7. Übungsblatt zur VL „Zeitreihenanalyse“

Abgabe: Mo, 5.12.2011, 9.45 - 10.00 Uhr, im Seminarraum 2 des MI

Aufgabe 24 (mündlich) [Mittelwert-Ergodizität]

Geben Sie eine Zeitreihe $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ an, die nicht Mittelwert-ergodisch ist und weisen Sie dies mithilfe der Spektraldarstellung nach.

Aufgabe 25 (3 Punkte) [Wold-Zerlegung]

Sei $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ eine zentrierte, stationäre Zeitreihe. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ist deterministisch, d.h. $\sigma^2 = E|X_{n+1} - P_{\mathcal{M}_n} X_{n+1}|^2 = 0$.

b) $X_j \in \mathcal{M}_{-\infty}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 26 (5 Punkte) [Schätzer für die Autokovarianzfunktion]

Zu den Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ einer reellen, stationären Zeitreihe betrachten wir den Schätzer

$$\hat{\gamma}_n(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n-|k|} (x_j - \bar{x}_n)(x_{j+|k|} - \bar{x}_n) & \text{für } |k| < n, \\ 0 & \text{für } |k| \geq n, \end{cases}$$

wobei $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j$ und $\hat{\gamma}_n(n-1) \neq 0$ sei. Zeigen Sie, dass $\hat{\gamma}_n$ die Autokovarianzfunktion einer MA$(n-1)$-Zeitreihe ist.

Aufgabe 27 (4 Punkte) [Kovarianzmatrix des Autokorrelationsschätzers]

Sei $X_n = e_n + \varrho\, e_{n-1}$ eine reelle MA(1)-Zeitreihe mit $e_n \sim IID(0, \sigma^2)$ und $\sigma^2 < \infty$. Berechnen Sie die asymptotische Kovarianzmatrix für $\hat{\varrho}(1), \ldots, \hat{\varrho}(K)$ $(K \in \mathbb{N}$, fest$)$ und geben Sie hinreichende Bedingungen für $j, k \in \{1, \ldots, K\}$ an, so dass $\hat{\varrho}(j)$ und $\hat{\varrho}(k)$ asymptotisch unabhängig sind.