Universität zu Köln SS 2019

Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. A. Drewitz
Assistenten: A. Prévost, L. Schmitz

Abgabe: Bis 06.06., 18 Uhr, in den Kästen in Raum 301 des Mathematischen Institutes

9. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie I

(Produkt-σ-Algebren, Produktmaße)

Blatt 8: Korrigierte Aufgabe: 8.1

Blatt 9: Vorzurechnende Aufgabe: 9.3

Für $\mathcal{E}_1 \subset 2^{\Omega_1}$ und $\mathcal{E}_2 \subset 2^{\Omega_2}$ definieren wir $\mathcal{E}_1 * \mathcal{E}_2 := \{A \times B : A \in \mathcal{E}_1, B \in \mathcal{E}_2\}$.

Aufgabe 9.1 (10 Punkte)

In dieser Aufgabe zeigen wir Theorem 2.4.5. Es seien $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$, $i \in \mathbb{N}$, σ-endliche Messräume und für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{E}_i$ ein π-System mit $\sigma(\mathcal{E}_i) = \mathcal{F}_i$.

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\bigotimes_{1\le i\le n} \mathcal{F}_i = \left(\bigotimes_{1\le i\le n-1} \mathcal{F}_i \right) \otimes \mathcal{F}_n.$$

(2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Maß $\otimes_{i=1}^n \mu_i$ auf $\otimes_{1\le i\le n}\mathcal{F}_i$ existiert mit

$$\left(\bigotimes_{i=1}^n \mu_i \right) (F_1 \times \cdots \times F_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(F_i) \text{ für alle } F_i \in \mathcal{F}_i, 1 \le i \le n.$$

(2 Punkte)

c) Wir nehmen an, dass μ_i ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Maß $\otimes_{1\le i\le n}\mu_i$ das eindeutige Maß μ ist, sodass für alle $(E_1, \dots, E_n) \in \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$ und $J \subset \{1, \dots n\}$ gilt:

$$\mu\Big((\pi_J)^{-1} \Big(\bigtimes_{i\in J} E_i \Big) \Big) = \prod_{i\in J} \mu_i(E_i).$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 9.2 a) (2 Punkte)

d) Wir nehmen an, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine paarweise disjunkte Folge $(C_p^{(i)})_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_i^{\mathbb{N}}$ existiert mit $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} C_p^{(i)} = \Omega_i$ und $\mu_i(C_p^{(i)}) < \infty$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Maß $\otimes_{1\le i\le n}\mu_i$ das eindeutige Maß μ ist, sodass für alle $(E_1, \dots, E_n) \in \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$ gilt

$$\mu(E_1 \times \cdots \times E_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(E_i).$$

(3 Punkte)

e) Zeigen Sie $(\lambda_1)^{\otimes n} = \lambda^n$. (1 Punkt)

Aufgabe 9.2 (10 Punkte)

Diese Aufgabe soll zeigen, dass die Umkehrung von Lemma 2.4.2 zwar für gewisse Wahlen der zugrunde liegenden σ-Algebren gilt, im Allgemeinen jedoch falsch ist. Es seien zwei Mengen Ω_1, Ω_2 und für jedes $i \in \{1,2\}$ seien $\mathcal{I}_i \subset 2^{\Omega_i}$ und $\mathcal{F}_i := \sigma(\mathcal{I}_i)$.

a) Wir nehmen an, dass $\Omega_1 \in \mathcal{I}_1$ und $\Omega_2 \in \mathcal{I}_2$. Zeigen Sie: $\sigma(\mathcal{I}_1 * \mathcal{I}_2) = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. (2 Punkte)

Ab jetzt nehmen wir eine überabzählbare Menge Ω, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$ und damit $\mathcal{F}_i = \{A \subset \Omega : \ A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$, $i \in \{1,2\}$.

b) Zeigen Sie $\sigma(\mathcal{I}_1 * \mathcal{I}_2) \neq \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass für alle $C \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ abzählbare Mengen $A, B \subset \Omega$ existieren mit entweder $C \subset (A \times \Omega) \cup (\Omega \times B)$ oder $C^c \subset (A \times \Omega) \cup (\Omega \times B)$. (3 Punkte)

d) Es sei

$$D := \big\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2 : \ \omega_1 = \omega_2\big\}. \tag{Diag}$$

Zeigen Sie, dass für alle $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \Omega$ zwar $D_{\widetilde{\omega}_1} \in \mathcal{F}_2$ und $D^{\widetilde{\omega}_2} \in \mathcal{F}_1$ gilt, aber $D \notin \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. (2 Punkte)

e) Es sei $\Omega := [0,1]$ und $\mathcal{F}_i = \mathcal{B}([0,1])$, $i = 1,2$. Zeigen Sie, dass für D aus (Diag) in diesem Fall gilt: $D \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. (1 Punkt)

Aufgabe 9.3 (10 Punkte)

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Aussage von Proposition 2.4.3 b) nicht mehr gültig ist, wenn μ_1, μ_2 nicht σ-endlich sind. Es seien μ das Zählmaß auf $\mathbb{R}$ und λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Es seien $D = \{(x,x) : \ x \in \mathbb{R}\}$ und $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R})^{*2} \to [0,\infty]$ definiert durch $\nu(A \times B) = \mu(A)\lambda(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Beachten Sie $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{*2} := \{A \times B : \ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \neq \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

a) Es sei

$$\rho(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(A_{\omega_1})\, \mu(\mathrm{d}\omega_1) \text{ für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Zeigen Sie, dass ρ ein wohldefiniertes Maß ist, d.h. $\omega_1 \mapsto \lambda(A_{\omega_1})$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})-\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar ist, und dass $\rho|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})^{*2}} = \nu$. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie $\rho(D) = 0$. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass ν ein Prämaß auf dem Halbring $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{*2}$ ist. (2 Punkte)

d) Es sei ν^* das äußere Maß wie in (1.3.5) im Skript. Zeigen Sie, dass $\nu^*|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}$ ein Maß ist mit $\nu^*|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})^{*2}} = \nu$. (1 Punkt)

e) Zeigen Sie $\nu^*(D) = \infty$. Vergleichen Sie dies mit Proposition 2.4.3 b). (4 Punkte)

Anmerkung: Sollten Sie für die Bearbeitung der Aufgaben mehrere Blätter benötigen, so sind diese zusammenzuheften. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen in der ersten Zeile in der folgenden Reihenfolge: **Gruppenummer in Rot**, Vorname, Name, Matrikelnummer, Blattnummer!