4 Autokovarianzfunktion und Spektralmaß

Im Folgenden sei $\{X_t\}_{t\in T}$ eine komplexwertige stationäre Zeitreihe mit $T \subset \mathbb{Z}$ oder $T \subset \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} m &:= EX_t \\ \gamma(h) &:= Cov(X_t, X_{t+h}) = E(X_{t+h} - m)(\overline{X_t - m}) \qquad [\,acv.f.\,] \\ \rho(h) &:= \gamma(h)\gamma(0) \qquad [\,ac.f.\,] \end{aligned}$$

γ (bzw. ρ) liefert ein Maß für die Abhängigkeit der ZV. in der Zeitreihe.

Einige Eigenschaften:

(1) *γ ist positiv-semidefinit, d.h. es gilt:*

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\bar{c}_k\,\gamma(t_j - t_k) \;\geq\; 0 \qquad \forall\, c_1,\ldots,c_n\,,\; t_1,\ldots,t_n \in T\,,\; n\in\mathbb{N}\,;$$

(2) $\gamma(0) \;\geq\; 0\,;$

(3) $\gamma(-t) \;=\; \overline{\gamma(t)}$ *[Schiefsymmetrie (im Reellen: Symmetrie)];*

(4) $|\gamma(t)| \;\leq\; \gamma(0)\,;$

(5) $|\gamma(t) - \gamma(s)|^2 \;\leq\; 2\,\gamma(0)\,\{\gamma(0) - Re\,\gamma(t-s)\}$

[$\Longrightarrow$ (bei $T = \mathbb{R}$: Stetigkeit in $t = 0$ $\Longrightarrow$ gleichmäßige Stetigkeit auf $\mathbb{R}$].

Bemerkung 4.1.

a) Entsprechende Eigenschaften gelten für $\rho = \rho(t)$ mit $\rho(0) = 1$.

b) Zu jeder positiv-semidefiniten, geraden, reellwertigen Funktion γ (mit Definitionsbereich $D := \{t - s : t, s \in T\}$) gibt es einen stationären Gauß-Prozess, der γ als Kovarianzfunktion besitzt.

Beispiel 4.1. Sei $\gamma:\ \mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ mit

$$\gamma(h) = \begin{cases} 1 \;, & h = 0 \;; \\ \rho \;, & h = \pm 1 \;; \\ 0 \;, & \text{sonst} \;. \end{cases}$$

$\Longrightarrow \quad [\,\gamma$ Autokovarianzfunktion $\iff |\,\rho\,| \leq \frac{1}{2}\,]$.

Bemerkung 4.2. Der im Beispiel 4.1 konstruierte stochastische Prozess $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ist sogar strikt stationär.

Autokovarianzfunktionen zeigen oft ein oszillierendes Verhalten, das sich über eine (verallgemeinerte) Fouriertransformation bzw. Spektraldarstellung der Zeitreihe charakterisieren lässt. Zur Motivation betrachten wir noch einmal das folgende

Beispiel 4.2. Sei $X_t = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{it\lambda_j}$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (-\pi, \pi]$ und $C_1, \dots, C_n$ paarweise unkorrelierte, komplexwertige ZV. seien mit

$$EC_j = 0\,, \quad E|C_j|^2 = \sigma_j^2 \quad (j = 1, \dots, n)\,.$$

$\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ist stationär mit $EX_t = 0$ und

$$\gamma(h) = EX_{t+h}\overline{X}_t = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2\, e^{ih\lambda_j}\,.$$

Setzt man $F(\lambda) := \sum_{j:\lambda_j \le \lambda} \sigma_j^2$, so definiert F eine monotone, rechtsstetige (also maßerzeugende) Funktion mit $F(\lambda) = 0$ $(\lambda \le -\pi)$, $F(\lambda) = \sigma^2 := \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$ $(\lambda \ge \pi)$. Mit dem zu F gehörigen Maß μ gilt:

$$\gamma(h) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{ih\lambda}\, \mu(d\lambda)\,. \tag{4.1}$$

Die „Frequenzen“ λ_j sind durch μ eindeutig bestimmt und bilden die Grundlage für die (spätere) „Spektraldarstellung“ der Zeitreihe.

Im Folgenden wird gezeigt, dass (4.1) für beliebige positiv-semidefinite Funktionen γ gültig bleibt.

Diskreter Fall

Satz 4.1. *(Herglotz-Lemma)* $\gamma: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *ist positiv-semidefinit*

$\iff$ $\exists_1$ *endliches Maß* μ *(mit maßerzeugender Funktion* F*), das auf* $(-\pi, \pi]$ *konzentriert ist und* (4.1) *erfüllt.*

Die Spektralfunktion bzw. - dichte läßt sich aus γ über die folgende Umkehrformel gewinnen:

Satz 4.2. *Sei* $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *positiv-semidefinit und absolut summierbar, d.h.* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma(n)| < \infty \quad \Longrightarrow$

Für $f(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma(n)\, e^{-in\lambda}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$, *gilt:*

(i) $f \geq 0$, *stetig*;

(ii) $\int_{[-\pi,\pi]} f(\lambda)\, d\lambda = \gamma(0)$;

(iii) $\gamma(h) = \int_{[-\pi,\pi]} e^{ih\lambda} f(\lambda)\, d\lambda, \quad h \in \mathbb{Z}$, *d.h.* f *ist Spektraldichte von* γ.

Korollar 4.1. *Sei* $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *absolut summierbar.*

Dann gilt: γ *Autokovarianzfunktion* $\iff$ f *aus* Satz 4.2 *ist nicht-negativ.*

Beispiel 4.1 (Fortsetzung) Zeige:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 1 & , \quad h = 0 \quad ; \\ \rho & , \quad h = \pm 1 \quad ; \\ 0 & , \quad \textit{sonst} \quad , \end{cases}$$

ist Autokovarianzfunktion $\iff |\rho| \leq \frac{1}{2}$.

Spezialfall reeller Zeitreihen

(i) $\gamma(h) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{ih\lambda}\, \mu(d\lambda) \overset{\gamma \text{ reell}}{=} \underbrace{\int_{(-\pi,\pi]} \cos(h\lambda)\, \mu(d\lambda)}_{\textit{symmetrisch!}}, \quad h \in \mathbb{Z}$;

(ii) Spektralfunktion bzw.-dichte (falls existent) sind symmetrisch, d.h.

$$F(-\lambda) = \mu\big((-\pi, -\lambda]\big) = \mu\big([\lambda, \pi)\big) = F(\pi-) - F(\lambda-)$$

bzw. (bei existierender Spektraldichte)

$$f(\lambda) = f(-\lambda)\,, \quad \lambda \in (-\pi, \pi]\,,$$

<u>insbesondere</u>: $\quad \gamma(h) = 2 \int\limits_{[0,\pi]} \cos(h\lambda)\, f(\lambda)\, d\lambda\,, \quad h \in \mathbb{Z}\,.$

Bemerkung 4.3. $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Spektraldichte einer reellen stationären Zeitreihe (über $T = \mathbb{Z}$)

$$\Longleftrightarrow \quad f \geq 0\,, \quad f(\lambda) = f(-\lambda)\,, \quad \int\limits_{[-\pi,\pi]} f(\lambda)\, d\lambda < \infty\,.$$

Wir untersuchen die obigen Größen beim „Weißen Rauschen" und im „Markov-Schema" :

Beispiel 4.3. („Weißes Rauschen") Nach Beispiel 2.1 gilt für $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} WN(0, \sigma^2)$:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & , \quad h = 0 \quad , \\ 0 & , \quad h \pm 0 \quad . \end{cases}$$

$\overset{\text{Satz 4.2}}{\Longrightarrow}$ Spektraldichte f existiert, nämlich

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\, I_{[-\pi,\pi]}(\lambda)$$

[alle „Frequenzen" λ gleichgewichtig: daher weißes Rauschen].

Beispiel 4.4. (Markov-Schema: AR(1))

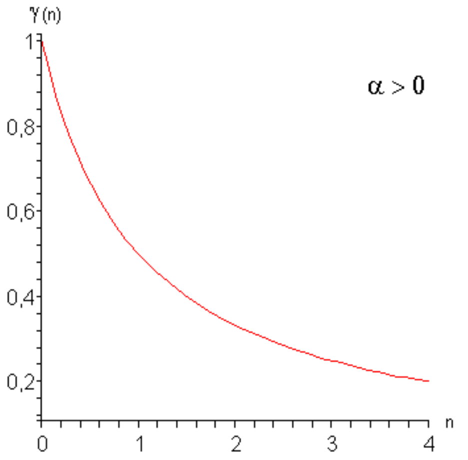
$$X_n = \alpha\, X_{n-1} + e_n\,, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (|\alpha| < 1)\,.$$

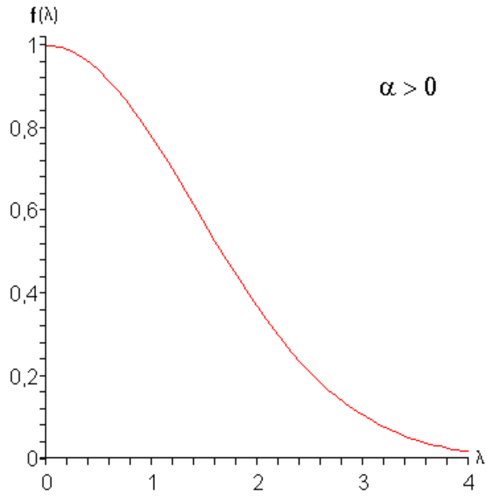
Nach Beispiel 2.6: $\quad \gamma(h) = \dfrac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\, \alpha^{|h|}\,, \quad h \in \mathbb{Z}$

$\overset{\text{Satz 4.2}}{\Longrightarrow}$ Spektraldichte f existiert, nämlich (mit $z = e^{i\lambda}$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$) :

$$\begin{aligned} f(\lambda) \quad &= \quad \frac{\sigma^2}{2\pi(1-\alpha^2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{|n|}\, z^n \\ &= \quad \frac{\sigma^2}{2\pi(1-\alpha^2)} \left[\frac{1}{1-\alpha z} + \frac{\alpha/z}{1-(\alpha/z)} \right] \\ &\overset{(\overline{z}=1/z)}{=} \quad \frac{\sigma^2}{2\pi(1-\alpha^2)}\, \frac{1-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{z}-\alpha^2}{1-\alpha z-\alpha\overline{z}+\alpha^2} \\ &= \quad \frac{\sigma^2}{2\pi}\, \frac{1}{1-2\alpha\cos\lambda+\alpha^2}\,. \end{aligned}$$

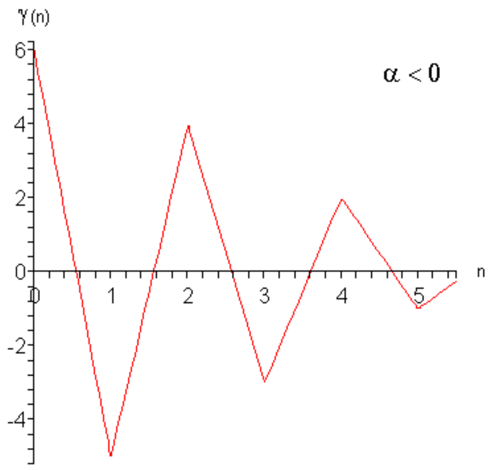
Skizzen der Verläufe von γ und f :

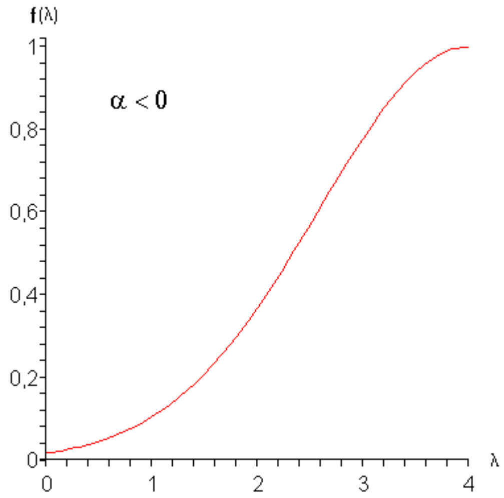




Kleinere Frequenzen dominieren, d.h. größere Wellenlängen

$\Longrightarrow$ glattere Pfade der Zeitreihe (s.u.) .





Größere Frequenzen dominieren, d.h. kleinere Wellenlängen

$\Longrightarrow$ unruhigere Pfade der Zeitreihe (s.u.) .

Abschließend:

Stetiger Fall

Satz 4.3. (*Bochner*) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *ist* *positiv-semidefinit* *und* *stetig* $\Longleftrightarrow$ γ *ist* *charakteristische Funktion* *eines* *endlichen* *Maßes* μ *auf* $(\mathbb{R}^1, B^1)$, *d.h.*

$$\gamma(h) = \int e^{ih\lambda} \mu(d\lambda), \qquad h \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Auch im stetigen Fall gilt (*analog zu* Satz 4.2) *eine* *Umkehrformel*.

Satz 4.4. *Sei* $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *positiv-semidefinit, stetig und absolut integrierbar*, *d.h.* $\int |\gamma(t)|\, dt < \infty \quad \Longrightarrow$

Für $f(\lambda) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \gamma(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *gilt:*

(i) $f \geq 0$, *stetig und beschränkt*;

(ii) $\int f(\lambda)\, d\lambda = \gamma(0)$;

(iii) $\gamma(t) = \int e^{it\lambda} f(\lambda)\, d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}$,

also f *ist* *Spektraldichte* *von* γ.

Bemerkung 4.4.

a) Wegen $\rho(t) = \gamma(t)/\gamma(0)$ gelten analoge Eigenschaften wie in den Sätzen 4.1 - 4.4 auch für die Korrelationsfunktion. Das zugehörige Spektralmaß ist ein W-Maß.

b) Bei gegebenem h gibt $\rho(h)$ ein Maß für den Zusammenhang zwischen X_t und X_{t+h} an. Den Graphen der Abbildung $t \longmapsto \rho(t)$ bezeichnet man als Korrelogramm. Wegen der 1-1-Beziehung zwischen der Autokorrelationsfunktion ρ und der Spektralfunktion F können Eigenschaften der Zeitreihe sowohl bei ρ (Zeitbereich) als auch bei F (Frequenzbereich) untersucht werden.

Im nächsten Kapitel wenden wir uns dem eingehenden Studium stationärer Zeitreihen zu.