3. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 7.11.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 9 (mündlich) [Umkehrformel]

Zeigen Sie die Existenz eines reellwertigen Prozesses $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ mit Spektraldichte

$$f(\lambda) = \frac{\pi - |\lambda|}{\pi^2}, \quad \lambda \in (-\pi, \pi],$$

und bestimmen Sie dessen Autokovarianzfunktion.

Aufgabe 10 (3+3+2 Punkte) [Charakterisierung der Autokovarianzfunktion]

Gegeben sei $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

i) γ ist Autokovarianzfunktion eines komplexwertigen Prozesses $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$.

ii) γ ist positiv-semidefinit.

iii) Es existiert ein endliches, auf $(-\pi, \pi]$ konzentriertes Maß μ, s.d.

$$\gamma(h) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{ih\lambda}\, \mu(d\lambda) \quad \forall\, h \in \mathbb{Z}.$$

Hinweis: Um ii) $\Rightarrow$ i) zu zeigen, muss ähnlich wie in der Vorlesung (vgl. Bem. 4.1 b)) die Existenz eines Prozesses gezeigt werden. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

1) Mit $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ seien $\Gamma_r(t_1, \ldots, t_n)$, $r = 1, 2$, wie folgt definiert:

$$\Gamma_r = \Gamma_r(t_1, \ldots, t_n) = \big(\gamma_r(t_j - t_k)\big)_{j,k=1,\ldots,n}, \ r = 1, 2.$$

Bilden Sie aus $\Gamma_r(t_1, \ldots, t_n)$, $r = 1, 2$, die $(2n \times 2n)$-Matrix

$$\Gamma = \Gamma(t_1, \ldots, t_n) = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ -\Gamma_2 & \Gamma_1 \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass Γ symmetrisch und positiv-semidefinit ist. Das heißt, Γ ist die Kovarianzmatrix einer normalverteilten Zufallsvariablen $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$ mit Erwartungswert $\mathbf{0}$.

2) Für $t_1 < \cdots < t_n$, $t_j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, seien $\varphi_{t_1,\ldots,t_n}$ die charakteristischen Funktionen der Zufallsvariablen $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n)$. Zeigen Sie mit Hilfe des Existenzsatzes von Daniell-Kolmogorov, dass der Prozess $U_t = (X_t, Y_t)$, $t \in \mathbb{Z}$, existiert.

3) Zeigen Sie, dass der Prozess $\left\{Z_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_t - iY_t)\right\}_{t\in\mathbb{Z}}$ die Funktion γ als Autokovarianzfunktion besitzt.

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 11 (2+2 Punkte) [Spektralmaß]

$\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ und $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ seien unkorrelierte, stationäre Zeitreihen mit Spektralmaßen μ_X und μ_Y [d.h., X_t und Y_s sind unkorreliert für alle $t, s \in \mathbb{Z}$].

1) Zeigen Sie: $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ mit $Z_t := X_t + Y_t$ ist ebenfalls stationär.

2) Geben Sie das Spektralmaß von $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ an.