Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
J. Rolfes, M. Sc.

Mathematische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

Sommersemester 2016

— Übungsblatt 9 —

Aufgabe 9.1. Sei $X = (x^n) \in \mathbb{R}^{D\times N}$ eine Matrix, wobei die Datenpunkte x^n zentriert sind, d.h. es gilt $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x^n = 0$. Zeige, dass dann das Minimum

$$\min_{c\in\mathbb{R}^D, Y, B} \sum_{n=1}^N \left\| x^n - (c + \sum_{i=1}^M y_i^n b^i) \right\|^2, \quad Y = (y_i^n)_{\substack{i=1,\dots,M\\ n=1,\dots,N}} \in \mathbb{R}^{M\times N}, B = (b^i)_{i=1,\dots,M} \in \mathbb{R}^{D\times M},$$

für $c = 0$ angenommen wird.

Aufgabe 9.2. Bestimme (per Hand) die Hauptkomponentenanalyse der Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}.$$

Aufgabe 9.3. Sei $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit $n \geq m$ und $\sigma_{\min}(X) > 0$. Seien B_m und B_n die Einheitskugeln im $\mathbb{R}^m$ bzw. im $\mathbb{R}^n$. Zeige:

$$\sigma_{\min}(X) = \sup\{\lambda : \lambda B_m \subseteq X B_n\}.$$

Aufgabe 9.4. Seien $X, Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Matrizen. Bestimme das Minimum

$$\min_A \|AX - Y\|_F, \quad A \in \mathrm{O}(m) \quad (\text{d.h. } A^{\mathsf{T}}A = I),$$

wobei $\|Z\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}(Z^{\mathsf{T}}Z)}$ die Frobenius-Norm ist.

Abgabe: Am Dienstag, den 28. Juni, um 10 Uhr am Anfang der Vorlesung „Mathematische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung“. Bitte Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer auf die Abgabe schreiben.