

12. Übungsblatt zur VL „Einführung in die Stochastik“

Abgabe: 18.01.2010, 09.45 - 10.00 Uhr, vor dem Hörsaal des MI

Aufgabe 45 (mündlich) [Erwartungstreue von Schätzern]

Sei X die Anzahl der Unfälle in einer bestimmten Stadt in einer Woche. Wir betrachten X als π_λ -verteilt, $\lambda > 0$. Wir wollen aus der Beobachtung von X die Wahrscheinlichkeit schätzen, dass in den folgenden drei Wochen kein Unfall geschieht, d.h. $\gamma(\lambda) = \{P_\lambda(X = 0)\}^3$. Zeigen Sie, dass jeder erwartungstreue Schätzer d keinen sinnvollen Schätzwert für $\gamma(\lambda)$ liefert.

Aufgabe 46 (3 Punkte) [Maximum-Likelihood-Schätzer]

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < \vartheta, \\ e^{-(x-\vartheta)}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $\vartheta \in \mathbb{R}$ unbekannt. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ .

Aufgabe 47 (5 Punkte) [Maximum-Likelihood-Schätzer]

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige, identisch π_λ -verteilte Zufallsvariablen, $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}$ für λ . Ist $\hat{\lambda}$ erwartungstreu und effizient für λ ?

Aufgabe 48 (4 Punkte) [Test]

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P}_{\vartheta, X})$, $\vartheta \in \Theta$, ein Stichprobenraum. Weiter sei $\varphi(x) = I_S(x)$, $S \in \mathcal{B}$, ein Test zum Niveau α für

$$H : \vartheta \in \Theta_0, \quad K : \vartheta \in \Theta \setminus \Theta_0.$$

Untersuchen Sie, ob $\tilde{\varphi}(x) = I_{\mathcal{X} \setminus S}(x)$ ein Test zum Niveau α bzw. $1 - \alpha$ für

$$\tilde{H} : \vartheta \in \Theta \setminus \Theta_0, \quad \tilde{K} : \vartheta \in \Theta_0.$$

ist. Wie lautet die Antwort, falls zusätzlich gilt: $E_\vartheta \varphi(X) \geq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta \setminus \Theta_0$.