Übungsblatt 3

Hausübungen

Die Hausübungen müssen bis **Mittwoch, den 02.05.18, um 9:00 Uhr** in den Briefkasten "Lineare Algebra II" mit Ihrer Übungsgruppennummer im Mathematischen Institut, Raum 301 abgegeben werden. Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf **jedes** Blatt und Ihre **Matrikelnummer, Übungsgruppennummer** und den **Namen des Übungsleiters** auf das erste Blatt. Bitte heften Sie die Blätter.

H7 (10 Punkte): Sei A die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -13 & -5 & -15 \\ -5 & -2 & -6 \\ 13 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass A betrachtet als Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ nicht diagonalisierbar ist.

(ii) Fassen wir dagegen A als Matrix mit Einträgen aus dem Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ auf, so ist A diagonalisierbar. Bringen Sie A über $\mathbb{F}_5$ in Diagonalform.

(Es stehe dazu eine natürliche Zahl n hier für das Element $n \cdot \mathbf{1} \in \mathbb{F}_5$, also für die Summe $\overbrace{\mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}^{n}$. Siehe auch Kapitel 2 im Skript zu den Körpern $\mathbb{F}_p$.)

Lösungsskizze. (i) Das charakteristische Polynom berechnet sich zu $P_A(X) = X^3 + X$. Es hat nur eine reelle Nullstelle, zerfällt also nicht vollständig in Linearfaktoren. Damit ist A nicht reell diagonalisierbar.

(ii) Das charakteristische Polynom berechnet sich ebenfalls zu $P_A(X) = X^3 + X$ (Determinanten sind polynomielle Ausdrücke in den Einträgen der Matrix. Damit vertauschen Determinantenberechnungen mit Ringhomomorphismen, die man jeweils auf die einzelnen Einträge der Matrix anwendet. Charakteristische Polynome vertauschen dann auch mit Ringhomomorphismen, wenn man diese einerseits auf die einzelnen Einträge der Matrix und andererseits auf die Koeffizienten des Polynoms anwendet. Da hier das charakteristische Polynom von $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}(\in \mathbb{Z}^{3\times 3})$ ganzzahlige Koeffizienten hat, erhält man das charakteristische Polynom von A aufgefasst als Matrix über $\mathbb{F}_5$ durch modulo-Nehmen der Koeffizienten).

Das charakteristische Polynom zerfällt vollständig in drei verschiedene Linearfaktoren, es gibt also drei verschiedene Eigenwerte $0, 2, 3 \in \mathbb{F}_5$ von A. Damit ist A diagonalisierbar zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

H8 (10 Punkte): Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass A als Matrix in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ diagonalisierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass A aufgefasst als Matrix in $(\mathbb{F}_3)^{2\times 2}$ nicht diagonalisierbar ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$R_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \phi \in \mathbb{R},$$

im Allgemeinen nicht über $\mathbb{R}$ jedoch stets über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar sind. Bringen Sie R_ϕ über $\mathbb{C}$ in Diagonalform.

Lösungsskizze. (i) Es gilt $P_A(X) = (X-1)(X-4)$. Damit liegen zwei verschiedene Eigenwerte vor und die Matrix ist diagonalisierbar.

(ii) Es gilt $P_A(X) = (X-1)(X-4) = (X-1)^2$ und es liegt nur ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 vor. Die Dimension des Eigenraumes berechnet sich aber nur zu 1 und die Matrix ist nicht diagonalisierbar! (Der Eigenraum zum Eigenwert 1 berechnet sich als Kern von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und dieser ist eindimensional.)

(iii) Siehe die erste Gruppenübung. Die Matrizen haben als charakteristisches Polynom $P_{R_\phi}(X) = X^2 - 2\cos(\phi)X + 1$ mit den Nullstellen $e^{i\phi}, e^{-i\phi}$. Es liegen im Allgemeinen zwei verschiedene echt komplexe Nullstellen vor und die Matrix ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar. In den Fällen mit zweifachen reellen Nullstellen 1 oder -1 ist die Matrix gleich E oder $-E$ und auch trivialerweise (reell) diagonalisierbar.

H9 (10 Punkte): Seien $A, B \in K^{n \times n}$ zwei quadratische Matrizen über einem Körper K, sodass $AB = BA$. Es seien weiter alle Eigenräume von A und B eindimensional. Zeigen Sie, dass A und B die gleichen Eigenvektoren besitzen.

Bonus (10 Punkte): Sei $M \subset K^{n \times n}$ eine Menge von diagonalisierbaren Matrizen, sodass für je zwei Matrizen $A, B \in M$ gilt $AB = BA$.
Zeigen Sie, dass es eine Basis von K^n gibt, die aus gemeinsamen Eigenvektoren zu allen Matrizen aus M besteht. D.h. mit anderen Worten, dass die Matrizen aus M simultan diagonalisierbar sind. Sie dürfen verwenden, dass eine diagonalisierbare Matrix, die einen Unterraum invariant lässt, auch auf diesem Unterraum diagonalisierbar ist.

Lösungsskizze. Kommutierende Matrizen lassen Eigenräume invariant. D.h. ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dann ist auch Bv ein Element des Eigenraumes von A zum Eigenwert λ. Das rechnet man leicht nach: $A(Bv) = ABv = BAv = B\lambda v = \lambda Bv$. Da die Eigenräume nach Voraussetzung eindimensional sind, muss hier weiter gelten $Bv = \mu v$ und v ist auch Eigenvektor von B. Da man die Rollen von A und B vertauschen kann, folgt die Aussage.
Der **Bonus** folgt mit Induktion nach der Dimension n. Wir brauchen wieder die Aussage, dass für kommutierende Matrizen A, B die Matrix B die Eigenräume von A invariant lässt (und umgekehrt). Der Induktionsanfang ($n = 1$) ist trivial. Wenn alle Matrizen in M skalare Matrizen sind, d.h. von der Form λE_n, so ist die Aussage ebenfalls trivial. Wir dürfen also annehmen, dass es eine Matrix $A \in M$ gibt, die mindestens zwei verschiedene Eigenwerte besitzt. Dann kann man den Vektorraum in die direkte Summe der Eigenräume von A zerlegen, wobei diese Eigenräume echt kleinere Dimension besitzen. Alle anderen Matrizen aus M lassen nun diese Eigenräume von A nach der obigen Aussage invariant. Wir betrachten also für die verschiedenen Eigenräume von A die Einschränkungen der Matrizen aus M auf diese Eigenräume. Diese Einschränkungen bilden wieder eine kommutative Menge von diagonalisierbaren Matrizen. Mit Induktion erhalten wir jeweils eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren für die Einschränkungen der Matrizen auf die Eigenräume. Fasst man diese zu einer Basis des gesamten Vektorraumes zusammen, erhält man eine Basis mit der gewünschten Eigenschaft.