5. Übungsblatt zur Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie II“

Abgabe: Mittwoch, den 21.05.2014, um 09:55 Uhr in Seminarraum 1

Aufgabe 5.1 (mündlich) [Bedingter Erwartungswert]

Seien X und Y integrierbare Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ für die XY ebenfalls integrierbar sei. Zeigen Sie, dass aus $E(X|Y) = E(X)$ P-f.s. die Unkorreliertheit von X und Y folgt.

Aufgabe 5.2 (3 Punkte) [Satz von Beppo Levi für bedingte Erwartungswerte]

Zeigen Sie Eigenschaft 7) aus § 6 der Vorlesung, d.h.:

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra . Dann gilt für Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n \geq 0 \ \forall n$ und $X_n \uparrow$ (in n) :

$$E(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n|\mathcal{C}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} E(X_n|\mathcal{C}) \quad P\text{-f.s.}$$

Aufgabe 5.3 (1+2 Punkte) [Bedingter Erwartungswert bei Partialsummen]

Sei $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E(X_1) = a$ und $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Weiter sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Bestimmen Sie jeweils eine Version von

a) $E(S_{n+1} \,|\, S_n)$,

b) $E(S_{n+1}^2 \,|\, S_n)$.

Aufgabe 5.4 (3+3 Punkte) [Reguläre bedingte Verteilung]

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}^1_{[0,1]}, \lambda^1_{[0,1]})$ und $f:\ \mathcal{A} \to \Omega$ folgende Abbildung:

$$f(A) = \begin{cases} \sup(A), & A \neq \emptyset, \\ 0, & A = \emptyset. \end{cases}$$

Weiterhin sei $Q:\ \Omega \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $Q(\omega, A) := I_A(\omega) + I_{\{f(A)\}}(\omega)$, für $\omega \in \Omega,\ A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\omega \mapsto Q(\omega, A)$ ist für jedes $A \in \mathcal{A}$ eine Version der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|\mathcal{A})$.

b) Es gibt keine P-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ derart, dass $A \mapsto Q(\omega, A)$ für jedes $\omega \in N^c$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$ ist.