

# Formänderungs- und konjugierte Formänderungsenergie

Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.

[www.Zenithpoint.de](http://www.Zenithpoint.de)

Erstellt: 28. November 2012 – Letzte Revision: 5. August 2020

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Herleitung Koeffizient <math>\eta</math></b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Beispiele</b>	<b>4</b>
3.1	Das Hookesches Gesetz als Längenänderung . . . . .	4
3.2	Das Hookesches Gesetz als Volumenänderung . . . . .	5
3.3	1000mm-Rundeisen mit $\varnothing 10\text{mm}$ . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Konstante <math>\varepsilon \cdot (\eta - 1) = 2</math></b>	<b>11</b>

---

## Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Zin12] Björnsterne Zindler. Knicken nach Theorie II. Ordnung, 2012.

---

## 1 Einleitung

Einleitung

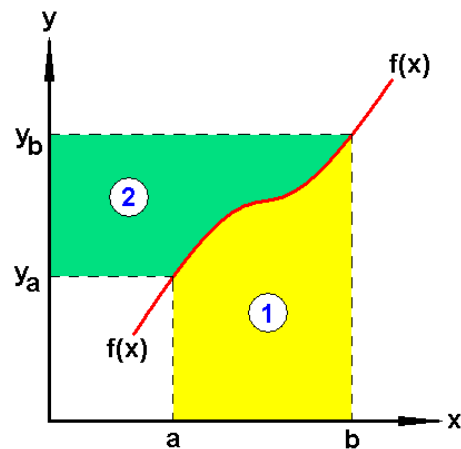
Ziel ist es, anhand eines Beispiels den Unterschied und den Sinn der (physikalischen) Größe Formänderungsenergie bzw. Formänderungsarbeit und der (mathematischen) Größe konjugierte Formänderungsenergie zu erläutern.

Neben einer rein mathematischen Herleitung folgen dann zugeschnittene Berechnungsgrundlagen. Das ist dahingehend von Bedeutung, als dass bestimmte Formeln dann nicht weiter allgemeingültig, sondern streng an Randbedingungen gebunden sind, welche als bekannt angesehen werden.

Zentrales Moment zum Schluss ist die Konstante  $\varepsilon \cdot (\eta - 1) = 2$  mit der Auflistung ausgewählter Metalle und Kunststoffe.

## 2 Herleitung Koeffizient $\eta$

Gegeben ist eine stetige und integrierbare Funktion  $f(x)$  im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems. Herleitung



Die in der Abbildung dargestellte Fläche 1 ist die Formänderungs- oder auch Verzerrungsenergie, die Fläche 2 die konjugierte Formänderungs- oder auch Ergänzungsenergie, aber nur dann sobald [001] (hier) die Achsen eine Abbildung zwischen Längenänderung und Kraft darstellen.

- Fläche 1 :

$$A_1 = - \int_b^a f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

- Fläche 2 :

$$A_2 = b \cdot f(b) - a \cdot f(a) - \int_a^b f(x) \cdot dx$$

⇒

$$A_2 = b \cdot f(b) - a \cdot f(a) - A_1$$

- Verhältnis zwischen den Flächen  $A_1$  und  $A_2$  :

$$\eta = \frac{A_2}{A_1} = \frac{b \cdot f(b) - a \cdot f(a) - \int_a^b f(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx}$$

⇒

$$\eta + 1 = \frac{b \cdot f(b)}{\int_a^b f(x) \cdot dx} - \frac{a \cdot f(a)}{\int_a^b f(x) \cdot dx}$$

⇒

$$\eta + 1 = \frac{b \cdot f(b) - a \cdot f(a)}{A_1}$$

### 3 Beispiele

#### 3.1 Das Hookesches Gesetz als Längenänderung

Hookesches Gesetz Gegeben ist die Berechnungsgrundlage des Hookeschen Gesetzes zwischen Dehnung und Spannung im elastischen Bereich.

$$\varepsilon = \frac{l_e - l_a}{l_a} = \frac{\Delta l}{l_a} = \frac{\sigma}{E}$$

Mit  $\varepsilon$  der Dehnung,  $\Delta l$  einer Längenänderung,  $l_a$  der Anfangslänge,  $\sigma$  der Spannung infolge  $\varepsilon$ , einer *konstanten* spannungsbelasteten Fläche  $A$  und  $E$  dem Elastizitätsmodul des verwendeten Werkstoffes.

$$\sigma(l_e) = \frac{F(l_e)}{A} = E \cdot \left( \frac{l_e}{l_a} - 1 \right)$$

$\Rightarrow$

$$F(l_e) = A \cdot E \cdot \left( \frac{l_e}{l_a} - 1 \right)$$

Jetzt können die Energien ermittelt werden.

$$A_1 = A \cdot E \cdot \int_{l_a}^{l_e} \left( \frac{l_e}{l_a} - 1 \right) \cdot dl_e$$

$\Rightarrow$

$$A_1 = \frac{A \cdot E}{2} \cdot \frac{(l_e - l_a)^2}{l_a}$$

Für die Fläche/Energie  $A_2$  gilt dann:

$$A_2 = l_e \cdot A \cdot E \cdot \left( \frac{l_e}{l_a} - 1 \right) - 1 \cdot A \cdot E \cdot \left( \frac{1}{l_a} - 1 \right) - A_1$$

$\Rightarrow$

$$A_2 = \frac{A \cdot E}{2} \cdot \frac{(l_e + l_a) \cdot (l_e - l_a)}{l_a}$$

Das Energienverhältnis  $\eta$  ist nun berechenbar mit:

$$\eta = \frac{l_e + l_a}{l_e - l_a}$$

### 3.2 Das Hookesches Gesetz als Volumenänderung

Unter der Annahme das folgende Beziehungen gelten

Volumen

$$V_a = A \cdot l_a \quad V_e = A \cdot l_e$$

kann  $A_1$ ,  $A_2$  und  $\eta$  umgestellt werden.

$$A_1 = \frac{E}{2} \cdot \frac{A \cdot (l_e - l_a)^2}{l_a}$$

⇒

$$A_1 = \frac{E}{2} \cdot \frac{(V_e - V_a)^2}{V_a}$$

Und:

$$A_2 = \frac{E}{2} \cdot \frac{A \cdot (l_e + l_a) \cdot (l_e - l_a)}{l_a}$$

⇒

$$A_2 = \frac{E}{2} \cdot \frac{(V_e + V_a) \cdot (V_e - V_a)}{V_a}$$

Und:

$$\eta = \frac{V_e + V_a}{V_e - V_a}$$

### 3.3 1000mm-Rundeisen mit $\varnothing 10\text{mm}$

Beispiel

Einem 1000mm langen Rundeisen mit 10mm Durchmesser und der Ausgangstemperatur von  $15^\circ\text{C}$  wird eine Wärmeenergie von 23,54MJ zugeführt zwecks weiterer Verarbeitung. Infolge Zwangseinspannung wird eine Ausdehnung in axialer Richtung vorerst verhindert, insbesondere radial soll  $A$  unverändert bleiben.

Berechnet soll werden, die Zwangskraft  $F$  infolge Erwärmung, sowie sämtliche oben beschriebene Energien und Verhältnisse.

- **Berechnung der Temperaturänderung.** Als Ausgang wird der Energie- Temperatur- Zusammenhang genutzt.

$$E = c \cdot m \cdot T$$

⇒

$$\Delta E = c \cdot \rho \cdot A \cdot l_a \cdot \Delta T$$

Mit:

$c$ spezifische Wärmekapazität	$452 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
$\rho$ Stoffdichte	$7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$A$ Querschnittsfläche	$\pi/4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
$l_a$ Stablänge	$1 \text{ m}$

$$\Delta T = \frac{23,54 \cdot 10^6 \cdot 4}{452 \cdot 7800 \cdot \pi \cdot 0,01^2 \cdot 1000} \left[ \frac{\text{J} \cdot \text{kg} \cdot \text{K} \cdot \text{m}^3}{\text{J} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}} \right]$$

⇒

$$\Delta T = 85 \text{ K}$$

- **Die (verhinderte) Längenänderung des Stabes.**

$$l_e \approx l_a \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

Mit:

$\alpha$ linearer Längenausdehnungskoeffizient	$11,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
--	-------------------------------------

$$l_e \approx 1000 \cdot (1 + 11,8 \cdot 10^{-6} \cdot 85) \left[ \text{mm} \cdot \frac{\text{K}}{\text{K}} \right]$$

⇒

$$l_e \approx 1001 \text{ mm}$$

- **Die Zwangskraft infolge Verhinderung der Längenausdehnung.**

$$F = A \cdot E \cdot \left( \frac{l_e}{l_a} - 1 \right)$$

Mit:

$E$ Elastizitätsmodul	$210.000 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$
-----------------------	--

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 \cdot 210000 \cdot \left( \frac{1001}{1000} - 1 \right) \left[ \text{mm}^2 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \right]$$

⇒

$$F = 16493,4 \text{ N} \approx 16,5 \text{ kN}$$

Es folgen die **Energieberechnungen über die Längenänderung** für den Fall, dass die Behinderung nicht existiere.

• **A<sub>1</sub>:**

$$A_1 = \frac{A \cdot E}{2} \cdot \frac{(l_e - l_a)^2}{l_a}$$

⇒

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 210000}{4 \cdot 2} \cdot \frac{(1001 - 1000)^2}{1000} \left[ \frac{\text{mm}^2 \cdot \text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \right]$$

⇒

$$A_1 = 8246,68 \text{ N} \cdot \text{mm} \approx 8,25 \text{ [N} \cdot \text{m} = \text{J]}$$

Eine andere Möglichkeit ist die Berechnung aus  $F$ :<sup>1</sup>

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot F \cdot (l_e - l_a) \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 16493,4 \cdot (1,001 - 1,000) = 8,25 \text{ [N} \cdot \text{m} = \text{J]}$$

• **A<sub>2</sub>:**

$$A_2 = \frac{A \cdot E}{2} \cdot \frac{(l_e + l_a) \cdot (l_e - l_a)}{l_a}$$

⇒

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 210000}{4 \cdot 2} \cdot \frac{(1001 + 1000) \cdot (1001 - 1000)}{1000} \left[ \frac{\text{mm}^2 \cdot \text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{\text{mm} \cdot \text{mm}}{\text{mm}} \right]$$

⇒

$$A_2 = 16501608,11 \text{ N} \cdot \text{mm} \approx 16501,61 \text{ [N} \cdot \text{m} = \text{J}] = 16,5 \text{ kJ}$$

Eine andere Möglichkeit ist die Berechnung aus  $F$ :<sup>2</sup>

$$A_2 = F \cdot l_e \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

$$A_2 = 16493,4 \cdot 1,001 = 16510 \text{ N} \cdot \text{m} = 16,5 \text{ [kN} \cdot \text{m} = \text{kJ]}$$

• **Das Verhältnis  $\eta$ :**

$$\eta = \frac{A_2}{A_1} = \frac{l_e + l_a}{l_e - l_a}$$

⇒

$$\eta = \frac{16501,61}{8,25} = \frac{1001 + 1000}{1001 - 1000} \left[ \frac{\text{m}}{\text{m}} \right]$$

⇒

$$\eta = 2001$$

Die **Energiewerte** zum Abschluss **über die Volumina** berechnet.

$$V_a = \frac{\pi}{4} \cdot 0,01^2 \cdot 1 \text{ [m}^2 \cdot \text{m]} \quad V_e = \frac{\pi}{4} \cdot 0,01^2 \cdot 1,001 \text{ [m}^2 \cdot \text{m]}$$

⇒

$$V_a = 78,53982 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \quad V_e = 78,61835 \text{ m}^3$$

<sup>1</sup>Nur hier so gültig, da  $F(l_e)$  linear zu  $l_e$

<sup>2</sup>Nur hier so gültig, da  $F(l_e)$  linear zu  $l_e$

- **A<sub>1</sub>:**

$$A_1 = \frac{210000 \cdot 10^6}{2} \cdot \frac{(78,61835 \cdot 10^{-6} - 78,53982 \cdot 10^{-6})^2}{78,53982 \cdot 10^{-6}} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}^6}{\text{m}^3} \right]$$

⇒

$$A_1 = 8,24 [\text{N} \cdot \text{m} = \text{J}]$$

- **A<sub>2</sub>:**

$$A_2 = \frac{210000 \cdot 10^6}{2} \cdot \frac{(78,61835 + 78,53982) \cdot 10^{-6} \cdot (78,61835 - 78,53982) \cdot 10^{-6}}{78,53982 \cdot 10^{-6}}$$

⇒

$$A_2 = 16499,5 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}^3 \cdot \text{m}^3}{\text{m}^3} = \text{N} \cdot \text{m} \right] \approx 16,5 \text{ kJ}$$

- **Das Verhältnis  $\eta$  :**

$$\eta = \frac{78,61835 + 78,53982}{78,61835 - 78,53982} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3} \right]$$

⇒

$$\eta = 2001$$



## 4 Zusammenfassung

- Die Formänderungs- oder auch Verzerrungsenergie (hier der Fläche  $A_1$  entsprechend) eines Körpers ist als die bei der Verformung gespeicherte Arbeitsfähigkeit definiert.
- Die konjugierte Formänderungs- oder auch Ergänzungsenergie ist eine bedeutende mathematische Größe besitzt jedoch keine direkte physikalische Bedeutung. Sie splittet sich auf in innere und äußere Ergänzungsenergie. Eine Minimierung der Ergänzungsenergie<sup>3</sup> entspricht der Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit<sup>4</sup> und somit der Verschiebbarkeit der Krafteinleitung.

Zusammenfassung

Soll die Nachgiebigkeit des oben genutzten Systems minimal werden, dann muss gelten:

$$A_2 = \frac{E}{2} \cdot \frac{(V_e + V_a) \cdot (V_e - V_a)}{V_a} \rightarrow MIN$$

⇒

$$(V_e - V_a) \rightarrow MIN$$

⇒

$$V_e = V_a$$

Das impliziert aber wiederum, dass:

$$A_1 = \frac{E}{2} \cdot \frac{(V_e - V_a)^2}{V_a}$$

⇒

$$A_1 = 0$$

Nachgiebigkeit und Arbeitsfähigkeit eines Systems sind demnach untrennbar miteinander verbunden und „nur“ optimierbar für den speziellen Einsatzfall.

$$\eta = \frac{V_e + V_a}{V_e - V_a} \rightarrow \infty \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

- Unkommentiert wurde hier das Verhältnis zwischen der Zwangskraft infolge veränderter Längenausdehnung bei Erwärmung und erster Knickkraft  $F_k$  durch die Schlankheit des Stabes, nach [Zin12] gilt:

$$F_k = \left( \frac{\pi}{l_a} \right) \cdot E \cdot I$$

Mit:

$$I \quad \text{Flächenträgheitsmoment} \quad \frac{\pi}{4} \cdot r^4 \text{ mm}^{-4}$$

⇒

$$F_k = \left( \frac{\pi}{1000} \right)^2 \cdot 210000 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot 10^4 \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{mm}^4}{\text{mm}^2 \cdot \text{mm}^2} \right]$$

⇒

$$F_k = 1017,4 \text{ N} \approx 1,0 \text{ kN}$$

Das Verhältnis  $F(l_e)/F_k$  ist demnach um das 16,5-fache übertroffen, was dann schon der etwa vierten Knickkraft nach Euler entspricht. Der Stab würde durch Ausknicken im Hinblick Stabilität versagen. Statisch wäre er voll ausgelastet, jedoch nicht überlastet bei z. B.  $\sigma_{zul} = 240/1,1 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ .

$$\sigma_{vorh} = \frac{4 \cdot F(l_e)}{\pi \cdot d^2} \leq \sigma_{zul}$$

⇒

$$\sigma_{vorh} = \frac{4 \cdot 16493,4}{\pi \cdot 10^2} \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] \leq \frac{240}{1,1} \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] = \sigma_{zul}$$

⇒

$$\sigma_{vorh} = 210 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} < 218 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} = \sigma_{zul}$$

<sup>3</sup> „Minimalprinzip der Ergänzungsenergie“

<sup>4</sup> für lineare und nichtlineare aber elastische Körper bei kleinen  $dl = l_e - l_a$  bzw.  $dV = V_e - V_a$

- Durch Einführung der Dehnung  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{l_e - l_a}{l_a}$$

kann das Verhältnis  $\eta$  „näher“ zur Notation der Technischen Mechanik beschrieben werden. So ergibt sich jetzt:

$$\eta = \frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon} \quad \varepsilon = \frac{2}{\eta - 1}$$

Für kleine Dehnungen  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt dann näherungsweise

$$\eta \cdot \varepsilon \approx 2$$

- Die Dehnung lässt sich dann direkt durch das Verhältnis der Energien  $A_1$  und  $A_2$  beschreiben.

$$\varepsilon = 2 \cdot \frac{A_1}{A_2 - A_1}$$

⇒

$$\varepsilon \cdot A_2 = (2 + \varepsilon) \cdot A_1$$

Für kleine Dehnungen  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt dann näherungsweise

$$\varepsilon \cdot A_2 = 2 \cdot A_1$$

- Durch Definition der Poissonzahl (Querkontraktionszahl)  $\nu$  kann diese ermittelt werden.

$$\frac{V_e - V_a}{V_a} = (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{l_e - l_a}{l_a}$$

Rechts wird substituiert durch die Dehnung  $\varepsilon$ , links durch  $\eta = (V_e + V_a) / (V_e - V_a)$ .

$$\frac{2}{\eta - 1} = (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \varepsilon$$

⇒

$$2 = (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \varepsilon \cdot (\eta - 1)$$

Im rechten Term wurde  $\varepsilon \cdot (\eta - 1) = 2$  schon vorhergehend definiert. Daher ergibt sich für vorliegendes Modell.

$$\nu = 0$$

Was so am Anfang festgelegt wurde, in der Realität jedoch so nicht beobachtbar ist.

- Eine Berechnungsgrundlage zwischen dem Elastizitätsmodul  $E$  und dem Schubmodul  $G$  lässt sich mit  $\eta$  verknüpfen.

$$E = 2 \cdot G \cdot (1 + \nu) \quad \varepsilon \cdot (\eta - 1) = 2$$

⇒

$$\eta = \frac{E + G \cdot \varepsilon \cdot (1 + \nu)}{G \cdot \varepsilon \cdot (1 + \nu)}$$

Mit  $\nu = 0$

$$\eta = \frac{E + G \cdot \varepsilon}{G \cdot \varepsilon}$$

Mit  $\eta = A_2/A_1$

$$\frac{A_1}{A_2 - A_1} = \frac{G \cdot \varepsilon}{E}$$

- In jedem Fall muss für die Forderung  $\varepsilon \cdot (\eta - 1) = 2$  gelten

$$\eta - 1 \neq 0$$

Was dann impliziert

$$A_1 \neq A_2$$

⇒

$$l_a \neq 0 \quad V_a \neq 0$$

## 5 Konstante $\varepsilon \cdot (\eta - 1) = 2$

$$\varepsilon \cdot (\eta - 1) = 2 = \frac{E}{G \cdot (1 + \nu)}$$

- Für ausgewählte Metalle.

Konstante

Material	Elastizitätsm. $E$ [kN · mm <sup>-2</sup> ]	Schubmodul $G$ [kN · mm <sup>-2</sup> ]	Poissonzahl $\nu$ [-]	$(\eta - 1) \cdot \varepsilon$ [-]
Messing (Guss)	80	33,7	0,34	1,772
Molybdän	280	120	0,29	1,809
Aluminium (unlegiert)	65	25,8	0,33	1,894
Titan (unlegiert)	100	38	0,35	1,949
Magnesium (unlegiert)	44,3	17	0,33	1,959
Gold	78,7	28	0,42	1,979
Blei (unlegiert)	16,2	5,5	0,44	2,045
Stahl (unlegiert)	210	75	0,28	2,188
Wolfram	330	125	0,17	2,256
Kupfer (unlegiert)	123	39	0,31	2,408

- Für ausgewählte Kunststoffe.

Material	Elastizitätsm. $E$ [kN · mm <sup>-2</sup> ]	Schubmodul $G$ [kN · mm <sup>-2</sup> ]	Poissonzahl $\nu$ [-]	$(\eta - 1) \cdot \varepsilon$ [-]
Epoxid	2,15	0,90	0,37	1,744
PET	2,10	0,83	0,38	1,833
PE	0,40	0,15	0,42	1,878
PMMA	1,80	0,60	0,40	2,143
PC	2,10	0,70	0,39	2,158

