17 Konvergenz im r-ten Mittel. Gleichgradige Integrierbarkeit

Die Konvergenz im r-ten Mittel $(r \geq 1)$ zeichnet sich gegenüber den anderen Konvergenzarten dadurch aus, dass sie auch Aussagen über die Konvergenz von Momenten impliziert. Bei P-fast sicherer, P-stochastischer und Verteilungskonvergenz sind dafür zusätzliche Voraussetzungen erforderlich (vgl. Satz von Lebesgue, Satz von Riesz). Aufgrund des Teilfolgenprinzips für die P-stochastische Konvergenz erhält man noch die folgende verallgemeinerte Variante des Satzes von Lebesgue:

Satz 17.1. (*Lebesgue*) *Seien* $\{X_n\}$, X, Y *reelle ZV. auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *mit*

(i) $|X_n| \leq Y$, $Y \in \mathcal{L}^r(P)$ $(r \geq 1)$

(ii) $X_n \xrightarrow{P} X$ $(n \to \infty)$.

Dann gilt:

a) $X \in \mathcal{L}^r(P)$ *und* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} X$ $(n \to \infty)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} E|X_n|^r = E|X|^r$;

c) *Falls* $r \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n^r) = E(X^r)$.

Während der Satz von Lebesgue hinreichende Bedingungen für die $\mathcal{L}^r$-Konvergenz liefert, gibt der folgende Satz von Riesz eine notwendige und hinreichende Bedingung:

Satz 17.2. (*Riesz*) *Seien* $\{X_n\}$, $X \in \mathcal{L}^r(P)$ $(r \geq 1)$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent*:

a) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} X$ $(n \to \infty)$;

b) $X_n \xrightarrow{P} X$ $(n \to \infty)$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} E|X_n|^r = E|X|^r$.

Beispiel 17.1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = \big((0,1), (0,1) \cap \mathcal{B}^1, \lambda^1|_{(0,1)\cap\mathcal{B}^1}\big)$.

Setze $X_n = \frac{n}{\ln(n+1)} I_{(0,\frac{1}{n})}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Dann gilt:

$$X_n \overset{P-f.s.}{\longrightarrow} 0\,, \quad E\,|\,X_n\,| \;=\; \frac{n}{\ln(n+1)} \cdot \frac{1}{n} \;\longrightarrow\; 0 \quad (n \to \infty)\,,$$

also auch $X_n \overset{\mathcal{L}^1}{\longrightarrow} 0 \quad (n \to \infty)$.

<u>Aber</u>: $Y := \sup\limits_n X_n \notin \mathcal{L}^1(P)$, da wegen der Monotonie von $x \longmapsto x/\ln(x+1)$ gilt:

$$Y(\omega) \;=\; \frac{n}{\ln(n+1)}, \quad \text{für} \quad \omega \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right), \quad \underline{\text{und}}$$

$$E(Y) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(n+1)} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \;=\; \infty\,.$$

Für die Charakterisierung der Konvergenz im r-ten Mittel ist der Begriff der „<u>gleichgradigen Integrierbarkeit</u>“ von Bedeutung:

Definition 17.1. *Eine Menge* $\mathcal{M}$ *reeller ZV. auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *heißt* <u>*gleichgradig*</u> <u>*(P-) integrierbar*</u>, *wenn gilt*:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, c > 0 : \int\limits_{\{\,|\,X\,|\,>c\}} |\,X\,|\; dP \le \varepsilon \qquad \forall\, X \in \mathcal{M}\,.$$

Bemerkung 17.1.

a) $\mathcal{M}$ gleichgradig $(P$-$)$ integrierbar $\quad\Longrightarrow\quad \sup\limits_{X \in \mathcal{M}} E\,|\,X\,| < \infty$.
Die Umkehrung ist i.A. falsch.

b) $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_k$ gleichgradig $(P$-$)$ integrierbar $\quad\Longrightarrow$
$\mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_k$ gleichgradig $(P$-$)$ integrierbar.

<u>Insbesondere</u>: Jede endliche Menge $\{X_1, \dots, X_k\}$ von $(P$-$)$ integrierbaren ZV. ist gleichgradig $(P$-$)$ integrierbar.

c) Sei $Y \in \mathcal{L}^r(P)$ $(r \ge 1, \text{fest})$ und $\mathcal{M}$ die Menge reeller ZV. X mit $|\,X\,| \le Y$.
Dann gilt: $\mathcal{M}^r := \{\,|\,X\,|^r : X \in \mathcal{M}\}$ ist gleichgradig $(P$-$)$ integrierbar.

Nützlich ist die folgende <u>Charakterisierung von gleichgradiger Integrierbarkeit</u>:

Satz 17.3. *Sei* $\mathcal{M}$ *eine Menge reeller ZV. auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Dann gilt:*

$\mathcal{M}$ *ist gleichgradig* $(P$-$)$ *integrierbar* $\iff$

(i) $\sup\limits_{X \in \mathcal{M}} E\,|\,X\,| < \infty$ *<u>und</u>*

(ii) $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0 :\ P(A) \leq \delta \implies \int\limits_A |\,X\,|\,dP \leq \varepsilon \quad \forall\ X \in \mathcal{M}$.

Bemerkung 17.2. Bedingung (ii) bedeutet, dass die Maße Q_X mit $Q_X(A) = \int\limits_A |\,X\,|\,dP$, $A \in \mathcal{A}$, gleichmäßig P-stetig sind.

Korollar 17.1. *Die Menge* $\mathcal{M}^r := \{\,|\,X\,|^r : X \in \mathcal{M}\}$ *reeller ZV. auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *sei gleichgradig* $(P$-$)$ *integrierbar* $(r \geq 1$, *fest*$)$. *Dann ist auch*

$$\mathcal{M}^r_* := \{\,|\,aX + bY\,|^r :\ X, Y \in \mathcal{M}^r,\ |a| \leq 1,\ |b| \leq 1,\ \textit{reell}\,\}$$

gleichgradig $(P$-$)$ *integrierbar.*

Mit Hilfe von Korollar 17.1 lässt sich der Satz von Riesz noch wie folgt erweitern:

Satz 17.4. *Seien* $\{X_n\}$, $X \in \mathcal{L}^r(P)$ $(r \geq 1$, *fest*$)$ *mit* $X_n \xrightarrow{P} X \quad (n \to \infty)$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} X \quad (n \to \infty)$;

b) $\{\,|\,X_n\,|^r\}_{n=1,2,\ldots}$ *ist gleichgradig* $(P$-$)$ *integrierbar.*

c) $\lim\limits_{n\to\infty} E\,|\,X_n\,|^r = E\,|\,X\,|^r$.

Beispiel 17.2. Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. ZV. mit $E\,|\,X_1\,| < \infty$. Dann gilt nach dem <u>starken Gesetz der großen Zahlen</u> (s.u.):

$$\overline{X}_n \;:=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \;\overset{P-f.s.}{\longrightarrow}\; EX_1 \;=:\; a \qquad (n \to \infty)\,.$$

Falls $E\,|\,X_1\,|^{\,r} < \infty$ $(r \geq 1)$, so folgt aus Satz 17.4:

$$\overline{X}_n \;\overset{\mathcal{L}^r}{\longrightarrow}\; a \qquad (n \to \infty)\,.$$

Es genügt zu zeigen, dass die Folge $\{\,|\,\overline{X}_n\,|^{\,r}\}_{\,n=1,2,\ldots}$ gleichgradig (P-) integrierbar ist.

Wegen der identischen Verteilung und $E\,|\,X_1\,|^{\,r} < \infty$ ist die Folge $\{\,|\,X_i\,|^{\,r}\}_{i=1,2,\ldots}$ gleichgradig (P-) integrierbar. Analog zum Beweis von Korollar 17.1 zeigt man mit Hilfe von Satz 17.3, dass dann auch $\{\,|\,\overline{X}_n\,|^{\,r}\}_{\,n=1,2,\ldots}$ gleichgradig (P-) integrierbar ist.

Satz 17.4 liefert somit die Behauptung.

Abschließend beweisen wir noch ein nützliches <u>hinreichendes Kriterium</u> für gleichgradige Integrierbarkeit:

Satz 17.5. *Eine Menge* $\mathcal{M}$ *reeller ZV. auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ist gleichgradig* (P-) *integrierbar, falls gilt*:

$$\sup_{X \in \mathcal{M}} E\,|\,X\,|^{\,1+\delta} < \infty \qquad (\exists\; \delta > 0)\,.$$