WS 2007/2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und es bezeichne $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die assoziierte Norm. Zeigen Sie, daß

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(||v||^2 + ||w||^2 - ||v-w||^2) + \frac{i}{2}(||v||^2 + ||w||^2 - ||v-iw||^2).$$

(**Hinweis:** Betrachten Sie $||v-w||^2 = \langle v-w, v-w\rangle$ bzw. $||v-iw||^2 = \langle v-iw, v-iw\rangle$.)

Aufgabe 2. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$). Ein Endomorphismus $T\colon\ V \longrightarrow V$ heißt **normal**, wenn $TT^* = T^*T$. Zeigen Sie:

(i) Ein Endomorphismus T ist genau dann normal, wenn für alle $v \in V$ die Norm von $T(v)$ gleich der Norm von $T^*(v)$ ist. Folgern Sie hieraus, daß für normale Endomorphismen T ihr Kern mit dem des Endomorphismus T^* übereinstimmt.
(**Hinweis:** Für eine Implikation der Äquivalenz können Sie bestimmt Aufgabe 1 gebrauchen.)

(ii) Ist T normal, so stimmen die Kerne von T und T^* überein.

Es bezeichne P den Vektorraum der C^∞-Funktionen auf $\mathbb{R}$, die 2π-periodisch sind, d.h. ist $f \in P$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, daß $f(x) = f(x + 2\pi)$. Auf P sei ein Skalarprodukt durch

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

definiert.

(iii) Der Endomorphismus $T\colon\ P \longrightarrow P$, $f \longmapsto f'$ ist normal.
(**Hinweis:** Zeigen Sie, daß T die Gleichung $T^* = -T$ erfüllt. Was ist $\langle T(f), g\rangle$?)

Aufgabe 3. Sei im folgenden V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(i) Sei $T\colon\ V \longrightarrow V$ ein normaler Endomorphismus und v ein Eigenvektor von T mit Eigenwert λ. Dann ist v Eigenvektor von T^* mit Eigenwert $\overline{\lambda}$.
(**Hinweis:** Zeigen Sie, daß $(T - \lambda I)$ normal ist. Dannach hilft Ihnen Aufgabe 2 sicherlich weiter.)

(ii) T ist genau dann normal, wenn V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitzt.
(**Hinweis:** Für eine Implikation vergegenwärtigen Sie sich nochmal den Beweis von Satz 9 der Vorlesung.)

Bemerkung. Wichtig zu bemerken ist, daß **sowohl unitäre** (wegen $T^* = T^{-1}$), **als auch selbstadjungierte Endomorphismen** (wegen $T = T^*$) **insbesondere normal sind**. Demnach sind Satz 7' und Satz 9 der Vorlesung Spezialfälle der Aussage aus Aufgabe 3 (ii). Sowohl aus Selbstadjungiertheit, als auch aus Unitarität folgt die Existenz einer Basis aus Eigenvektoren, allerdings aus der Existenz der Basis **nicht** Selbstadjungiertheit oder Unitarität. Diese Begriffe sind demnach stärker. In Aufgabe 3 (ii) zeigen Sie eine **Äquivalenz**.

b.w.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$). Sie haben in der Vorlesung gelernt, daß ein Skalarprodukt auf V einen **kanonischen** Isomorphismus zwischen V und seinem Dualraum induziert. **Kanonisch** bedeutet, daß dieser Isomorphismus nicht von der Wahl irgendwelcher Objekte abhängt. In Abwesenheit eines Skalarproduktes sind V und V^* dennoch isomoroph. Ein Isomorphismus wird in diesem Fall mit Hilfe einer Basis konstruiert. Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V und $b_1^*, \ldots, b_n^*$ die dazu duale Basis. So ist die Abbildung

$$\phi_B \colon V \longrightarrow V^*,$$

die gegeben ist durch $\phi_B(b_i) = b_i^*$ für $i = 1, \ldots, n$ ein Isomorphismus. Sie sollen sich vergegenwärtigen, daß dieser Isomorphismus **immer** von der Wahl der Basis abhängt.

(i) Zeigen Sie, daß es zu jedem $\xi \in \mathrm{Aut}(V^*)$ Basen B und B' gibt, so daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\phi_B"', "\cong"] \arrow[dr, "\phi_{B'}", "\cong"'] & \\ V^* \arrow[rr, "\xi"] & & V^* \end{tikzcd}.$$

Kommutieren bedeutet, daß $\xi \circ \phi_B = \phi_{B'}$.

(ii) Der Isomorphismus ϕ_B ist kanonisch, d.h. hängt nicht von der speziellen Wahl von B ab, genau dann, wenn $V = \{0\}$ der triviale Vektorraum ist.
(**Hinweis:** Machen Sie sich klar, daß ϕ_B genau dann kanonisch ist, wenn für jede andere Basis B' der zugehörige Automorphismus ξ von V^*, der obiges Diagramm kommutieren läßt, die Identität ist.)

Bonusaufgabe. Für K-Vektorräume V definieren wir $V^{**} := (V^*)^*$.

(i) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Die kanonische Abbildung

$$\theta_V \colon V \longrightarrow V^{**} \text{ mit } \theta_V(w) \colon V^* \longrightarrow \mathbb{R},\ \varphi \longmapsto \varphi(w)$$

ist ein Isomorphismus.

Betrachten Sie nun

$$W := \{x \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : |\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}| < \infty\}$$

den Vektorraum aller Zahlenfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit endlichem Träger.

(ii) Zeigen Sie, daß der Dualraum W^* der Vektorraum aller Folgen ist

$$W^* \cong \{\varphi \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

(iii) Beweisen Sie damit, daß die kanonische Abbildung $\theta_W \colon W \longrightarrow W^{**}$ nicht surjektiv ist.

Bonusaufgabe. Differenzieren Sie das Funktional

$$\mathcal{A} \colon C^1(\mathrm{S}^1, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R},\ \gamma \longmapsto \int_0^1 \dot{\gamma}_z(t) - \gamma_y(t)\dot{\gamma}_x(t)\, dt,$$

das definiert ist auf den geschlossenen C^1-Kurven des $\mathbb{R}^3$.
(**Hinweis:** Vergessen Sie die partielle Integration nicht.)

Abgabe: Freitag 23.05.08 bis 10 Uhr
in den entsprechend beschrifteten Briefkasten
im Keller des Mathematischen Instituts
(gegenüber der Fachschaft).