SS 2013

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Flächen

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. In dieser Aufgabe soll nachgerechnet werden, daß die im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes (Satz 5.18) konstruierte Abbildung $g\colon D^2 \to S^1$ tatsächlich stetig ist. Sei also angenommen, daß $f\colon D^2 \to D^2$ eine fixpunktfreie stetige Abbildung ist. Sei dann $g(x)$ definiert als der Schnittpunkt mit S^1 der von $f(x)$ ausgehenden Halbgeraden durch x. Setze

$$u := \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}.$$

Zeigen Sie, daß

$$g(x) = x + \big(\sqrt{1 - |x|^2 + \langle x, u\rangle^2} - \langle x, u\rangle\big)u.$$

Aufgabe 2. Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ der wie folgt definierte Teilraum:

$$X = \Big([0,1] \times \{0\}\Big) \cup \Big(\big(\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\colon\ n \in \mathbb{N}\}\big) \times [0, \frac{1}{2}]\Big).$$

Skizzieren Sie diesen 'Kamm mit unendlich vielen Zinken'. Sei $p \in X$ der Punkt $(0, 1/2)$, also die Spitze der Zinke am Punkt $0 \in [0,1]$. Zeigen Sie, daß die identische Abbildung id_X homotop zur konstanten Abbildung $X \to \{p\}$ ist (d.h. X ist zusammenziehbar), aber nicht homotop rel $\{p\}$.

Aufgabe 3. Wir realisieren den 2-Torus T^2 im $\mathbb{R}^3$ als die Teilmenge, die man aus dem Kreis

$$\{(x-3)^2 + z^2 = 1\}$$

in der xz-Ebene durch Rotation um die z-Achse erhält. Betrachte die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

(i) $a(x, y, z) = (x, -y, -z)$,

(ii) $b(x, y, z) = (-x, -y, z)$,

(iii) $c(x, y, z) = (-x, -y, -z)$.

Beschreiben Sie diese Abbildungen geometrisch (als Drehungen oder Spiegelungen).

(a) Zeigen Sie, daß jede dieser Abildungen zu einer Abbildung $T^2 \to T^2$ einschränkt und eine Operation der zyklischen Gruppe C_2 mit zwei Elementen auf T^2 definiert.

(b) Bestimmen Sie den Quotientenraum T^2/C_2 in den drei Fällen und den durch die Quotientenabbildung induzierten Homomorphismus $\pi_1(T^2) \to \pi_1(T^2/C_2)$.

Aufgabe 4. Sei X ein zusammenziehbarer und Y ein wegzusammenhängender Raum. Zeigen Sie:

(a) $X \times Y \simeq Y$,

(b) je zwei Abbildungen von Y nach X sind homotop zueinander, und

(c) je zwei Abbildungen von X nach Y sind homotop zueinander.

Bonusaufgabe. Es seien f und g homotope Abbildungen $X \to Y$ vermittels einer Homotopie F. Sei x_0 ein Basispunkt in X und u der Weg $u(t) = F(x_0, t)$, $t \in [0, 1]$, von $f(x_0)$ nach $g(x_0)$. Zeigen Sie, daß $f_* = u_\#^{-1} g_*$ als Homomorphismen $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$.

Bonusaufgabe. Sei $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ die Gruppe der über $\mathbb{Z}$ invertierbaren (2×2)-Matrizen A mit ganzzahligen Einträgen. (Invertierbarkeit über $\mathbb{Z}$ ist äquivalent zu $\det A = \pm 1$.) Zeigen Sie, daß sich jeder Isomorphismus $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, anders gesagt, jedes Element der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, in der Form $f_*\colon \pi_1(T^2) \to \pi_1(T^2)$ mit einem Homöomorphismus f des 2-Torus T^2 realisieren läßt.

Abgabe: Montag 3.06.2013 bis 15:30 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik