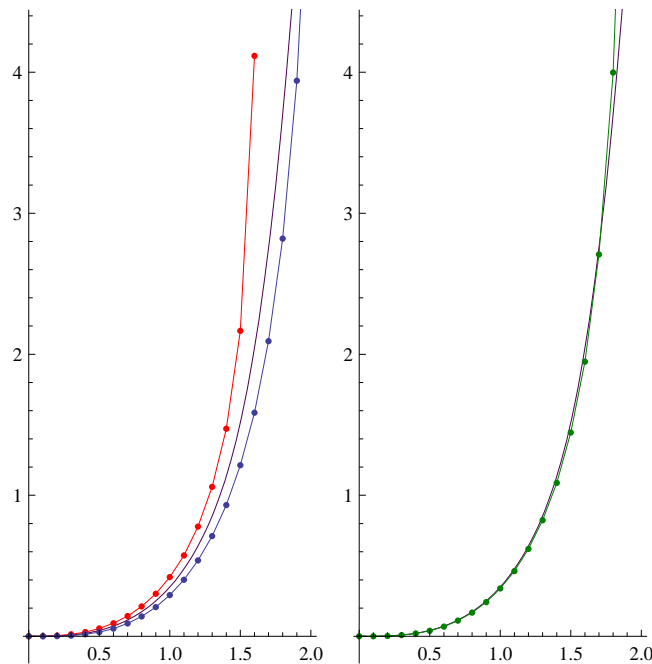


Abbildung 5.2: Links stehen Approximationen mit beiden Eulerschen Verfahren für Beispiel 5.3; Euler-Rückwärts ist in rot dargestellt. Rechts steht eine Runga-Kutta Approximation. Die Schrittgröße h ist jedesmal 0.1. Die Punkte stellen die diskreten Approximationen dar. Der Polygonzug entsteht, wenn man sie mit Geraden verbindet.

Wenn wir $h = .1$ nehmen und die beiden Eulerschen Verfahren und das Runga-Kutta Verfahren verwenden, bekommen wir die Bilder in Abbildung 5.2. Obwohl diese Differentialgleichung nicht zu den Standardtypen gehört, gibt es eine explizite Lösung mit Hilfe der Bessel-Funktionen. Auch diese Lösung ist eingezeichnet:

$$y(x) = \frac{x \left(J_{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) - J_{-\frac{5}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \right)}{2J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2}x^2 \right)} - \frac{1}{2x}.$$

J_ν ist die Bessel-Funktion² der ersten Sorte mit Index ν . Die Funktion y hat eine Asymptote bei $x \approx 2.00315$.

² J_ν ist die Bessel-Funktion der ersten Art von Index ν . Sie ist definiert für $\nu \notin \{-1, -2, \dots\}$ durch

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{t}{2} \right)^{\nu+2k}.$$

$\Gamma: \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Gamma-Funktion. Sie ist definiert für $s \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ durch

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \text{ falls } s > 0,$$

und weiter iterativ durch $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für $s \notin \{0, -1, -2, \dots\}$. Es gilt $\Gamma(k+1) = k!$ für $k \in \mathbb{N}$.

5.3 Analytische Methoden zur Approximation

5.3.1 Potenzreihen

Wenn die Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$ in dem Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

darstellbar ist als eine konvergente Potenzreihe:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (x - x_0)^k (y - y_0)^n$$

dann kann man auch die Lösung als eine Potenzreihe darstellen:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k. \quad (5.1)$$

Diese Methode wurde von Euler in seinem Lehrbuch aus 1768 schon vorgestellt. Cauchy war derjenige, der bemerkte, dass nicht alle Funktionen als Reihe darstellbar sind. Der erste Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen wird Cauchy zugeschrieben. Er zeigte, dass die Eulerschen Polygonzüge für $h \downarrow 0$ zu einer Lösung des Anfangswertproblems konvergieren. Übrigens hat er auch mit diesem Reihenansatz die lokale Existenz für Anfangswertprobleme mit obigen Bedingungen beweisen können.

Beispiel 5.4 Wir betrachten wiederum das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y(x)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Wenn wir eine Lösung der Form (5.1) haben mit $x_0 = 0$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) y_{k+1} x^k = x^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k \right)^2 = 1 x^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k y_i y_{k-i} \right) x^k. \quad (5.2)$$

Der Anfangswert liefert $y_0 = y(0) = 0$. Man vergleicht die Koeffizienten in (5.2). Es folgt, dass

$$\begin{array}{ll} y_1 = 0 & \Rightarrow y_1 = 0 \\ 2y_2 = 0 & \Rightarrow y_2 = 0 \\ 3y_3 = 1 + y_1^2 & \Rightarrow y_3 = \frac{1}{3} \\ 4y_4 = 2y_1y_2 & \Rightarrow y_4 = 0 \\ 5y_5 = 2y_1y_3 + y_2^2 & \Rightarrow y_5 = 0 \\ 6y_6 = 2y_1y_4 + 2y_2y_3 & \Rightarrow y_6 = 0 \\ 7y_7 = 2y_1y_5 + 2y_2y_4 + y_3^2 & \Rightarrow y_7 = \frac{1}{3^2 \cdot 7} \\ 8y_8 = 2y_1y_6 + 2y_2y_5 + 2y_3y_4 & \Rightarrow y_8 = 0 \\ 9y_9 = 2y_1y_7 + 2y_2y_6 + 2y_3y_5 + y_4^2 & \Rightarrow y_9 = 0 \\ 10y_{10} = 2y_1y_8 + 2y_2y_7 + 2y_3y_6 + 2y_4y_5 & \Rightarrow y_{10} = 0 \\ 11y_{11} = 2y_1y_9 + 2y_2y_8 + 2y_3y_7 + 2y_4y_6 + y_5^2 & \Rightarrow y_{11} = \frac{2}{3^3 \cdot 7 \cdot 11} \\ \dots & \dots \end{array}$$

Man findet

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{13}{218295}x^{15} + \dots$$

Siehe Abbildung 5.3

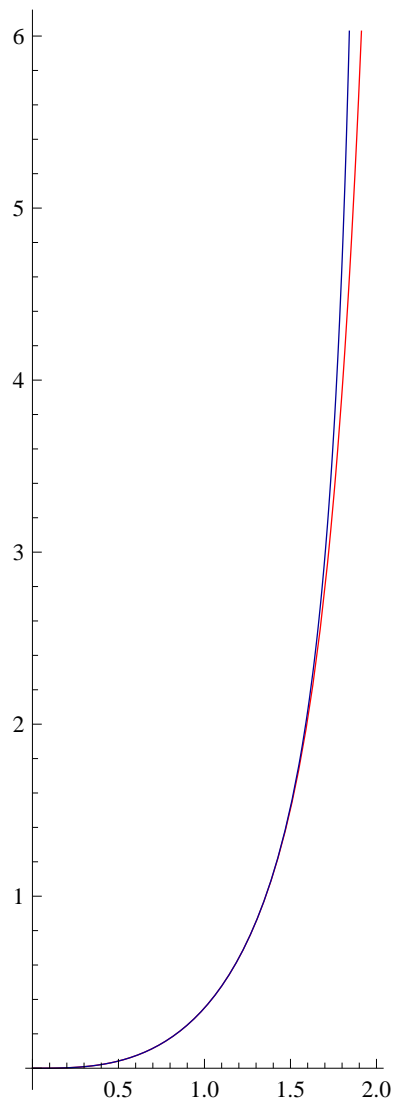


Abbildung 5.3: In rot das approximierende Polynom von Grad 15 und die echte Lösung in blau.

5.3.2 Picard-Iteration

Statt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (5.3)$$

zu betrachten, kann man auch versuchen eine Lösung zu finden von

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (5.4)$$

Lemma 5.5 Seien $f : [a, b] \times [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ und $y : [a, b] \rightarrow [\gamma, \delta]$ stetige Funktionen mit $x_0 \in (a, b)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- y ist differenzierbar und erfüllt das Anfangswertproblem (5.3).
- y erfüllt die Integral-Identität (5.4).

Beweis. (\Rightarrow) Es gilt

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

(\Leftarrow) Wenn $x \mapsto y(x)$ und $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig sind, ist auch $x \mapsto f(x, y(x))$ stetig und die rechte Seite von (5.4) ist stetig differenzierbar. Das heißt $x \mapsto y(x)$ ist stetig differenzierbar und

$$y'(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right)' = f(x, y(x)).$$

■

Algorithmus 5.6 [Picard Iteration]

Man definiere eine Funktionenfolge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mittels

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds. \end{aligned}$$

Beispiel 5.7 *Wiederum betrachten wir das Anfangswertproblem:*

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y(x)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Die Integralgleichung wird

$$y(x) = 0 + \int_0^x (s^2 + y(s)^2) ds.$$

Wir finden

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0, \\ y_1(x) &= \int_0^x s^2 ds = \frac{1}{3}x^3, \\ y_2(x) &= \int_0^x \left(s^2 + \left(\frac{1}{3}s^3 \right)^2 \right) ds = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3^2 \cdot 7}x^7, \\ y_3(x) &= \int_0^x \left(s^2 + \left(\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{3^2 \cdot 7}s^7 \right)^2 \right) ds = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Man vergleiche mit Beispiel 5.4.

Nur ganz selten kann man mehrere Schritte von der Picard-Iteration explizit berechnen. Wenn man zum Beispiel das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(y(x)), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

betrachtet, dann folgt $y_0(x) = 1$ und

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \int_0^x \sin(1) ds = 1 + x \sin(1), \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x \sin(1 + s \sin(1)) ds = 1 - \frac{\cos(1 + x \sin(1)) - \cos(1)}{\sin(1)} \\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x \sin\left(1 - \frac{\cos(1 + s \sin(1)) - \cos(1)}{\sin(1)}\right) ds = \dots? \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist wohldefiniert, jedoch nicht explizit in einer Kombination bekannter Funktionen darzustellen.

5.4 Funktionalanalytisches

5.4.1 Fixpunkte

Die Approximationsvorgänge, die vorgestellt wurden, haben alle die folgende Form:

- Anfang: y_0 ist eine vernünftig gewählte Startfunktion;
- Iteration: $y_{n+1} = T(y_n)$ mit T einer Abbildung, die aus einer bekannten Approximation y_n eine neue Approximation y_{n+1} konstruiert.

In dem Fall, dass wir mit Funktionen y_n arbeiten, hofft man, dass y_0 so gewählt ist und der Operator T so konstruiert ist, dass die Funktionenfolge konvergiert. Wenn y_n nach y_∞ konvergiert und T stetig ist, dann sollte gelten, dass

$$y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = T(y_\infty).$$

In dem Fall, dass man y_0 als konstante Funktion $x \mapsto y_0$ nimmt und der Operator T wie folgt definiert wird,

$$T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds,$$

würde Lemma 5.5 uns eine Lösung des Anfangswertproblems bringen, wenn wir eine stetige Funktion y_∞ hätten mit $y_\infty = T(y_\infty)$.

Definition 5.8 *Sie K eine Menge und $T : K \rightarrow K$ eine Abbildung. Man nennt $y \in K$ einen **Fixpunkt** von T , wenn $T(y) = y$.*

5.4.2 Vektorraum, Banachraum

Bevor wir genaue Sätze formulieren können, müssen wir das mathematische Werkzeug bereitlegen.

Definition 5.9 *Ein **Vektorraum** $(V, +, \cdot)$ über \mathbb{R} (oder \mathbb{C}) ist eine Menge mit einer Addition und mit einer Multiplikation mit Skalaren, die die folgenden Eigenschaften hat:*

1. V ist geschlossen: aus $v, w \in V$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ folgt $c_1 v + c_2 w \in V$;
2. $(V, +)$ ist eine Abelsche Gruppe.

3. Die Multiplikation erfüllt: $c(v+w) = cv + cw$, $(c_1 + c_2)v = c_1v + c_2v$, $(c_1c_2)v = c_1(c_2v)$ und $1v = v$ für alle $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$.

Definition 5.10 Ein **normierter Vektorraum** $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ über \mathbb{R} ist ein Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|$. Eine **Norm** ist eine Abbildung von V nach $[0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\forall v \in V : \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
2. $\forall c \in \mathbb{R} \forall v \in V : \|cv\| = |c| \|v\|$;
3. $\forall v, w \in V : \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Definition 5.11 Sei $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge im normierten Vektorraum $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$.

- $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine **Cauchy-Folge** bezüglich $\|\cdot\|$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} : n, m \geq M_\varepsilon \implies \|v_n - v_m\| < \varepsilon.$$

- $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine **konvergente Folge** bezüglich $\|\cdot\|$, wenn es $v \in V$ gibt mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq M_\varepsilon \implies \|v_n - v\| < \varepsilon.$$

Bemerkung 5.11.1 Cauchy-Folgen werden auch **Fundamentalfolgen** genannt.

Definition 5.12 Ein normierter Vektorraum $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge konvergent ist.

Bemerkung 5.12.1 Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt **Banachraum**.

5.4.3 Folgen stetiger Funktionen

Für Funktionenfolgen $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es verschiedene Konvergenztypen:

- Punktweise Konvergenz von f_n zu f :

$$\forall x \in I, \varepsilon > 0 \exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N} : n > n_{x,\varepsilon} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- Gleichmäßige Konvergenz von f_n zu f :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall x \in I : n > n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definition 5.13 Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

- $C[a, b]$ ist die Menge aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- $C^1[a, b]$ ist die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, das heißt, f ist stetig auf $[a, b]$, differenzierbar in (a, b) und es gibt $g \in C[a, b]$ mit $f' = g$ auf (a, b) .

Bemerkung 5.13.1 Definieren wir $\|\cdot\|_\infty$ durch

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad (5.5)$$

dann wird $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Vektorraum.

Gleichmäßige Konvergenz und Konvergenz in $\|\cdot\|_\infty$ -Norm sind äquivalent. Das folgt aus der Äquivalenz folgender Aussagen:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall x \in I : n > n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > n_\varepsilon \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

In beide Zeilen steht: Für alle $x \in I$ und $n > n_\varepsilon$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Lemma 5.14 *Der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.*

Beweis. Sei $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ so eine Funktionenfolge und sei f der Limes. Wir zeigen die Stetigkeit an der Stelle \tilde{x} .

Gleichmäßig konvergent bedeutet: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $x \in I$ gilt

$$n \geq n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und nehme $m = n_{\varepsilon/3}$. Dann findet man für alle $x \in I$, dass

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Weil $f_m : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, gibt es $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass für alle $y \in I$ gilt:

$$|\tilde{x} - y| < \delta_\varepsilon \implies |f_m(\tilde{x}) - f_m(y)| < \varepsilon.$$

Dann folgt für $|\tilde{x} - y| < \delta_{\varepsilon/3}$, dass

$$\begin{aligned} |f(\tilde{x}) - f(y)| &\leq |f(\tilde{x}) - f_m(\tilde{x})| + |f_m(\tilde{x}) - f_m(y)| + |f_m(y) - f(y)| \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + |f_m(\tilde{x}) - f_m(y)| + \frac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Korollar 5.15 $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ mit $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ist ein Banachraum.

Bemerkung 5.15.1 *Stetige Funktionen auf kompakten Gebieten haben ein Maximum.*

Darum gilt $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Beweis. Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$ eine Cauchy-Folge. Das bedeutet, für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$n, m \geq n_\varepsilon \implies \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Wir müssen zeigen, dass es $f \in C[a, b]$ gibt, derart, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, mit

$$n \geq n_\varepsilon \implies \|f - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

1) Die Definition von f . Für jedes $x \in [a, b]$ ist $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Weil \mathbb{R} vollständig ist, ist eine solche Folge konvergent und wir können einen Limes f punktweise definieren:

$$f(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x).$$

Das heißt, für jedes $x \in [a, b]$ und $\varepsilon > 0$ existiert $f(x)$ und es gibt $m_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ mit

$$m \geq m_{x,\varepsilon} \implies |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2) Die gleichmäßige Konvergenz. Es gilt auch, wenn wir $n \geq n_\varepsilon$ und $m_x \geq \max(n_\varepsilon, m_{x,\varepsilon})$ nehmen, dass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Also folgt

$$n > n_\varepsilon \implies \|f_n - f\|_\infty < 2\varepsilon,$$

(hätten wir bloß mit $\frac{1}{2}\varepsilon$ angefangen 😊) und dies bedeutet, dass f_n gleichmäßig nach f konvergiert:

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

3) Die Stetigkeit des Grenzwertes. Das letzte Lemma liefert $f \in C[a, b]$. ■

Beispiel 5.16 *Dieses Beispiel zeigt, dass man gleichmäßige Konvergenz braucht und die punktweise Konvergenz nicht ausreicht. Betrachte die Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f_n(x) = x^n$. Diese Folge konvergiert punktweise und der Grenzwert f_∞ ist*

$$f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Die Funktionen f_n sind stetig; die Funktion f_∞ jedoch nicht.

Diese Funktionenfolge ist dann auch keine Cauchy-Folge in $C[0, 1]$. Dies kann man auch direkt zeigen: Wenn wir $m = 2n$ und $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \in [0, 1]$ nehmen, dann folgt:

$$\|f_n - f_{2n}\|_\infty \geq |f_n(x_n) - f_{2n}(x_n)| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

