9. Blatt zur Algebra

Abgabe: 13.–14.12.10 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Sei R ein kommutativer Ring. Das Radikal eines Ideals $\mathfrak{a} \subset R$ ist $\operatorname{rad}\mathfrak{a} := \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N} : r^n \in \mathfrak{a}\}$. Zeige, dass $\operatorname{rad}\mathfrak{a}$ ein Ideal ist, das $\mathfrak{a}$ enthält.

(ii) Im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ seien $\mathfrak{a}_n = (2, X^n)$ für $n \geq 1$ und $\mathfrak{b} = (X^2 + 2)$ Ideale. Zeige: $\operatorname{rad}(\mathfrak{a}_n)$ ist ein Primideal; $\mathfrak{a}_1$ ist ein maximales Ideal, aber kein Hauptideal; $\mathfrak{b}$ ist ein Primideal.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\delta : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0$, $\delta(x + iy) = x^2 + y^2$. Zeige:

(i) $z \in \mathbb{Z}[i]^* \iff \delta(z) = 1\,;\ \mathbb{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\}\,.$

(ii) $2 = (1 + i)(1 - i)$ ist reduzibel in $\mathbb{Z}[i]$.

(iii) Primzahlen $p \in \mathbb{Z}$ bleiben entweder Primelemente in $\mathbb{Z}[i]$ oder lassen sich zerlegen in Produkte $p = \pm q\overline{q}$ von konjugierten Primelementen $q, \overline{q} \in \mathbb{Z}[i]$. Umgekehrt teilt jedes Primelement $q \in \mathbb{Z}[i]$ eine eindeutig bestimmte Primzahl $p \in \mathbb{Z}$.

(iv) Eine ungerade Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ ist Primelement in $\mathbb{Z}[i]$ genau dann, wenn $p \equiv 3 \mod 4$, und sie zerfällt in ein Produkt von nicht assoziierten Primelementen genau dann, wenn $p \equiv 1 \mod 4$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ und $\delta : \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \to \mathbb{N}_0$, $\delta(a + ib\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$. Zeige:

(i) $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]^* \iff \delta(z) = 1\,;\ \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]^* = \{\pm 1\}\,.$

(ii) 3 ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, aber nicht prim.

(iii) $2(1 + i\sqrt{5})$ und 6 haben keinen ggT in $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

(iv) $\operatorname{ggT}(3, 1 + i\sqrt{5}) = 1$.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Sei R ein euklidischer Ring. Für zwei Elemente $x, y \in R \setminus \{0\}$ betrachte die Folge $z_0, z_1, \ldots \in R$, die gegeben ist durch: $z_0 = x$, $z_1 = y$,

$$z_{j+1} = \begin{cases} \text{der Rest von } z_{j-1} \text{ bei Division durch } z_j, \text{ falls } z_j \neq 0 \ , \\ 0 \ \text{ sonst } \ . \end{cases}$$

Zeige:

Es gibt einen kleinsten Index $n \in \mathbb{N}$ mit $z_{n+1} = 0$. Für dieses n gilt $z_n = \mathrm{ggT}(x, y)$.