



# **Modellierung von Wachstumsprozessen**

## **Schimmelpilz als abstoßendes Beispiel**

---

Fachbereichsarbeit aus Mathematik  
Version zur Veröffentlichung im Internet

Bundesgymnasium Rechte Kramszeile  
Rechte Kramszeile 54  
3500 Krams

Von Kerstin Wolf, 8Bs  
Vorgelegt bei MMag. Matthias Kittel  
Eingereicht am 14. Februar 2014  
Krams 2013/14

## Vorwort

Der Entschluss, eine Fachbereichsarbeit zu schreiben, fiel eigentlich relativ spät. Gegen Ende letzten Schuljahres führte ich mit meinem Mathematikprofessor Matthias Kittel ein Gespräch über das voraussichtliche Thema meines Spezialgebietes im Fach Mathematik. Aufgrund meines starken Interesses für Biologie und Mathematik wollte ich in meinem Spezialgebiet diese zwei Fächer vereinen. Den Themenvorschlag meines Professors, nämlich die „Modellierung von Wachstumsprozessen“, nahm ich dankend und voller Vorfreude entgegen. Ich beschloss, meine im Spezialgebiet erworbenen theoretischen Erkenntnisse durch praktische Untersuchungen zu beweisen, da ich eine besondere Vorliebe für Experimente habe. MMag. Prof. Kittel versuchte mich von Anfang an zu überzeugen, statt dem Spezialgebiet eine Fachbereichsarbeit zu schreiben, da das Thema sehr umfangreich ist und eine ausführliche Behandlung leicht zulässt – wie man sieht hat er gute Überzeugungsarbeit geleistet!

Obwohl ich einer Fachbereichsarbeit gegenüber anfangs eher negativ eingestellt war, ließ ich mich schlussendlich nach dem Motto *Wenn schon, denn schon...* auf diese spannende Herausforderung ein. Das erfreuliche Ergebnis meiner Entscheidung ist diese fast 100-seitige Fachbereichsarbeit. Einerseits hatte ich erkannt, dass die gewählte Thematik so umfassend und interessant ist, dass man ohne Schwierigkeiten eine lange Arbeit darüber verfassen kann. Andererseits eröffnete mir die Fachbereichsarbeit die Möglichkeit, einen Teil meiner Matura in aller Ruhe im Laufe des letzten Schuljahres abschließen zu können.

Ehrlich gesagt machten sich zu Beginn meiner Arbeit leise Zweifel bezüglich des Zeitmanagements bemerkbar: Schaffe ich es wirklich, eine umfangreiche und ansprechende Fachbereichsarbeit innerhalb der mir verfügbaren Zeit zu schreiben? Manchmal äußerte ich einfach nur den Wunsch, dem Tag mehr als 24 Stunden zu verleihen, denn das Schreiben einer solchen Arbeit zehrt logischerweise an der Energie und der Freizeit. Auf jeden Fall erwarb ich mir im letzten halben Jahr durch das Verfassen dieser Fachbereichsarbeit die Fähigkeit, mir meine Zeit genau einzuteilen und auch an stressigen Tagen Ruhe zu bewahren.

Rückblickend betrachtet bereitete mir das Beschäftigen mit der gewählten Thematik viel Freude. Ich konnte viele neue Erfahrungen machen, einige sehr interessante Aspekte der Mathematik und Biologie kennenlernen und auch an inhaltlichem Wissen extrem viel dazugewinnen. Die Zeit war spannend, lehrreich und fordernd und ich bin sehr stolz auf das Resultat!

Ich hoffe, dass Sie durch das Lesen dieser Fachbereichsarbeit einen Einblick in die komplexe Welt der Modellierung von Wachstumsprozessen erhalten werden.

# Inhaltsverzeichnis

<b><u>1. Einführung</u></b> .....	5
1.1. mathematische Modellierung – ein kurzer historischer Abriss .....	5
1.2. Was versteht man unter mathematischer Modellierung?.....	5
1.3. Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß.....	6
1.4. Leitlinien für den Modellierungsprozess.....	7
1.4.1. Modellentwicklung: Vom realen Problem zum mathematischen Modell.....	8
1.4.2. Analyse und Simulation: vom mathematischen Problem zu seiner Lösung .....	9
1.4.3. Interpretation und Validierung des Modells.....	10
1.5. Anforderungen an ein mathematisches Modell .....	11
<b><u>2. Wachstumsprozesse</u></b> .....	13
2.1. Was sind Wachstumsprozesse?.....	13
2.2. Grundbegriffe bezüglich Wachstumsfunktionen.....	14
2.3. Eigenschaften von Wachstumsprozessen.....	18
2.4. Bedeutung von Wachstumsprozessen in der Biologie.....	21
2.5. Bedeutung von Wachstumsprozessen in der Mathematik.....	21
<b><u>3. Mathematische Wachstumsmodelle mit einer Zustandsgröße</u></b> .....	22
3.1. Lineares Wachstum.....	22
3.1.1. Eigenschaften linearer Funktionen.....	22
3.1.2. Herleitung des linearen Wachstumsgesetzes.....	23
3.1.3. Lineares Wachstumsgesetz.....	23
3.1.4. Anwendungen des linearen Wachstumsgesetzes.....	24
3.1.5. Kritik am linearen Wachstumsmodell anhand eines realen Beispiels.....	25
3.2. Exponentielles Wachstum.....	27
3.2.1. Eigenschaften von Exponentialfunktionen.....	27
3.2.2. Herleitung des exponentiellen Wachstumsgesetzes.....	28
3.2.3. Exponentielles Wachstumsgesetz.....	28
3.2.4. Anwendungen des exponentiellen Wachstumsgesetzes.....	30
3.2.5. Kritik am exponentiellen Wachstumsmodell anhand eines realen Beispiels.....	31
3.3. Beschränktes Wachstum.....	33
3.3.1. Eigenschaften von beschränkten Wachstumsfunktionen.....	33
3.3.2. Herleitung des beschränkten Wachstumsgesetzes.....	34
3.3.3. Beschränktes Wachstumsgesetz.....	35
3.3.4. Anwendungen des beschränkten Wachstumsgesetzes.....	37
3.3.5. Kritik am beschränkten Wachstumsmodell anhand eines realen Beispiels.....	38
3.4. Logistisches Wachstum .....	40
3.4.1. Eigenschaften von logistischen Wachstumsfunktionen.....	40
3.4.2. Herleitung des logistischen Wachstumsgesetzes.....	41
3.4.3. Logistisches Wachstumsgesetz.....	43
3.4.4. Anwendungen des logistischen Wachstumsgesetzes.....	43
3.4.5. Kritik am logistischen Wachstumsmodell anhand eines realen Beispiels.....	45

<b><u>4. Mathematische Wachstumsmodelle mit zwei Zustandsgrößen</u></b> .....	46
4.1. Räuber-Beute-Beziehungen: Lotka-Volterra-Modell.....	46
4.1.1. Lotka-Volterra-Gesetze.....	47
4.1.2. Annahmen des Lotka-Volterra-Modells aus biologischer Sicht .....	48
4.1.3. Graphische Darstellung des Lotka-Volterra-Modells.....	49
4.2. Konkurrenz .....	51
4.2.1. Dominanz.....	51
4.2.2. Bistabilität.....	52
4.2.3. Stabile Koexistenz .....	52
4.3. Mutualismus .....	53
<b><u>5. Wachstumsprozesse in der Biologie</u></b> .....	54
5.1. Biologische Grundlagen und Voraussetzungen von Wachstum .....	54
5.1.1. pH-Wert .....	54
5.1.2. Temperatur.....	54
5.1.3. Nährstoffe.....	55
5.1.4. Verfügbarkeit von Wasser.....	57
5.1.5. Verfügbarkeit von Sauerstoff.....	57
5.2. Einflussfaktoren von Wachstum .....	57
5.3. Phasen des mikrobiellen Wachstum .....	58
5.3.1. Latenzphase .....	58
5.3.2. Exponentielle Phase .....	58
5.3.3. Verzögerungsphase.....	58
5.3.4. Stationäre Phase .....	59
5.3.5. Absterbephase .....	59
<b><u>6. Experiment: Wachstumsprozesse von Schimmelpilzen</u></b> .....	60
6.1. Allgemeines über Schimmelpilze .....	60
6.1.1. Definition.....	60
6.1.2. Fortpflanzung von Schimmelpilzen.....	60
6.1.3. Optimale Bedingungen für das Wachstum von Schimmelpilzen.....	62
6.2. Aufbau und Beschreibung der Experimente.....	64
6.3. Auswertung der Experimente.....	66
6.3.1. Schimmelpilzwachstum – Probe 1.....	71
6.3.2. Schimmelpilzwachstum – Probe 3.....	77
6.3.3. Schimmelpilzwachstum – Probe 5.....	78
6.3.4. Schimmelpilzwachstum – Probe 7.....	79
6.4. Reflexion der Ergebnisse.....	80
6.4.1. Probe 1.....	80
6.4.2. Probe 3.....	81
6.4.3. Probe 5 .....	82
6.4.4. Probe 7.....	83
6.4.5. Probe 2, 4, 6 und 8.....	84
6.5. Persönliches Résumé des Projektes.....	84
<b><u>Anhang</u></b> .....	85



# 1. Einführung

## 1.1. mathematische Modellierung – ein kurzer historischer Abriss

Die historischen Wurzeln der mathematischen Modellierung liegen in den zahlreichen Versuchen Galileo Galileis<sup>1</sup>, der diese Methode erstmals systematisch verfolgt und benutzt hat. Seine Fallgesetze hat er beispielsweise durch das Herstellen einer mathematischen Idealsituation gefunden. Demnach finden mathematische Modelle in den Naturwissenschaften bereits seit einigen Jahrhunderten Verwendung. Diese Tatsache wird auch durch ein Zitat Immanuel Kants<sup>2</sup> im Jahr 1796 belegt: „*Ich behaupte aber, dass in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist.*“

Der Begriff des mathematischen Modells hat sich aber erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts als eigenständig etabliert. Einen wesentlichen Beitrag hat der deutsche Physiker Heinrich Hertz<sup>3</sup> geleistet. Er ist zwar nicht der Urheber des Modellbegriffs, kann aber als einer der Geburtshelfer angesehen werden: „*Nicht die Natur selbst ist mathematisch, sondern die Mathematik ist unsere Art ihrer Beschreibung, für die es fast immer mehrere Möglichkeiten gibt.*“<sup>4</sup>

Am Beginn des 20. Jahrhunderts ist den Modellvorstellungen auch in der wissenschaftlichen Theoriebildung eine besondere Bedeutung beigemessen worden. Sukzessive hat sich nun der Begriff **Modell** über seine Ursprünge in der Physik hinaus in andere Disziplinen ausgebreitet.

## 1.2. Was versteht man unter mathematischer Modellierung?

Ein mathematisches Modell beschreibt jede **berechenbare** Menge mathematischer Gleichungen, Ungleichungen und Vorschriften, die die wesentlichen Aspekte und Parameter eines realen Vorgangs zu erfassen versuchen. Das unklar definierte Wort **Berechenbarkeit** bezieht sich hier sowohl auf die analytische Untersuchung, als auch auf die Approximation mittels numerischer Verfahren.

---

1 \* 15. Februar 1564 in Pisa; † 8. Jänner 1642 in Arcetri

Nähere Informationen zu Galileo Galilei findet man unter: [http://de.wikipedia.org/wiki/Galileo\\_Galilei](http://de.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei) (zuletzt aufgerufen am 28. 9. 2013)

2 \* 22. April 1724 in Königsberg; † 12. Februar 1804 (Das Kantsche Diktum)

Nähere Informationen zu Immanuel Kant findet man unter: [http://de.wikipedia.org/wiki/Immanuel\\_Kant](http://de.wikipedia.org/wiki/Immanuel_Kant) (zuletzt aufgerufen am 28. 9. 2013)

3 \* 22. Februar 1857; † 1. Jänner 1894 in Bonn

Nähere Informationen zu Heinrich Hertz findet man unter: [http://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich\\_Hertz](http://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz) (zuletzt aufgerufen am 28. 9. 2013)

4 entnommen aus: <http://et-energie-online.de/Zukunftsfragen/tabid/63/NewsId/147/Ein-Computer-tut-nur-das-was-man-ihm-sagt.aspx> (zuletzt aufgerufen am 28. 9. 2013)

Mathematische Modellierung versucht eine reale Fragestellung in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, das heißt, Teile der Realität werden mathematisch begreifbar gemacht. Auf diese Weise erhält man die Möglichkeit, die gegebene Fragestellung mithilfe mathematischer Werkzeuge zu beantworten und in Bezug auf die Wirklichkeit zu interpretieren. Modellieren setzt daher immer einen direkten Realitätsbezug voraus.

Die Voraussetzung eines jeden mathematischen Modelliervorhabens ist eine Leitfrage oder ein Ziel. Dies ist wichtig, da die Komplexität und Art eines Modells von der Zielvorgabe abhängen. Ein Modell soll einen bestimmten Teil der Realität so darstellen, dass der mathematische Stellenwert eines Problems erkannt, die benötigten Daten gesichert und ein geeigneter Lösungsweg zur Beantwortung der Leitfrage gefunden werden können. Danach folgen eine Interpretation der Ergebnisse im Hinblick auf die Sachsituation und eine Überprüfung der Gültigkeit. Die Vorgangsweise für das Erstellen mathematischer Modelle werde ich in Kapitel 1.4. näher erläutern.

### 1.3. Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß

Die folgende Abbildung beschreibt den Modellierungskreislauf nach Blum<sup>5</sup> und Leiß<sup>6</sup>:

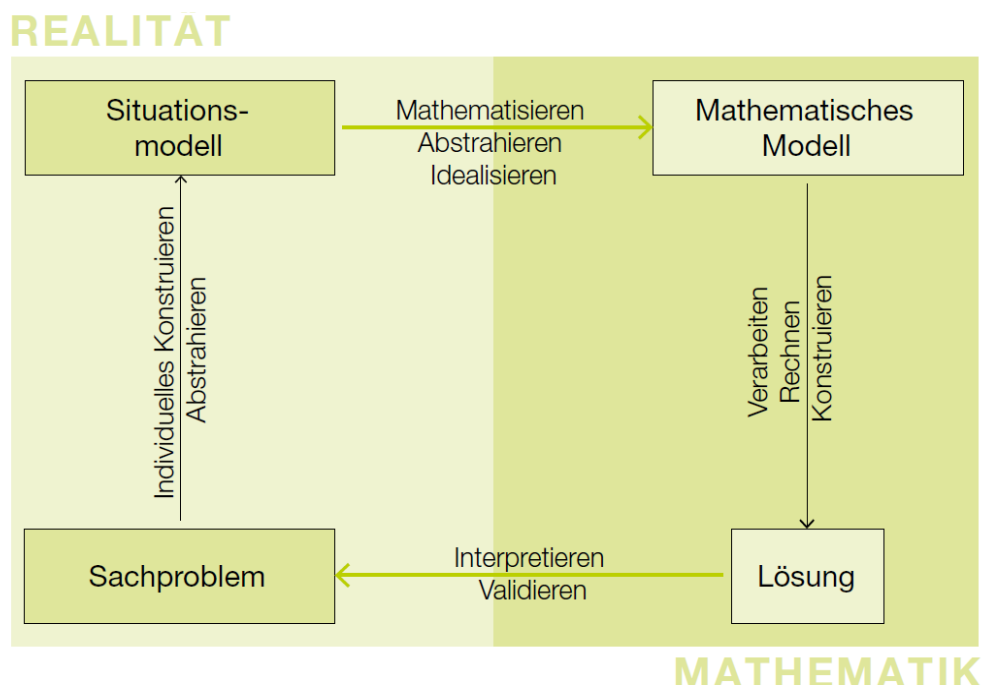


Abbildung 1: Modellierungskreislauf

5 \* 1945 in Pforzheim (Baden)

Nähere Informationen zu Werner Blum findet man unter: [http://madipedia.org/wiki/Werner\\_Blum](http://madipedia.org/wiki/Werner_Blum) (zuletzt aufgerufen am 12. 10. 2013)

6 \* 28. November 1975

Nähere Informationen zu Dominik Leiß findet man unter: [http://madipedia.org/wiki/Dominik\\_Leiß](http://madipedia.org/wiki/Dominik_Leiß) (zuletzt aufgerufen am 12. 10. 2013)

Der sogenannte Modellierungskreislauf veranschaulicht die enge Verknüpfung von Realität und Mathematik im Modellierungsprozess. Ausgangspunkt der Modellierung ist ein Situationsmodell, also ein reales Problem oder erklärungsbedürftiges Phänomen, aus dem ein mathematisches Modell entwickelt werden soll. Mathematisieren, Abstrahieren und Idealisieren sind Tätigkeiten, die bei der Erstellung eines Modells zum Einsatz kommen. Unter Mathematisieren versteht man die Anwendung von mathematischen Werkzeugen beziehungsweise das Erfassen und Ausschöpfen des mathematischen Gehalts von Situationen. Abstrahieren bezeichnet das Fokussieren auf alle mathematisch relevanten Eigenschaften eines Objektes, das heißt, man beschränkt sich auf das Wesentliche und vernachlässigt zusätzliche Informationen. Beim Idealisieren werden bekannte Tatsachen nicht berücksichtigt. Dadurch werden die prägnante Darstellung von Sachverhalten und das Lösen des realen Problems überhaupt erst möglich.

Das fertig erstellte Modell wird unter Anwendung von analytischen, geometrischen und numerischen Methoden gelöst. Die mathematischen Methoden umfassen beispielsweise die Tätigkeiten Verarbeiten, Rechnen und Konstruieren.

Durch Interpretieren und Validieren der mathematischen Lösung erhält man das Sachproblem, das in weiterer Folge durch individuelles Konstruieren und Abstrahieren wieder zum Ausgangspunkt des Modellierungsprozesses, nämlich zum Situationsmodell, zurückführt. Beim Interpretieren bezieht man das mathematische Resultat unter Berücksichtigung der Einheiten wieder auf die Realsituation. Die für spezielle Situationen entwickelten Lösungen werden im Interpretationsschritt verallgemeinert. Unter Validieren versteht man die kritische Überprüfung der erhaltenen Lösungen im Hinblick auf die Realität. Auch die Kontrolle der Dimension, der Größenordnung, der Abhängigkeiten, der Randbedingungen, der Widerspruchsfreiheit und der Stabilität des Modells ist ein Teilbereich der Validierung. Weiters sollten Vergleiche unterschiedlicher Modelle und Überlegungen bezüglich anderer Lösungswege angestellt werden. Wenn der Fall eintritt, dass die erhaltene Lösung nicht angemessen ist, sollten einzelne Teile des Modellierungskreislaufes wiederholt werden.

## 1.4. Leitlinien für den Modellierungsprozess<sup>7</sup>

Da es sich bei der mathematischen Modellierung um einen höchst komplexen Vorgang handelt, gibt es für den Ablauf des Modellierungsprozesses kein wirkliches Rezept, das stets zum Ziel führt. Dennoch lassen sich Leitlinien und Grundregeln angeben, die den Prozess der Modellierung um einiges erleichtern können.

---

<sup>7</sup> Überschriften und Gliederung entnommen aus: <http://www.math.uni-hamburg.de/home/struckmeier/modsim/Kap1.pdf>  
(zuletzt aufgerufen am 7. 10. 2013)

### **1.4.1. Modellentwicklung: Vom realen Problem zum mathematischen Modell**

#### **Reales Problem:**

Am Beginn des Modellierungsprozesses steht das möglichst präzise Herausarbeiten einer realen Fragestellung. Dabei sollte man sich auf das Wesentliche beschränken und überflüssige Informationen vernachlässigen, damit das Modell nicht zu komplex wird. Weiters ist es erforderlich, exakt zu definieren, welche Ziele erreicht werden sollen und wie genau die Antworten im Rahmen dieser Ziele liegen müssen. Denn oft stößt man auf das Problem, dass eine an sich klar erscheinende Fragestellung alles andere als eindeutig ist. Die Präzisierung der Problemstellung ist vor allem in den weichen Wissenschaften<sup>8</sup> schon der wesentliche Nutzen der mathematischen Modellierung.

#### **Gesetzmäßigkeiten:**

Im nächsten Schritt sollten Überlegungen angestellt werden, welche Gesetzmäßigkeiten eigentlich dem realen Problem zugrunde liegen und wie sie sich in die Welt der Mathematik übertragen lassen. Dabei spielen auch substanzwissenschaftliche Vorstellungen von den zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten eine große Rolle. Denn wenn das Problem schon in Zusammenhang mit einer anderen Wissenschaft steht, sind bereits theoretische Grundlagen vorhanden und somit ist das behandelte Thema in der Regel voreingenommen bzw. vorbelastet.

#### **Übertragen von Ansätzen aus bekannten Modellen:**

Durch intensives Recherchieren lässt sich herausfinden, ob es bereits mathematische Modelle für ähnliche Probleme gibt oder ob ein Teilproblem bereits in mathematisierter Form vorliegt. Wenn das der Fall ist, können Ansätze und Grundideen aus diesen Modellen übertragen, adaptiert und weiterbearbeitet werden. Auch strukturelle Analogien zu Fragestellungen aus ganz anderen Wissenschaftsbereichen können hilfreiche Informationen liefern und somit den Modellierungsprozess erleichtern.

#### **Benötigte und überflüssige Informationen:**

Das Abwägen der Relevanz aller vorhandenen Daten stellt ein selektives Auswahlverfahren dar, mit dessen Hilfe benötigte Informationen herausgestrichen und überflüssige Daten vernachlässigt werden können. Ebenso notwendig ist es, eine Überprüfung der Sicherheit und Zuverlässigkeit der Informationen anzusetzen.

---

<sup>8</sup> Sozialwissenschaften, Psychologie, Anthropologie, Literaturwissenschaften, Pädagogik,...  
siehe: <http://fragenantworten.info/science-engineering/Was-ist-weiche-Wissenschaft.php> (zuletzt aufgerufen am 5. 10. 2013)

### **Modellvariablen und -parameter:**

Zur Lösung des Problems können sowohl eigens erstellte Parameter, als auch extern vorgegebene Variablen herangezogen werden. Ein besonderes Augenmerk sollte man auf die Übereinstimmung der Maßeinheiten richten. Denn ein Term, der beispielsweise aus einer Summe von Größen unterschiedlicher Maßeinheiten besteht, ist in der Mathematik völlig sinnlos.

### **Einfachheit:**

Wenn zwei mögliche Modellformulierungen zur Auswahl stehen, sollte zumindest am Beginn der mathematischen Modellierung immer die einfachere gewählt werden, denn der Grad der Komplexität kann im Prozess der Modellierung immer noch gesteigert werden. Für die reale Fragestellung ist das erstellte Modell nur dann von Nutzen, wenn es sich als mathematisches Problem mithilfe mathematischer Werkzeuge lösen lässt. Dabei fließen sowohl das eigene mathematische Vorwissen, als auch die technische Möglichkeit der Lösung in die Modellierungsarbeit ein. Durch diverse neue Technologien und das hohe technische Niveau entpuppen sich im Vergleich zu den vorigen Jahrzehnten ganz andere Modelle als sinnvoll.

### **Bewusstheit des eigenen Vorgehens:**

Es ist äußerst wichtig, sich über die Gedanken, die im Modellierungsprozess mitgewirkt haben, Rechenschaft zu geben. Das Bewusstsein für die im Modell vorgenommenen Vereinfachungen und deren Gründe (Zuverlässigkeit, Zweckmäßigkeit, Richtigkeit) muss erhalten bleiben, ansonsten ist keine weitere Verbesserung des Modells möglich.

## **1.4.2. Analyse und Simulation: vom mathematischen Problem zu seiner Lösung**

### **Reales Problem als Leitfaden:**

Die Modellierungsarbeit kann als ein rein innermathematisches Vorgehen angesehen werden, denn für den Weg von der mathematischen Problemstellung zu seiner Lösung kann man sich aller mathematischen Werkzeuge bedienen. Das real zu lösende Problem sollte dennoch in Erinnerung behalten werden, da es auch als roter Faden für den mathematisch zu beschreitenden Weg fungiert.

### **Analytische Lösungen und qualitatives Modellverhalten:**

Auf analytischem Weg ist eine qualitative Bestimmung des Modellverhaltens meist gegeben. Die Aufstellung einer geschlossenen Formel für die Lösung stellt hingegen einen Idealfall dar, der in der Regel nicht erreicht werden kann.

### **Spezialfälle, Vereinfachungen und Modellreduktionen:**

Manchmal tritt der Fall ein, dass eine Lösung nur für spezielle Fälle gefunden werden kann. Es besteht auch die Möglichkeit, dass ein analytisches Lösungsverfahren erst dann angewendet werden kann, wenn ähnliche Probleme mit geringerer Dimension verwendet werden oder das vorliegende mathematische Modell einer Vereinfachung unterzogen wird.

### **1.4.3. Interpretation und Validierung des Modells**

#### **Interpretierbarkeit von Ergebnissen:**

Bevor man mit der Interpretation der mathematischen Resultate beginnt, sollte man überprüfen, ob eine reale Deutung der erhaltenen Ergebnisse und deren zugrundeliegenden mathematischen Voraussetzungen überhaupt möglich ist. Wenn die gefundenen Lösungen realistisch sind und im interpretierbaren Bereich liegen, kann man die Resultate unter Berücksichtigung der Einheiten wieder in Beziehung zur Realsituation setzen. Dabei sollte aber die Sinnhaftigkeit der Interpretationsergebnisse in Frage gestellt werden. Danach kann man die für spezielle Situationen entwickelten Lösungen verallgemeinern und das Modellverhalten in der Sprache der realen Problemstellung ausdrücken.

#### **Visualisierung der Ergebnisse:**

Die erhaltenen Lösungen sollten in eine Form gebracht werden, die sich überblicken und interpretieren lässt. In den meisten Fällen ist das aber aufgrund einer zu großen Datenmenge nicht möglich. Deshalb muss man zum Beispiel bei einer ungeordneten Ansammlung von über 1000 Zahlen die mathematischen Resultate visualisieren, wobei man sich natürlich der Möglichkeiten moderner Computer wie Computersimulationen bedienen kann.

#### **Vergleich mit Beobachtungsdaten und Experimenten:**

Oft gibt das erstellte mathematische Modell den Anlass dazu, es als Grundlage für Experimente oder Beobachtungen zu verwenden. Durch die Umsetzung des theoretischen Wissens in die Praxis erhält man die Möglichkeit, die errechneten Ergebnisse mit den Beobachtungsdaten zu vergleichen. Wenn das Modellverhalten und die Beobachtungsdaten nicht übereinstimmen, muss man sich Gedanken machen, woher die Diskrepanz kommt und welche Veränderungen daher im mathematischen Modell vorzunehmen sind. Manchmal haben Modellierungsprozesse auch nur die Funktion, empirische Untersuchungen anzuregen, auf die ohne den Versuch der Mathematisierung aber niemand gekommen wäre.

## 1.5. Anforderungen an ein mathematisches Modell

Wie bereits in Kapitel 1.1. erwähnt, hat der deutsche Physiker Heinrich Hertz den Begriff des mathematischen Modells gegen Ende des 19. Jahrhunderts wesentlich geprägt. Hertz beschäftigt sich in seinem Werk **Prinzipien der Mechanik**<sup>9</sup> mit den allgemeinen Modellierungsprinzipien, die als Hilfestellung für eine geeignete Auswahl von mathematischen Modellen dienen sollen:

*„Eindeutig sind die Bilder, welche wir uns von den Dingen machen wollen, noch nicht bestimmt durch die Forderung, daß die Folgen der Bilder wieder die Bilder der Folgen seien. Verschiedene Bilder derselben Gegenstände sind möglich und diese Bilder können sich nach verschiedenen Richtungen unterscheiden. Als unzulässig sollten wir von vornherein solche Bilder bezeichnen, welche schon einen Widerspruch gegen die Gesetze unseres Denkens in sich tragen, und wir fordern also zunächst, daß alle Bilder logisch zulässige oder kurz zulässige seien. Unrichtig nennen wir zulässige Bilder dann, wenn ihre wesentlichen Beziehungen den Beziehungen der äußeren Dinge widersprechen, das heißt wenn sie jener ersten Grundforderung nicht genügen. Wir verlangen demnach zweitens, daß unsere Bilder richtig seien. Aber zwei zulässige und richtige Bilder derselben äußeren Gegenstände können sich noch unterscheiden nach der Zweckmäßigkeit. Von zwei Bildern desselben Gegenstandes wird dasjenige das zweckmäßigere sein, welches mehr wesentliche Beziehungen des Gegenstandes widerspiegelt als das andere; welches, wie wir sagen wollen, das deutlichere ist. Bei gleicher Deutlichkeit wird von zwei Bildern dasjenige zweckmäßiger sein, welches neben den wesentlichen Zügen die geringere Zahl überflüssiger oder leerer Beziehungen enthält, welches also das einfachere ist. Ganz werden sich leere Beziehungen nicht vermeiden lassen, denn sie kommen den Bildern schon deshalb zu, weil es eben nur Bilder und zwar Bilder unseres besonderen Geistes sind und also von den Eigenschaften seiner Abbildungsweise mitbestimmt sein müssen.“<sup>10</sup>*

Heinrich Hertz hat den Begriff des mathematischen Modells aber nur metaphorisch verwendet, denn er spricht in seinem Werk **Prinzipien der Mechanik** von „Bildern“ oder „Symbolen“. Aus den soeben zitierten Prinzipien von Hertz lassen sich drei wesentliche Kriterien erkennen, die ein fertiges mathematisches Modell erfüllen sollte:

### **Zulässigkeit:**

Ein Modell ist logisch zulässig, wenn dessen Formulierung auf eindeutige Weise stattgefunden hat und es widerspruchsfrei ist. Der Bereich der Zulässigkeit umfasst beispielsweise auch die Forderung, dass das erstellte Modell tatsächlich eine mathematische Lösung besitzen muss. Die Überprüfung der Zulässigkeit ist ein sogenanntes innermathematisches Problem, bei dem die Grundlagenprobleme der Mathematik aber nicht beachtet werden. Demnach scheint dieses Kriterium das am leichtesten überprüfbare zu sein.

<sup>9</sup> erschien ein halbes Jahr nach seinem Tod (1894)

<sup>10</sup> entnommen aus: <http://www.math.uni-hamburg.de/home/ortlieb/OrtliebHertzModell.pdf> (zuletzt aufgerufen am 13. 10. 2013)

### **Richtigkeit:**

Im mathematischen Sinn kann man die Richtigkeit eines Modells nicht beweisen. Sie lässt sich in der Regel nur durch Experimente, Versuche oder Beobachtungen überprüfen, das heißt, die Erfahrung ist die Grundlage für die Beurteilung der Richtigkeit eines Modells. Wenn das erstellte Modell bekannten Tatsachen nicht widerspricht, es das gegebene Problem korrekt beschreibt und es auch mit experimentellen Beobachtungen übereinstimmt, dann spricht das für die Richtigkeit eines Modells. Aufgrund der zahlreichen Fortschritte und Neuerkenntnisse in der Forschung kann sich die Richtigkeit eines Modells im Laufe der Zeit ändern. Wenn das der Fall ist, dann kann die Richtigkeit im nächsten Experiment, das dann logischerweise einen negativen Ausgang hat, widerlegt werden.

### **Zweckmäßigkeit:**

Ein zweckmäßiges Modell ist auf das Wesentliche beschränkt, das heißt, dass alle für das reale Problem überflüssigen Informationen eliminiert bzw. ausgespart werden. Das Kriterium der Zweckmäßigkeit besagt demnach, dass ein Modell so einfach wie möglich bzw. so kompliziert wie nötig sein sollte, wobei der Komplexitätsgrad von der Zielsetzung des mathematischen Modells abhängt. Von mehreren richtigen und widerspruchsfreien Modellen der gleichen Problemstellung ist das ökonomischste Modell zu bevorzugen. Das Problem ist aber, dass die Frage nach der Zweckmäßigkeit eines mathematischen Modells meist nicht eindeutig beantwortet werden kann. Die Auswahl eines zweckmäßigen Modells ist vielmehr eine Ansichtssache, wodurch Raum für Meinungsverschiedenheiten geschaffen wird.

Heinrich Hertz hat diese drei Modellierungskriterien ausschließlich in Bezug auf die Physik formuliert, in der eine experimentelle Überprüfung der Richtigkeit von Modellen gegeben ist. Das mathematische Modell hat sich aber nach und nach über seine Ursprünge in der Physik hinaus in viele andere Wissenschaften verbreitet. Vor allem in nicht-experimentellen Disziplinen ist die Verwendung von Modellen äußerst strittig, denn die Modellvalidierung kann ohne der Durchführung von Experimenten, Versuchen und Beobachtungen nicht stattfinden.

Eine Art Gebrauchsanweisung zum Erstellen, Verstehen und zur Klassifikation mathematischer Modelle findet man in [5], [15], [29] und [53].



## 2. Wachstumsprozesse

### 2.1. Was sind Wachstumsprozesse?<sup>11</sup>

Unter Wachstum versteht man im Allgemeinen die Zunahme einer bestimmten Messgröße in einer gewissen Zeit. Wachstumsprozesse können demnach mit einer streng monoton steigenden Funktion gleichgesetzt werden ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

In der Mathematik kann man eine Unterscheidung zwischen positivem und negativem Wachstum vornehmen. Dabei ist aber eine genaue Analyse des zeitlichen Verhaltens einer System-Messgröße notwendig. Zuerst wird zu einem gewissen Zeitpunkt  $t_1$  der Wert  $W_1$  der Messgröße bestimmt. Zu einem späteren Zeitpunkt  $t_2$  wird nochmals der Wert der behandelten Größe, nämlich  $W_2$ , bestimmt (entnommen aus [42]).

#### Positives Wachstum:

Ein **positives Wachstum** liegt vor, wenn der zweite Wert größer als der erste ist:  $W_2 > W_1$ .

#### Negatives Wachstum:

Von einem **negativen Wachstum** (= Schrumpfung, Abnahme oder Zerfall) spricht man, wenn der zweite Wert kleiner als der erste ist:  $W_2 < W_1$ .

#### Nullwachstum:

Das **Nullwachstum** bezeichnet das Gleichbleiben einer bestimmten Größe im Zeitverlauf, das heißt, der zweite Wert ist gleich dem ersten:  $W_2 = W_1$ . Demnach ist an dieser Stelle die Funktion konstant.

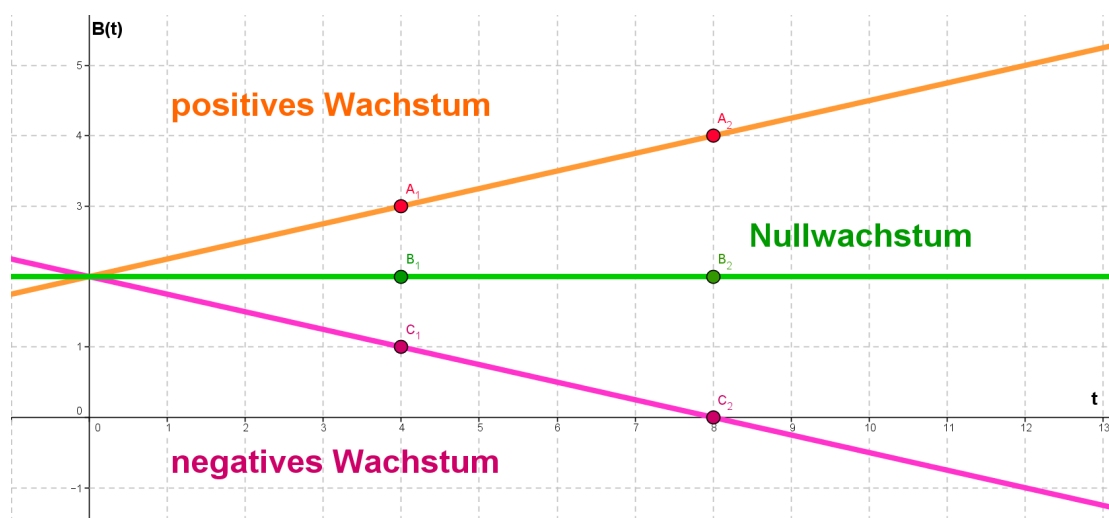


Abbildung 2: Arten des Wachstums anhand von linearen Funktionen

<sup>11</sup> Anregungen entnommen aus: [http://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum\\_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum_(Mathematik)) (zuletzt aufgerufen am 27. 10. 2013)

## 2.2. Grundbegriffe bezüglich Wachstumsfunktionen<sup>12</sup>

### Bestand B:

Als **Bestand B** bezeichnet man den Träger des Wachstums- bzw. Abnahmevorganges. Da Wachstumsprozesse im Laufe einer bestimmten Zeitspanne stattfinden, ist der jeweilige Bestand in Zusammenhang mit dem **Zeitpunkt t** der Beobachtung zu stellen. Den momentanen Bestand B, der zu einem gewissen Zeitpunkt t betrachtet wird, bezeichnet man mit  $B(t)$ . Für den Zeitpunkt t gilt:  $t = n \cdot \Delta t$ , wobei n die Anzahl der Zeitintervalle bezeichnet, in die der gesamte Beobachtungszeitraum geteilt wird.

### Anfangsbestand/Anfangswert B(0):

Den Wert des Bestandes B zu Beginn der Zeitrechnung, das heißt zum Zeitpunkt  $t = 0$ , nennt man **Anfangsbestand** oder **Anfangswert**. Wenn man den Graphen der Wachstumsfunktion betrachtet, handelt es sich beim Anfangsbestand  $B(0)$  um den Schnittpunkt der Funktion mit der y-Achse. Vereinfacht gesagt kann man den Anfangsbestand mit dem Wert des y-Achsenabschnittes gleichsetzen. Analytisch betrachtet erhält man den Anfangsbestand einer Funktionsgleichung, indem man für x den Wert 0 einsetzt.

### Wachstumskonstante k:

Die **Wachstumskonstante k** gibt Auskunft über das Maß des Wachstums, charakterisiert das jeweilige Wachstumsmodell und nimmt daher in jedem einzelnen Modell eine unterschiedliche Form an. Das Vorzeichen dieses Wertes determiniert die Art des Wachstums, das heißt, es hat großen Einfluss darauf, ob es sich um ein positives oder negatives Wachstum handelt. Während für  $k > 0$  eine Zunahme modelliert wird, beschreibt  $k < 0$  einen Abnahmeprozess. Ferner gilt der Zusammenhang: Je höher der Wert der Wachstumskonstante ist, desto steiler verläuft die Wachstumsfunktion. Mathematisch betrachtet lässt sich die Wachstumskonstante als der Quotient von Beständen zu zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten definieren:  $k = \frac{B_{n+1}}{B_n}$

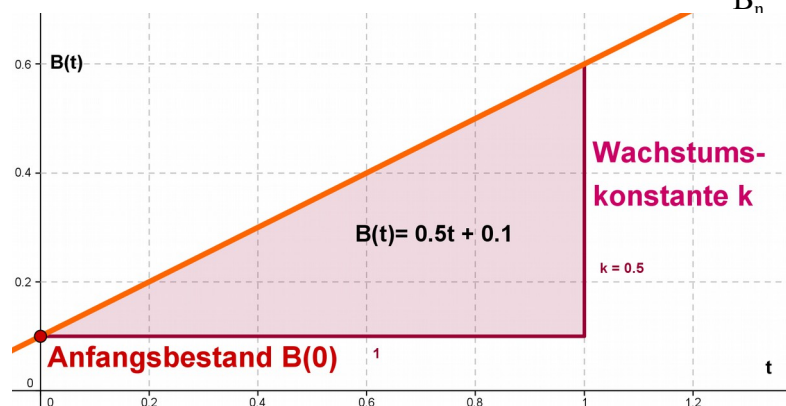


Abbildung 3: Anfangsbestand - Wachstumskonstante

<sup>12</sup> Anregungen entnommen aus: [http://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum\\_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum_(Mathematik)) (zuletzt aufgerufen am 27. 10. 2013)  
[http://othes.univie.ac.at/5505/1/2009-06-25\\_0303641.pdf](http://othes.univie.ac.at/5505/1/2009-06-25_0303641.pdf) (zuletzt aufgerufen am 27. 10. 2013)

**Absolute Änderungsrate:**

Den absoluten Zuwachs bzw. die absolute Abnahme eines Bestandes bezeichnet man auch als **absolute Änderungsrate**  $\Delta B$ . Sie ist mathematisch gesehen die Differenz zwischen Beständen in zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten. Die konkrete Änderung eines Bestandes, die eine absolute Größe liefert, wird wie folgt berechnet:  $\Delta B = B_{n+1} - B_n$

Die Abbildung 4 veranschaulicht die graphische Interpretation der absoluten Änderungsrate.

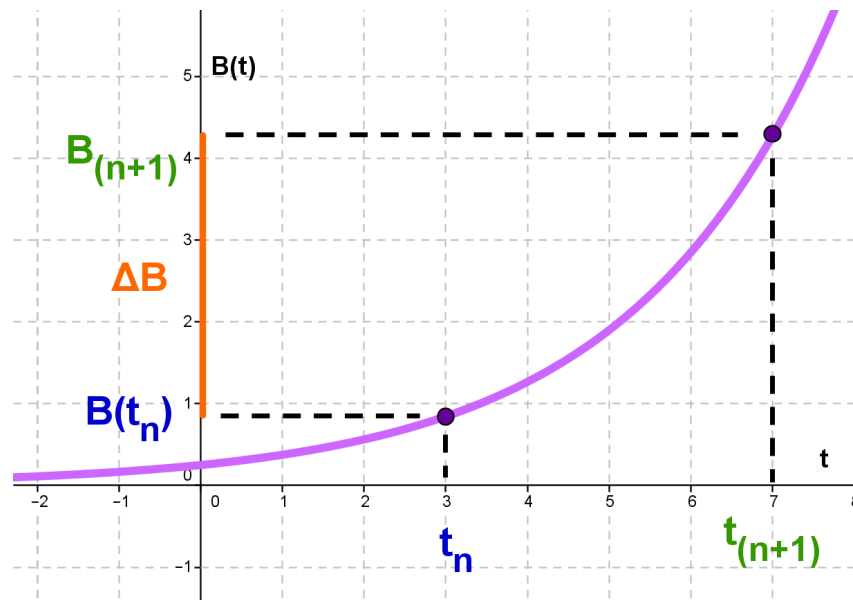


Abbildung 4: absolute Änderungsrate

**Relative Änderungsrate:**

Die absolute Änderungsrate ist nicht dimensionslos, das heißt, sie liefert je nach Größe der Zeitintervalle andere Werte. Das führt insbesondere bei Vergleichen von Wachstumsmodellen zu Problemen, denn mithilfe der absoluten Änderungsrate kann kein vergleichbares Maß für die Änderung eines Bestandes angegeben werden. Für die Berechnung einer dimensionslosen Änderung dient die **relative Änderungsrate**, die einen prozentualen Wert liefert. Sie setzt die Änderung des Bestandes mit dem Anfangsbestand in Beziehung:  $\frac{\Delta B}{B_n} = \frac{B_{n+1} - B_n}{B_n}$

**Mittlere Änderungsrate:**

Die **mittlere Änderungsrate** ist die durchschnittliche Änderung einer zeitabhängigen Größe zwischen zwei Zeitpunkten. Demnach drückt sie die Zuwachs- bzw. die Abnahmegeschwindigkeit in einem bestimmten Zeitintervall aus. Die mittlere Änderungsrate wird als Quotient aus der Differenz der Bestände zu zwei Zeitpunkten und der Dauer des Zeitraumes, also der Differenz der beiden Zeitpunkte, berechnet. Die mittlere Änderungsrate kann aufgrund ihrer Berechnung mittels Quotienten (Division) zweier veränderter Größen auch als Differenzenquotient bezeichnet werden:  $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B_{n+1} - B_n}{t_{n+1} - t_n}$

Die graphische Interpretation der mittleren Änderungsrate einer Funktion im Intervall  $[t_1, t_2]$  entspricht der mittleren Steigung des Funktionsgraphen im Intervall  $[t_1, t_2]$ . Genauer gesagt ist die mittlere Änderungsrate zwischen  $t_1$  und  $t_2$  die Steigung der Sekante durch die Punkte  $(t_1 | B(t_1))$  und  $(t_2 | B(t_2))$ . Der Differenzenquotient fungiert somit als Maß für die Steilheit eines Funktionsgraphen. Beachten muss man aber, dass der Wert der mittleren Änderungsrate in nichtlinearen Funktionen mit der Wahl des betrachteten Zeitintervalls variiert.

Die Abbildung 5 gibt Einblick in die graphische Interpretation der mittleren Änderungsrate.

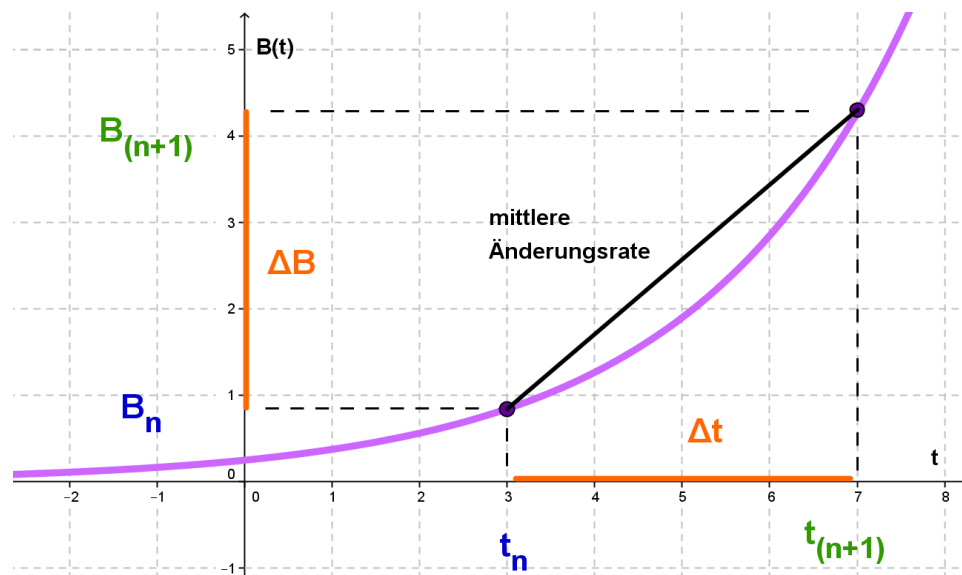


Abbildung 5: mittlere Änderungsrate

### Momentane Änderungsrate:

Bei Wachstumsvorgängen gibt die **momentane Änderungsrate** Aufschluss über die Wachstumsgeschwindigkeit eines Bestandes innerhalb eines sehr, sehr kurzen Zeitraumes. Genauer gesagt beschreibt sie die auf einen Moment bezogene Veränderung des Bestandes. Demnach müsste das Zeitintervall  $\Delta t$  den Wert Null annehmen. Aus mathematischer Sicht ist der Differenzenquotient folglich nicht mehr anwendbar, da es dort zu einer Division durch Null kommen würde. Aus diesem Grund findet der Differenzialquotient Anwendung, der dem Grenzwert der mittleren Änderungsrate des Bestandes für  $\Delta t \rightarrow 0$  entspricht. Der Differenzialquotient, der auf dem mathematischen Trick der Limesbildung beruht, lässt sich mit Hilfe der ersten Ableitung  $B'(t)$  der Wachstumsfunktion  $B(t)$  bestimmen:  $k = B'(t) = \lim_{t_{n+1} \rightarrow t_n} \frac{\Delta B}{\Delta t} = \lim_{t_{n+1} \rightarrow t_n} \frac{B_{n+1} - B_n}{t_{n+1} - t_n}$

Geometrisch interpretiert gibt der Differenzialquotient einer Wachstumsfunktion an der Stelle  $t_n$  die Steigung der Tangente an, die den Funktionsgraphen im Punkt  $P_0(t_n | B(t_n))$  berührt. Logisch betrachtet entspricht die Steigung der Tangente im Punkt  $P_0(t_n | B(t_n))$  auch der Steigung des Funktionsgraphen im Punkt  $P_0(t_n | B(t_n))$ .

Die Abbildung 6 stellt die graphische Interpretation der momentanen Änderungsrate dar.

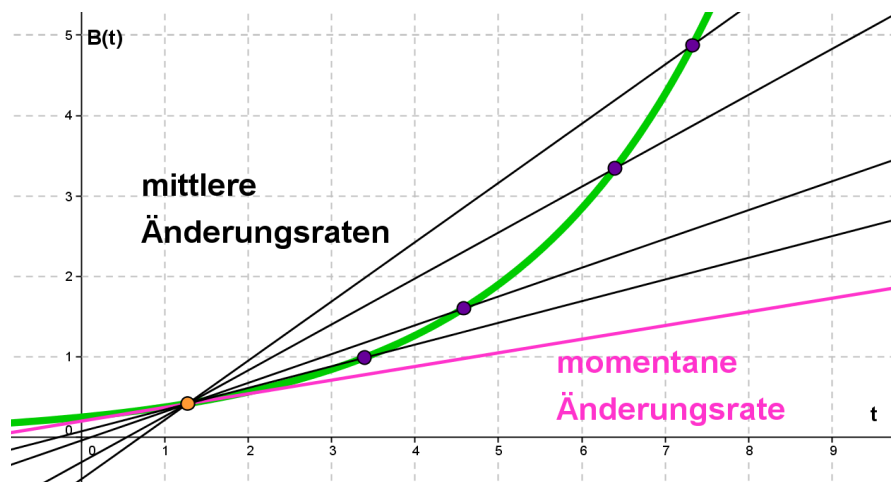


Abbildung 6: momentane Änderungsrate

### Maximale und minimale Wachstumsgeschwindigkeit:

Die **maximale** bzw. **minimale Wachstumsgeschwindigkeit** ist durch den Extrempunkt<sup>13</sup> der Wachstumsgeschwindigkeit, das heißt der ersten Ableitung der Wachstumsfunktion, gegeben. Dieser Extrempunkt stellt gleichzeitig auch einen Wendepunkt<sup>14</sup> der ursprünglichen Wachstumsfunktion dar. Fast jedes Wachstumsmodell zeichnet sich durch eine maximale bzw. minimale Wachstumsgeschwindigkeit aus. Eine Ausnahme bildet die lineare Funktion, die keinen Extrempunkt aufweist. Die Wachstumsgeschwindigkeit eines linearen Wachstumsprozesses ist somit immer konstant.

Die Abbildung 7 stellt das Extremum der Wachstumsgeschwindigkeit graphisch dar.

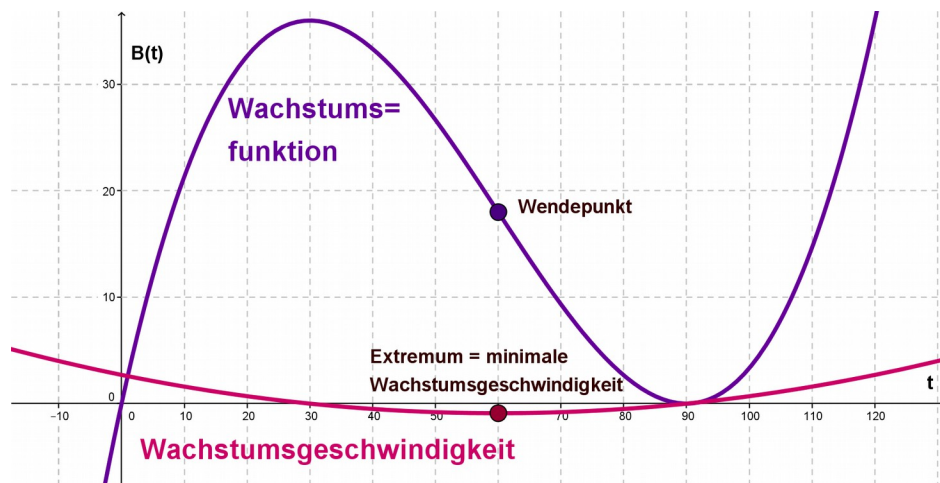


Abbildung 7: Extremum der Wachstumsgeschwindigkeit

In [19], [20] und [22] findet man genaue Regeln, Formeln, Erklärungen und Aufgaben zum Thema Ableitungen bzw. Differenzialrechnung.

13 Der Extrempunkt ist der Oberbegriff für lokales und globales Maximum bzw. Minimum. Ein Punkt gilt als Extrempunkt, wenn dort die erste Ableitung der Funktion gleich null ist.

14 Der Wendepunkt beschreibt einen Punkt auf einem Funktionsgraphen, an dem der Graph sein Krümmungsverhalten ändert. Ein Kriterium fordert, dass die zweite Ableitung der Funktion an diesem Punkt gleich null ist.

## 2.3. Eigenschaften von Wachstumsprozessen<sup>15</sup>

Wachstumsprozesse lassen sich sowohl qualitativ, als auch quantitativ beschreiben. Während die qualitative Charakterisierung anhand der Zeitverläufe des Wachstums erfolgt, verwendet man bei der quantitativen Beschreibung die Einheit der Messgröße des jeweiligen Wachstums.

### Grenzverhalten:

Grundsätzlich kann man beim Verlauf von Wachstumsprozessen zwischen **begrenztem (beschränktem) Wachstum** und **unbegrenztem (unbeschränktem) Wachstum** differenzieren. Wenn man den Fokus ausschließlich auf die mathematischen Wachstumsmodelle richtet, lassen sich das lineare und exponentielle Wachstum einem unbegrenzten Prozess zuordnen. Das entspricht aber eher einem theoretischen Konstrukt der Mathematik als einer praxisorientierten Betrachtungsweise. Denn prinzipiell unterliegen alle realen Wachstumsvorgänge einer gewissen Beschränkung. Der Grund dafür sind die nur begrenzt vorliegenden Ressourcen, aus denen sich das Wachstum speist. Es besteht aber auch die Möglichkeit, dass das Wachstum auf andere Weise schon vor dem Erschöpfen der Ressourcen begrenzt wird und einem dynamischen Gleichgewicht zustrebt, wie es zum Beispiel beim Räuber-Beute-System (siehe Kapitel 4.1.) der Fall ist. Ein beschränkter Wachstumsvorgang ist aber nicht zwingend mit einer Wachstumsumkehr gekoppelt. Vielmehr erlaubt ein begrenzter Wachstumsprozess während der Lebensdauer eines Systems ein auf Dauer positives Wachstum, das sich innerhalb seiner Wachstumsgrenzen abspielt. Nach einer gewissen Zeit tritt eine sogenannte Sättigung ein, das heißt, die betrachtete Größe nähert sich einer bestimmten Wachstums- bzw. Sättigungsgrenze an, ohne diese zu übersteigen. Die folgende Abbildung zeigt die verschiedenen Grenzverhalten von Wachstumsvorgängen.

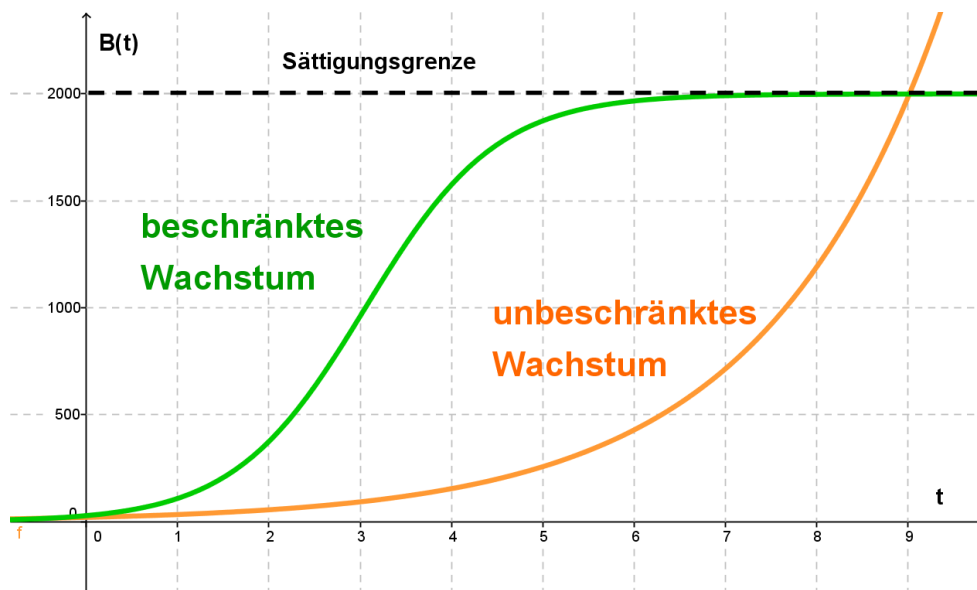


Abbildung 8: Grenzverhalten von Wachstumsprozessen

<sup>15</sup> Anregungen entnommen aus: [http://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum\\_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum_(Mathematik)) (zuletzt aufgerufen am 30. 10. 2013)



**Krümmungsverhalten:**

Beim Krümmungsverhalten von Funktionsgraphen kann man eine Unterscheidung zwischen linearen und exponentiellen Prozessen vornehmen. Bezogen auf die exponentiellen Prozesse lassen sich sowohl **degressive (verzögerte)**, als auch **progressive (beschleunigte) Wachstumsprozesse** einordnen, wobei das Wachstum selbst wiederum positiv oder negativ verlaufen kann (siehe Kapitel 2.1.). Die Begriffe **degressiv** und **progressiv** beziehen sich im Wesentlichen auf die Änderung der Wachstumsgeschwindigkeit. Während beim degressiven Wachstum der Zuwachs des entsprechenden Bestandsfaktors pro Zeiteinheit immer mehr abnimmt, nimmt er beim progressiven Wachstum immer mehr zu.

Die folgende Abbildung stellt die unterschiedlichen Krümmungsverhalten von Funktionen dar.

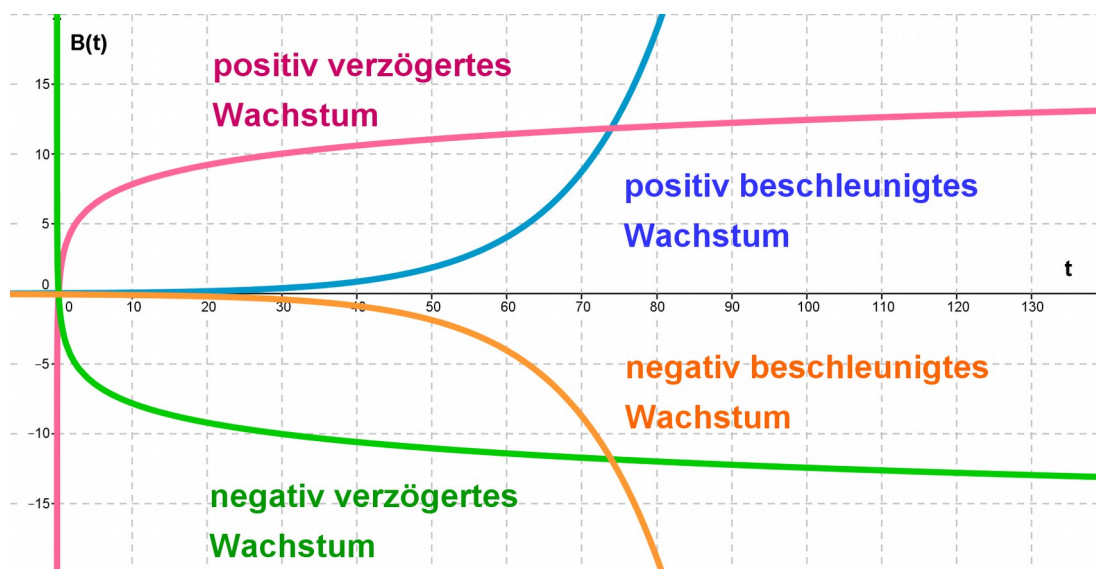


Abbildung 9: Krümmungsverhalten von Wachstumsfunktionen

**Kontinuität:**

Diese Eigenschaft bezieht sich sowohl auf die Art der Messung, als auch auf die Charakteristika der Messdaten. Prinzipiell kann die Messung **kontinuierlich** über die gesamte Zeitdauer oder **diskontinuierlich** nur zu bestimmten Zeitpunkten erfolgen. Reale Wachstumsprozesse wie zum Beispiel die menschliche Längenzunahme weisen häufig nur eine scheinbare Kontinuität auf. Bezüglich der Messdaten kann man grundsätzlich zwischen **stetigen** und **diskreten** Messdaten differenzieren. Stetige Messdaten verfügen über unendlich viele Resultate. Als sogenannte Messgrößen lassen sie sich mit einem technischen Gerät messen oder ermitteln. Teilweise wird diese Art von Messdaten auch als physikalische Messgröße bezeichnet, die bestimmte Maßeinheiten besitzt. Diskrete Messdaten haben hingegen nur abzählbare Ergebnisse, das heißt, die Resultate lassen sich zählen und liegen in einer bestimmten, absoluten Anzahl als ganze Zahl vor.

Die Abbildung 10 stellt das kontinuierliche Wachstum dem diskontinuierlichen entgegen.

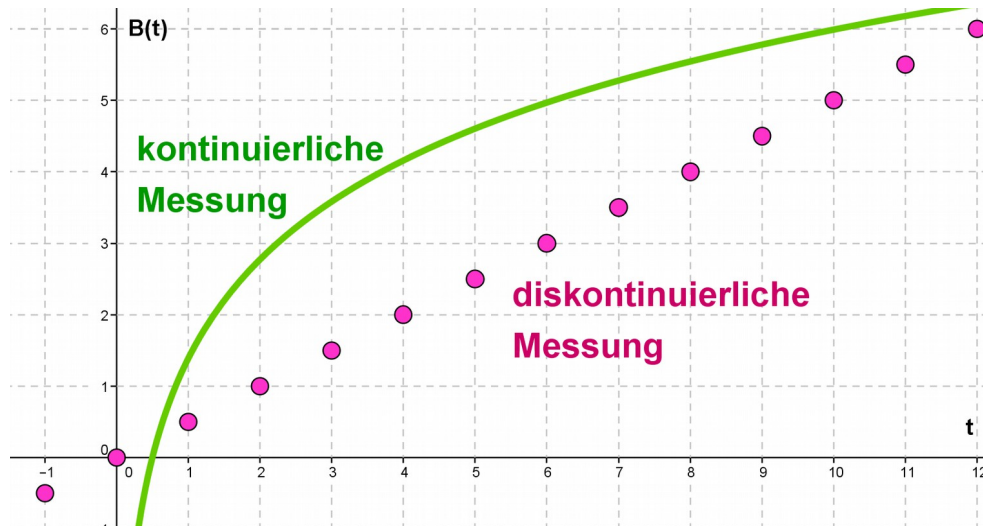


Abbildung 10: Kontinuität von Messungen

### **Periodizität:**

Eine weitere Eigenschaft von Wachstumsprozessen stellt die Periodizität dar. In der Mathematik bezeichnet die Periodizität das Auftreten sich wiederholender Werte. Wenn eine Messgröße einer Periodizität oder Schwankung unterliegt, kann prinzipiell auch ein Trend zum Wachsen oder Schrumpfen erkennbar sein. Eine Messgröße, die den gesamten Zeitverlauf einem positiven bzw. negativen monotonen Wachstum folgt, weist hingegen keine Regelmäßigkeit auf und ist daher nicht periodisch. Grundsätzlich lassen sich Schwankungen in periodische und aperiodische Schwankungen unterteilen. Periodische Schwankungen können ungedämpft, gedämpft oder aufschaukelnd sein. Aperiodische Schwankungen können sich zufallsbedingt oder chaotisch darstellen, das heißt, sie weisen keinerlei Regelmäßigkeit auf.

Die diversen Möglichkeiten der Periodizität werden durch die Abbildung 11 veranschaulicht.

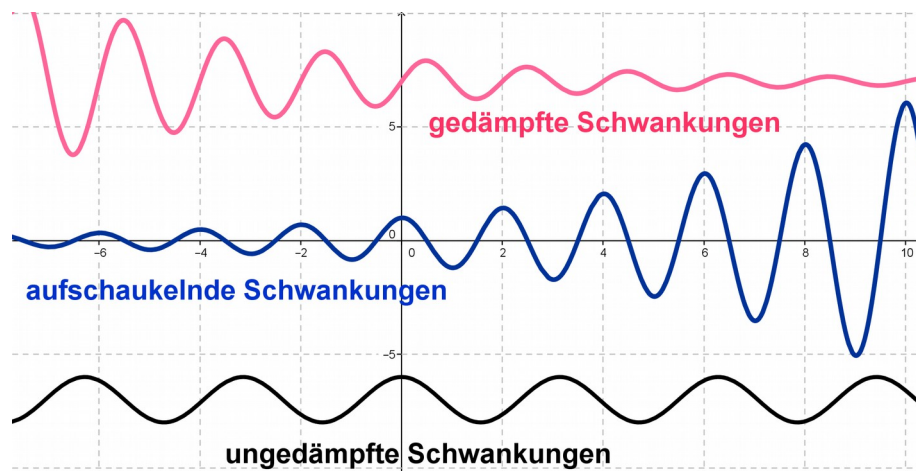


Abbildung 11: Möglichkeiten der Periodizität



## 2.4. Bedeutung von Wachstumsprozessen in der Biologie

*„Wachstum ist eine der Bedingungen für das Leben. Nahezu alle Lebewesen brauchen Wachstum für ihre Vermehrung und Fortpflanzung.“<sup>16</sup>*

In der Biologie stellt die Beobachtung zeitabhängiger Entwicklungen von Organismen eine der Hauptmethoden dar, um wertvolle Erkenntnisse über die Eigenschaften der zu untersuchenden Organismen zu gewinnen. Der Begriff **biologisches Wachstum** ist sehr vielschichtig. Einerseits bezeichnet Wachstum die Vermehrung der Gesamtmasse individueller Strukturen zu denen unter anderem Zellorganellen, Zellen, Gewebe und Organe zählen. Andererseits beinhaltet Wachstum auch die Zunahme der Größe ganzer Individuen, genauer gesagt der Gesamtorganismen. Diese Art von Wachstum beruht entweder auf der Vermehrung (Hyperplasie) oder auf der Vergrößerung (Hypertrophie) von Zellen. Im weiteren Sinn bezieht sich der Begriff **Wachstum** auch auf die Zunahme der Individuenzahl von Populationen.

Beispiele für unterschiedliche Arten von Wachstum sind das Wachstum von Pflanzen, Tieren und Menschen (Individuenwachstum), das Wachstum von Bakterienkulturen (Populationswachstum), das Zellwachstum und das Tumorstadium (Gewebewachstum). In Kapitel 5 werde ich detaillierter auf die biologischen Wachstumsprozesse eingehen und einige Beispiele näher erläutern.

## 2.5. Bedeutung von Wachstumsprozessen in der Mathematik

Wir Menschen stellen oft Untersuchungen an, wie man das Anwachsen eines gegebenen Bestandes am besten bestimmen, beschreiben und darstellen kann. Grundsätzlich finden für diesen Zweck diverse mathematische Modelle, insbesondere aber Wachstumsfunktionen Verwendung. Wachstumsfunktionen, die anhand realitätsgetreuer Messdaten erstellt werden, machen Teile der Wirklichkeit im wahrsten Sinne des Wortes mathematisch begreifbar. Auf diese Weise erhält man die Möglichkeit, Fragestellungen mithilfe mathematischer Werkzeuge zu beantworten, sie in Bezug auf die Wirklichkeit zu interpretieren und folglich Prognosen aufzustellen. Die Mathematik liefert also viele theoretische Hintergrundinformationen, die zum Verstehen und Nachvollziehen von biologischen Wachstumsvorgängen gebraucht werden.

Mathematische Modelle werden demnach in den unterschiedlichsten Bereichen der Biologie verwendet. Klassische Anwendungen stellen zum Beispiel die Untersuchung von Wachstumsprozessen und biochemischen Reaktionen oder die Ausbreitung von Epidemien dar. Neuere Anwendungen finden sich beispielsweise in etlichen Teilgebieten der Gentechnik oder in der Immunologie.

---

<sup>16</sup> entnommen aus: [http://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum\\_\(Biologie\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum_(Biologie)) (zuletzt aufgerufen am 31. 10. 2013)

### 3. Mathematische Wachstumsmodelle mit einer Zustandsgröße

#### 3.1. Lineares Wachstum

##### 3.1.1. Eigenschaften linearer Funktionen

Das positive bzw. negative Wachstum eines Bestandes trägt die Bezeichnung **linear** oder **additiv**, wenn sich der Wachstumsprozess durch eine lineare Funktion beschreiben lässt.

Eine lineare Funktion liegt vor, wenn der absolute Zuwachs bzw. die absolute Abnahme pro Zeiteinheit konstant ist. Mit anderen Worten heißt das: Gleiche Zunahme der Argumente (x-Werte) bewirkt stets eine gleiche Zu- bzw. Abnahme der Funktionswerte (y-Werte). Für eine lineare Wachstumsfunktion mit  $B(t) = k \cdot t + B(0)$  gilt demnach:  $B(t+h) = B(t) + k \cdot h$

Charakteristisch für ein lineares Wachstum ist daher die Konstanz der mittleren Änderungsrate, das heißt, die Wachstumsgeschwindigkeit ist über den gesamten Zeitraum konstant. Dieser Sachverhalt wird sowohl durch das folgende Flussdiagramm<sup>17</sup>, als auch durch die Abbildung 13 veranschaulicht:

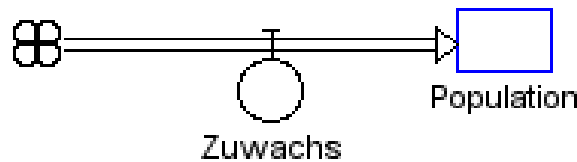


Abbildung 12: Flussdiagramm - lineares Wachstum

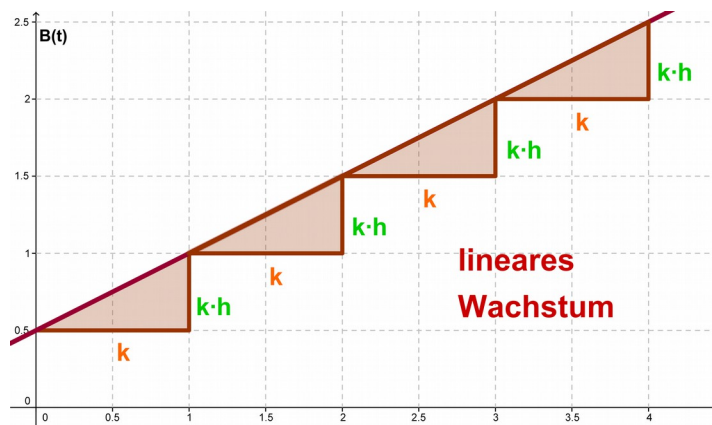


Abbildung 13: lineares Wachstum

<sup>17</sup> Unter <http://www.hupfeld-software.de/files/Dynasys-Handbuch.pdf> (zuletzt aufgerufen am 22. 12. 2013) findet man sowohl eine genaue Beschreibung für die Erstellung von Flussdiagrammen mit der Software *Dynasys*, als auch eine ausführliche Erläuterung der dynamischen Systeme mit ihren unterschiedlichen Komponenten.

### 3.1.2. Herleitung des linearen Wachstumsgesetzes

Nach den Überlegungen in Kapitel 2.2. gilt für die Zuwachsgeschwindigkeit bzw. mittlere Änderungsrate:

$$B_{n+1} - B_n = k \quad (k \in \mathbb{R})$$

Durch Umformung erhalten wir die Iterationsformel<sup>18</sup>:

$$B_{n+1} = B_n + k$$

Ermittelt man mithilfe dieser Iterationsformel die ersten Werte, dann folgt für die Berechnung des Bestandes zum Zeitpunkt  $n$ :

$$B(n) = n \cdot k + B(0)$$

Laut der aufgestellten Formel würde der Bestand nur zu gewissen Zeitpunkten, also diskontinuierlich zu- bzw. abnehmen. Das ist aber nicht der Fall. Die Veränderung vollzieht sich vielmehr kontinuierlich, weshalb wir ein kontinuierliches Modell verwenden können und davon ausgehen, dass nach den Überlegungen in Kapitel 2.2. für die momentane Zuwachsgeschwindigkeit (momentane Änderungsrate) gilt:

$$\frac{dB(t)}{dt} = k \quad (k \in \mathbb{R})$$

Diese Differenzialgleichung kann mittels Integration gelöst werden:

$$\int dB(t) = k \cdot \int dt$$

$$B(t) = k \cdot t + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

Die Integrationskonstante  $c$  steht in diesem Fall wegen  $B(0) = k \cdot 0 + c$  für den Bestand zu Beginn der Messung ( $t = 0$ ). Somit erhalten wir das **lineare Wachstumsgesetz**:

$$B(t) = k \cdot t + B(0)$$

### 3.1.3. Lineares Wachstumsgesetz

Das lineare Wachstumsgesetz lautet:  $B(t) = k \cdot t + B(0)$ . Dabei bezeichnet  $B(t)$  den Bestand zum Zeitpunkt  $t$ ,  $k$  den Zuwachs bzw. die Abnahme pro Zeiteinheit und  $B(0)$  den Anfangsbestand.

Die mittlere Änderungsrate  $k$  kann auch als Steigung der linearen Wachstumsfunktion angesehen werden. Während bei  $k > 0$  ein linearer Zuwachs vorliegt, handelt es sich bei  $k < 0$  um eine lineare Abnahme. Allgemein formuliert bestimmt der Wachstumsfaktor  $k$ , ob ein positives bzw. negatives Wachstum oder ein Nullwachstum besteht.

<sup>18</sup> Unter Iteration versteht man eine schrittweise Annäherung an die exakte Lösung eines Rechenproblems.

Ist bereits zu Beginn der Messung ein gewisser Bestand vorhanden, dann ist  $B(0) \neq 0$  und das Wachstum wird durch eine inhomogene Funktion repräsentiert. Wenn hingegen am Anfang der Messung kein Bestand zu beobachten ist, so spricht man von einer homogenen Funktion. Da kein Anfangsbestand existiert, kann die homogene Funktion mit der folgenden Wachstumsformel beschrieben werden:  $B(t) = k \cdot t$ . Im Gegensatz zum Graphen einer inhomogenen Funktion geht der Graph einer homogenen Funktion durch den Koordinatenursprung  $(0|0)$ .

### 3.1.4. Anwendungen des linearen Wachstumsgesetzes

#### Lineares Wachstum einer Tierpopulation:

Angabe: Eine Tierpopulation mit einem Anfangswert von  $B(0) = 100$  Tiere wachse linear. Nach 3 Jahren hat sie eine Größe von  $B(3) = 160$  Tieren erreicht. Wie lautet das entsprechende Wachstumsgesetz (1 ZE = 1 Jahr)?<sup>19</sup>

Erklärung: Wir suchen eine Funktion der Form  $B(t) = k \cdot t + B(0)$  für eine unbekannte Konstante  $k$ . Da wir den Bestand zu zwei verschiedenen Zeitpunkten gegeben haben, können wir uns die Wachstumskonstante  $k$  mithilfe des Differenzenquotienten  $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B_{n+1} - B_n}{t_{n+1} - t_n}$  ausrechnen.

Lösung:  $k = \frac{160 - 100}{3 - 0} = \frac{60}{3} = 20$  Den Wert des Anfangsbestandes  $B(0)$  können wir aus der Angabe übernehmen. Damit ergibt sich das lineare Wachstumsgesetz  $B(t) = 20 \cdot t + 100$ .

Interpretation: Die Tierpopulation, die zu Beginn der Messung aus 100 Tieren besteht, weist einen jährlichen Zuwachs von 20 Tieren auf.

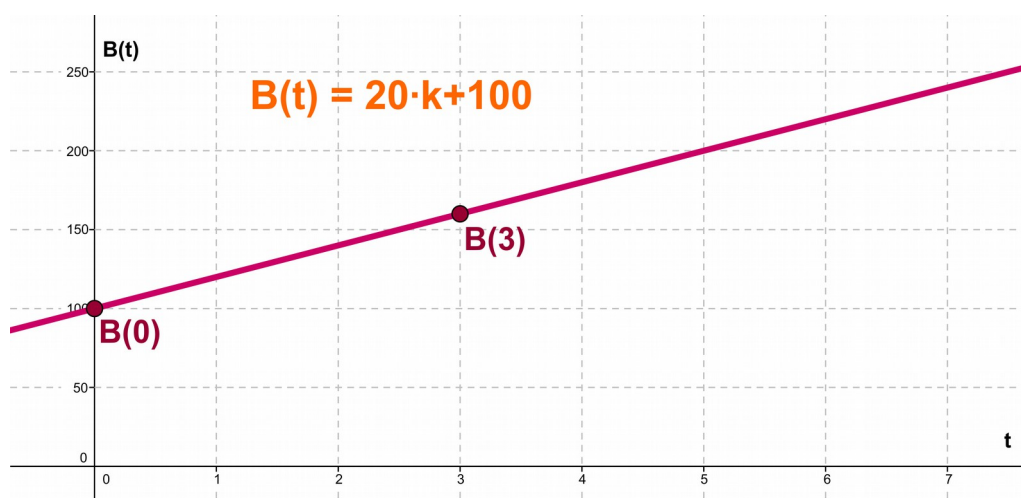


Abbildung 14: lineares Wachstum einer Tierpopulation

<sup>19</sup> entnommen aus: <http://www.math.ch/csf/mathematik/BioMath.pdf> (Seite 7) (zuletzt aufgerufen am 1. 11. 2013)

**Weitere Beispiele<sup>20</sup>:**

Hier werde ich nur kurz einige Beispiele für Wachstumsprozesse auflisten, welche mit Hilfe des linearen Modells modelliert werden können:

- einfache Verzinsung
- Handytarife von Wertkartenhandys
- zurückgelegter Weg bei gleichbleibender Geschwindigkeit
- Befüllen bzw. Leeren eines Schwimmbeckens
- Alkoholabbau im Blut
- wöchentlicher Erhalt des Taschengeldes
- Haarwachstum

**3.1.5. Kritik am linearen Wachstumsmodell anhand eines realen Beispiels**

Die Tabelle von Carlson<sup>21</sup> gibt Auskunft über das Wachstum einer Hefekultur. Es ist zu erkennen, wie viel Hefe (in mg) nach einer gewissen Zeit (in Stunden) produziert worden ist. Anhand dieser realistischen Datenmenge werde ich sowohl das lineare Wachstumsmodell, als auch alle anderen Wachstumsmodelle, die ich in den folgenden Kapiteln noch behandeln werde, genau analysieren und Kritik an ihnen üben.

**Tab. 1:** Wachstum einer Hefekultur (Carlson 1913)

Zeit t (in Std.)	Hefemenge N(t) (in mg)	Zeit t (in Std.)	Hefemenge N(t) (in mg)
0	9,6	10	513,3
1	18,3	11	559,7
2	29,0	12	594,8
3	47,2	13	629,4
4	71,1	14	640,8
5	119,1	15	651,1
6	174,6	16	655,9
7	257,3	17	659,6
8	350,7	18	661,8
9	441,0	Quelle: Krebs 1972, S.218	

**Abbildung 15: Wachstum einer Hefekultur**

20 Mehr Anwendungsbeispiele zum linearen Wachstumsmodell findet man unter: <http://www.besseresbuch.at/index-Dateien/MatheFit3Material/MatheFit3WZ/15-Wachstumsprozesse.pdf> (zuletzt aufgerufen am 2. 11. 2013)

21 entnommen aus: <http://www.fvss.de/assets/media/jahresarbeiten/mathe/logistik.pdf> (Seite 7) (zuletzt aufgerufen am 1. 11. 2013)

Mithilfe von GeoGebra lässt sich ein lineares Wachstumsmodell erstellen, das am besten zu den gegebenen Daten des Hefekulturwachstums passt. Die Abbildung 16 zeigt sowohl den realen Wachstumsvorgang der Hefekultur, als auch das an die gegebenen Daten approximierende lineare Wachstumsmodell. Die Übereinstimmung der realen Daten mit der approximierten Funktion kann man auf GeoGebra mithilfe des Befehls **RQuadrat** überprüfen (siehe Kapitel 6.5.).

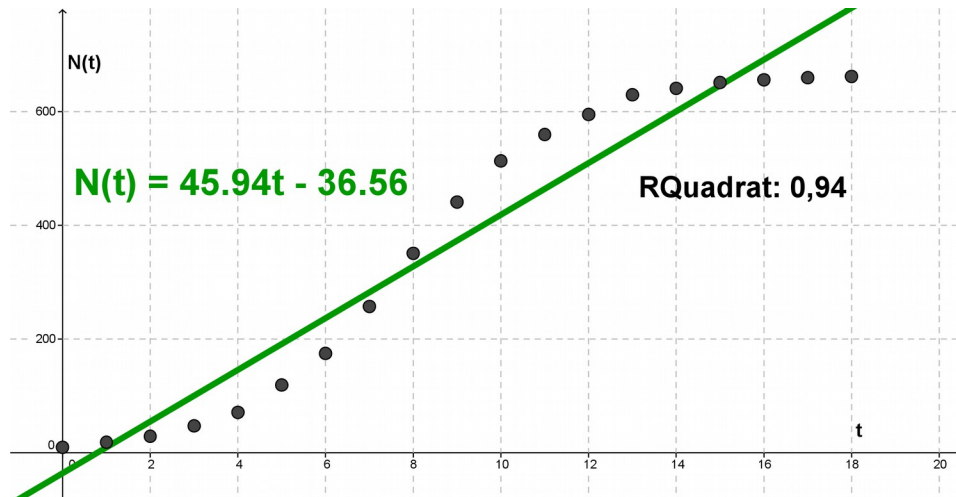


Abbildung 16: Hefekultur - lineares Wachstumsmodell

Das approximierende lineare Wachstumsmodell mit der Wachstumsformel  $N(t) = 45.94 \cdot t - 36.56$  weist in Bezug auf die Realität einige Mängel auf.

Bei genauer Betrachtung der Wachstumsfunktion bzw. des Funktionsgraphen kann man erkennen, dass die Gewichtseinheit der Hefemenge einen negativen Wert besitzt. Bezogen auf rein theoretische oder mathematische Aspekte stellt diese Tatsache kein Problem dar, aber in der Realität existiert keine negative Gewichtseinheit – entweder ist ein Bestand vorhanden oder nicht.

Da die Wachstumskonstante  $k$  einen positiven Wert aufweist, spricht man von einem positiven linearen Wachstum. Anhand der Abbildung 16 kann man gut erkennen, dass es sich beim besagten Wachstumsmodell um ein unbegrenztes Wachstum handelt, das heißt, das Wachstum dauert bis ins Unendliche an. Wie bereits in Kapitel 2.3. erwähnt, unterliegen aber prinzipiell alle realen Wachstumsvorgänge einer Beschränkung, da die Ressourcen nicht in Übermaßen vorliegen.

Einen weiteren Mangel stellt die kontinuierliche und gleichmäßige Wachstumsgeschwindigkeit dar. In der Realität wird man kaum einen biologischen Wachstumsprozess finden, der so regelmäßig abläuft wie es die theoretische, lineare Wachstumsfunktion vorgibt. Deshalb zeichnet sich das lineare Wachstumsmodell auch durch relativ große Abweichungen zu realen Vorgängen aus.

Lineare Zusammenhänge kommen in der Biologie zwar nur sehr selten vor, aber in manchen Bereichen liefern sie dennoch gute erste Approximationen für nichtlineare Zusammenhänge.

## 3.2. Exponentielles Wachstum

### 3.2.1. Eigenschaften von Exponentialfunktionen

Das positive bzw. negative Wachstum eines Bestandes trägt die Bezeichnung **exponentiell** oder **unbegrenzt**, wenn sich der Wachstumsprozess durch eine Exponentialfunktion beschreiben lässt.

Ein exponentielles Wachstum erkennt man daran, dass sich der Bestand pro Zeiteinheit nicht wie bei der linearen Wachstumsfunktion um einen festen Wert ändert, sondern um einen festen Prozentsatz. Grundlage des exponentiellen Wachstumsmodells ist daher die Annahme, dass sich die Bestandsänderung pro Zeiteinheit proportional zur aktuellen Populationsgröße verhält. Allgemein formuliert bedeutet das: Gleiche Zunahme der Argumente (x-Werte) bewirkt stets eine Erhöhung bzw. Verminderung der Funktionswerte (y-Werte) um den gleichen Prozentsatz vom jeweiligen Ausgangswert. Für eine exponentielle Wachstumsfunktion mit  $B(t) = B(0) \cdot e^{\lambda \cdot t}$  gilt demnach:  $B(t+1) = B(t) \cdot e^{\lambda}$

Die Wachstumsrate  $\frac{\Delta B}{B_n} = \frac{B_{n+1} - B_n}{B_n}$  setzt die Änderung des Bestandes mit dem Anfangsbestand in Beziehung. Beim exponentiellen Wachstumsmodell ist die relative Änderung in gleichen Zeiträumen konstant. Die Modellidee soll in Abbildung 17 veranschaulicht werden.

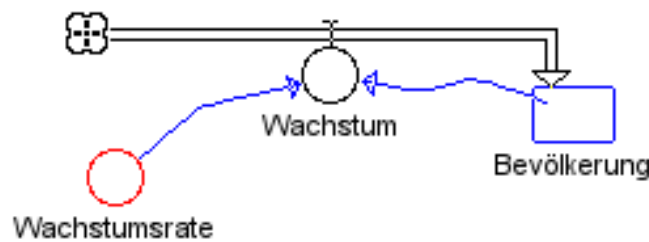


Abbildung 17: Flussdiagramm - exponentielles Wachstum

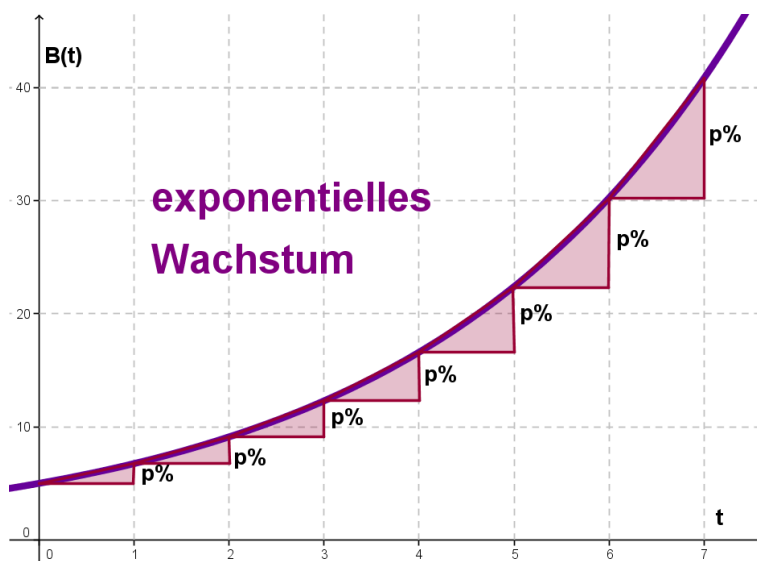


Abbildung 18: exponentielles Wachstum

### 3.2.2. Herleitung des exponentiellen Wachstumsgesetzes

Nach den obigen Überlegungen wissen wir, dass die relative Änderung konstant ist:

$$\frac{B_{n+1} - B_n}{B_n} = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Mithilfe von Äquivalenzumformungen wird  $B_{n+1}$  explizit gemacht:

$$\begin{aligned} B_{n+1} - B_n &= B_n \cdot \lambda \\ B_{n+1} &= B_n + B_n \cdot \lambda \end{aligned}$$

Durch eine kleine Vereinfachung erhalten wir folgende Iterationsformel:

$$B_{n+1} = B_n \cdot (1 + \lambda)$$

Mittels dieser Formel können wir die Bestände zu den einzelnen Zeitpunkten berechnen. Daraus lässt sich auf folgende Formel für die Berechnung des Bestandes zum Zeitpunkt  $t$  schließen:

$$B_n = B_0 \cdot (1 + \lambda)^n$$

Die aufgestellte Formel beschreibt einen diskontinuierlichen Vorgang. Da wir auch beim exponentiellen Wachstum eine kontinuierliche Veränderung annehmen können, betrachten wir deshalb das kontinuierliche Modell für diesen Wachstumsprozess. Für die momentane Zuwachs- bzw. Abnahmerate gilt hier analog zu den vorherigen Rechenschritten:

$$\frac{dB(t)}{dt} = \lambda \cdot B(t)$$

Unter der Voraussetzung, dass  $B(t) > 0$  gilt, wird die Differenzialgleichung für die momentane Änderung umgeformt und im Anschluss mittels Integration gelöst:

$$\begin{aligned} \int \frac{dB(t)}{B(t)} dt &= \lambda \cdot dt \\ \ln|B(t)| &= \lambda \cdot t + c \\ B(t) &= e^{\lambda \cdot t + c} = e^c \cdot e^{\lambda \cdot t} \end{aligned}$$

Wegen  $B(0) = e^c \cdot e^{\lambda \cdot 0} = e^c \cdot e^0 = e^c$  ist die Konstante  $e^c$  in diesem Fall nichts anderes als der Bestand zu Beginn der Messung ( $t = 0$ ). Das **exponentielle Wachstumsgesetz** sieht somit folgendermaßen aus:

$$B(t) = B(0) \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

### 3.2.3. Exponentielles Wachstumsgesetz

Das exponentielle Wachstumsgesetz lautet:  $B(t) = B(0) \cdot e^{\lambda \cdot t}$ . Dabei ist  $B(t)$  der Bestand zum Zeitpunkt  $t$ ,  $B(0)$  der Anfangsbestand und  $\lambda$  die Wachstums- bzw. Zerfallskonstante.



Charakteristisch für den exponentiellen Vorgang ist der Exponent  $\lambda$ . Dieser gibt die Wachstums- konstante beim exponentiellen Wachstum bzw. die Zerfallskonstante bei der exponentiellen Ab- nahme an. Wenn  $\lambda$  einen positiven Wert annimmt, dann liegt eine exponentielle Zunahme vor. Zeichnet sich  $\lambda$  hingegen durch einen negativen Wert aus, so handelt es sich um eine exponen- tielle Abnahme. Analog zum Wachstumsfaktor  $k$  beim linearen Modell determiniert die Wachs- tumskonstante  $\lambda$  beim exponentiellen Modell das Aussehen der Wachstumsfunktion.

Ein weiteres Charakteristikum der Exponentialfunktion ist ihr progressiver Verlauf, den ich bereits in Kapitel 2.3. erläutere und graphisch dargestellt habe.

Beim exponentiellen Wachstumsmodell spielen die Verdoppelungs- und die Halbwertszeit eine zentrale Rolle. Sie werden wie folgt hergeleitet:

### Verdoppelungszeit

...ist die Zeit, in welcher ein gewisser Bestand auf seine doppelte Menge anwächst.

#### **Herleitung:**

$$\begin{aligned} 2 \cdot B(0) &= B(0) \cdot e^{\lambda \cdot t} \\ 2 &= e^{\lambda \cdot t} \\ \ln 2 &= \lambda \cdot t \\ t &= \frac{\ln 2}{\lambda} \end{aligned}$$

### Halbwertszeit

...ist die Zeit, in welcher ein gewisser Bestand auf die Hälfte abfällt.

#### **Herleitung:**

$$\begin{aligned} 0,5 \cdot B(0) &= B(0) \cdot e^{\lambda \cdot t} \\ 0,5 &= e^{\lambda \cdot t} \\ \ln 0,5 &= \lambda \cdot t \\ t &= \frac{\ln 0,5}{\lambda} \end{aligned}$$

In der Formel der Verdoppelungs- bzw. Halbwertszeit wird eine interessante Eigenschaft der exponentiellen Wachstumsfunktion ersichtlich. Die Zeitspanne zum Verdoppeln bzw. Halbieren der Wachstumsgröße ist unabhängig von der erreichten Größe des Bestandes immer konstant. Weiters kann man feststellen, dass die Verdoppelungs- bzw. Halbwertszeit mit zunehmendem exponentiellen Faktor kleiner wird.

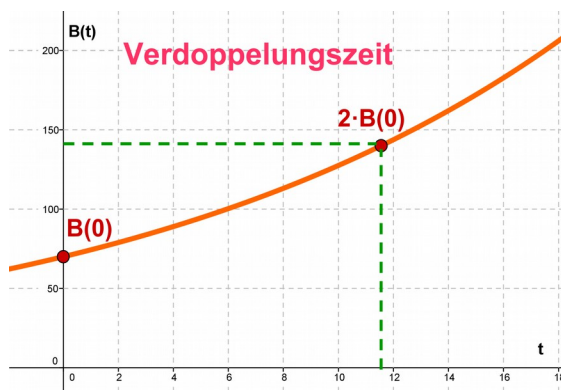


Abbildung 19: Verdoppelungszeit

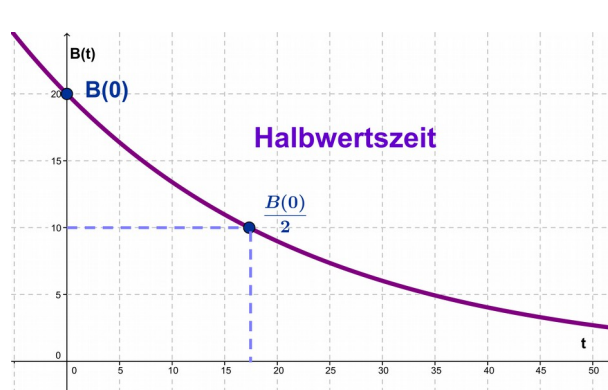


Abbildung 20: Halbwertszeit

### 3.2.4. Anwendungen des exponentiellen Wachstumsgesetzes

#### Exponentielles Wachstum einer Virenkultur

Angabe: Ein Organismus wird von Viren befallen, die sich exponentiell vermehren. Während jeder Stunde wächst ihre Anzahl um 7 Prozent. Auf welchen Wert wächst der Bestand von 2000 Viren in 4 Stunden? Nach wie vielen Stunden weist die Virenkultur 10 000 Viren auf?<sup>22</sup>

Erklärung: Da 7% dasselbe ist wie 0,07, wächst die Zahl der Viren während jeder Stunde um den Wachstumsfaktor  $1 + 0,07 = 1,07$ .

**1. Frage:** Wir suchen den Bestand, auf den eine Virenpopulation innerhalb von 4 Stunden angewachsen ist. Da wir sowohl den Anfangsbestand  $B(0)$ , als auch eine Zeit  $t$  gegeben haben, können wir ohne Weiteres durch Äquivalenzumformungen den Bestand  $B(4)$  ermitteln.

**2. Frage:** Hier ist die Stundenanzahl gefragt, nach der die Virenkultur auf bereits 10 000 Viren angewachsen ist. Da wir sowohl den Anfangsbestand  $B(0)$ , als auch den Endbestand gegeben haben, können wir auch hier problemlos durch Äquivalenzumformungen die Zeit  $t$  ausrechnen.

Lösung:

**1. Frage:**  $B(4) = 2000 \cdot e^{0,07 \cdot 4} = 2646,259625... \sim 2646$

**2. Frage:**  $10000 = 2000 \cdot e^{0,07 \cdot t}$

$$\ln 10000 = \ln 2000 + 0,07 \cdot t$$

$$t = \frac{\ln 10000 - \ln 2000}{0,07}$$

$$t = 22,99197018... \sim 23$$

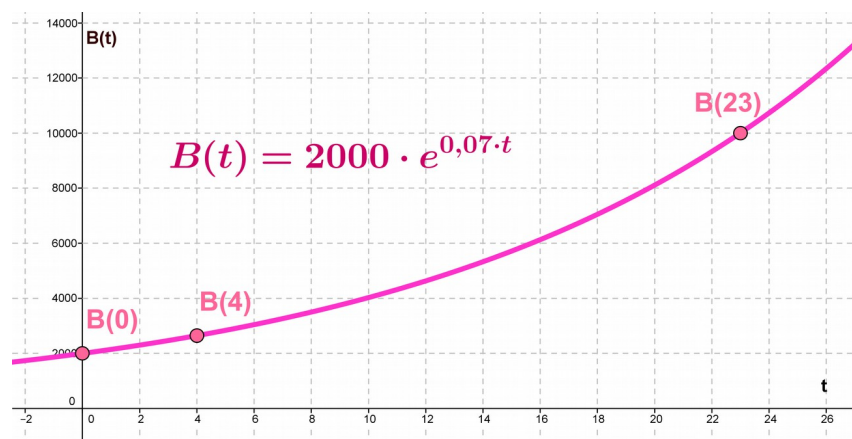


Abbildung 21: exponentielles Wachstum einer Virenkultur

Interpretation: Nach 4 Stunden ist der Bestand von 2000 Viren auf ungefähr 2646 Viren angewachsen. Nach ungefähr 23 Stunden weist die Virenkultur 10 000 Viren auf.

<sup>22</sup> Anregungen entnommen aus: [http://www.mathe-online.at/mathint/log/i\\_Wachstum.html](http://www.mathe-online.at/mathint/log/i_Wachstum.html) (zuletzt aufgerufen am 2. 11. 2013)  
[http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/efkt\\_01\\_02.htm#abs3](http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/efkt_01_02.htm#abs3) (zuletzt aufgerufen am 2. 11. 13)

**Weitere Beispiele<sup>23</sup>:**

Im Folgenden werde ich wieder nur schlagwortartig einige Beispiele für Wachstumsprozesse, die mithilfe des exponentiellen Modells modelliert werden können, nennen:

- Wachstum von Populationen wie Bakterien, Viren, Wasserpflanzen,...
- Wachstum durch Zellteilung
- Bevölkerungswachstum
- Radioaktiver Zerfall
- Anwachsen von Kapital bzw. Schulden durch Zinsen und Zinseszinsen

**3.2.5. Kritik am exponentiellen Wachstumsmodell anhand eines realen Beispiels**

Analog zu Kapitel 3.1.5. werde ich hier das exponentielle Wachstumsmodell anhand des realen Hefekulturwachstums genau analysieren und es kritisch beleuchten.

Die Abbildung 22 stellt sowohl den realen Wachstumsvorgang der Hefekultur, als auch das an die gegebenen Daten approximiertere exponentielle Wachstumsmodell graphisch dar.

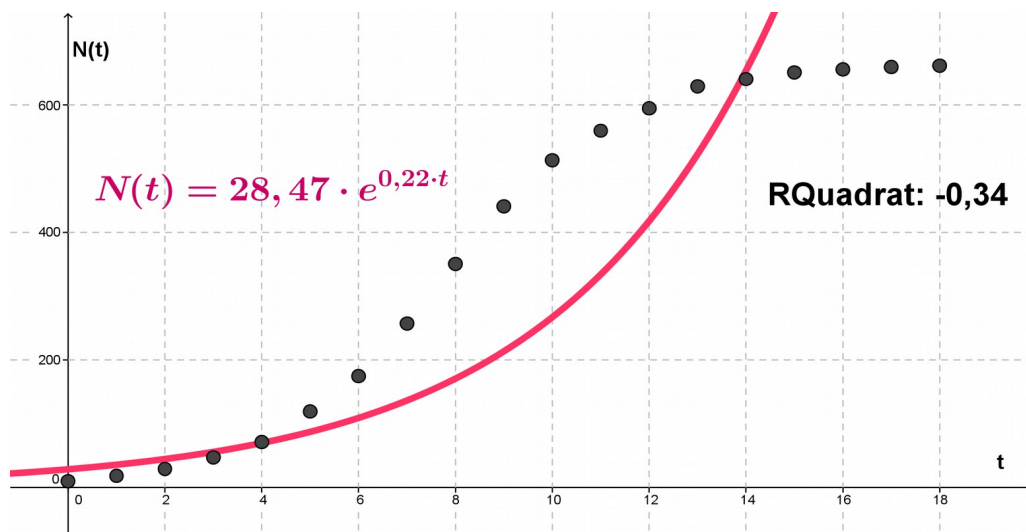


Abbildung 22: Hefekultur - exponentielles Wachstumsmodell

Im Allgemeinen tritt häufig eine gewisse Diskrepanz zwischen realem biologischen Wachstum und einem theoretischen Wachstumsmodell auf. Diese Tatsache trifft auch auf das exponentielle Wachstumsmodell mit der Wachstumsformel  $N(t) = 28,47 \cdot e^{0,22 \cdot t}$  zu, die ich mithilfe von GeoGebra bestmöglich an die Wachstumsfunktion des Hefekulturwachstums approximiert habe.

<sup>23</sup> Interessierte finden unter <http://www.serlo.org/math/exercises/topics/show/Analysis/exponentielles-Wachstum> (zuletzt aufgerufen am 3. 11. 2013) mehr Anwendungsbeispiele zum Thema exponentielle Wachstumsvorgänge.

Der negative Wert, den der Befehl **RQuadrat**<sup>24</sup> liefert, deutet darauf hin, dass das exponentielle Wachstumsmodell nicht für die Modellierung des Hefekulturwachstums herangezogen werden sollte, da die Diskrepanz zwischen den realen Daten und der approximierten Funktion zu groß ist.

Genauso wie die lineare Funktion modelliert auch die exponentielle Funktion einen unbegrenzten bzw. unbeschränkten Wachstumsprozess. Wie in der Abbildung 22 ersichtlich ist, wachsen Hefekulturen, aber auch unzählige andere Populationen unterschiedlicher Art im Anfangsstadium tatsächlich annähernd exponentiell. Aber zu einem gewissen Zeitpunkt schlägt dieses progressive Wachstum in ein degressives Wachstum um. Diese Wende der Wachstumsbeschleunigung ist auf unterschiedliche Gründe zurückzuführen. Wird etwa der Nährboden, auf dem die Mikroorganismen gezüchtet werden, nicht ständig erneuert bzw. wird diesen Kleinstlebewesen nicht genügend Platz bereitgestellt, dann erfährt das Wachstum eine immer stärker werdende Hemmung. Aber auch wenn optimale Wachstumsbedingungen für die Mikroorganismen geschaffen und gewährleistet werden, kommt es aufgrund des Effektes der Intoxikation<sup>25</sup> zu einer sukzessiven Abnahme der Wachstumsgeschwindigkeit.

Prinzipiell erscheint das exponentielle Wachstumsmodell wegen seines unbegrenzten Verlaufes etwas realitätsfern. Als langfristiger Trend widerspricht das exponentielle Wachstum sogar der Realität, da keinerlei wachstumshemmende Faktoren in den Prozess miteinberechnet werden.

Mit Blick auf Untersuchungen von Wachstumsprozessen lässt sich ableiten, dass ein exponentieller Verlauf eher typisch für das Anfangsstadium eines Mikroorganismenwachstums ist. Ab einem gewissen Niveau geht das exponentielle Wachstum aber in ein beschränktes Wachstum über, auf das ich in Kapitel 3.3 detaillierter eingehen werde.

Den Verlauf eines realistisch ablaufenden Bakterienwachstums und eine ausführliche Beschreibung der dabei auftretenden Phasen findet man in dem Buch **Der Kampf ums Dasein**<sup>26</sup>, welches von dem italienischen Biologe Umberto d'Ancona<sup>27</sup> verfasst worden ist.

---

24 Den Befehl **RQuadrat** und dessen Aussagekraft werde ich in Kapitel 6.5. näher erläuterten.

25 In diesem Fall versteht man unter Intoxikation (= Vergiftung, Überdosis) die selbstständige Vergiftung der Mikroorganismen durch ihre eigenen Ausscheidungsprodukte.

26 **Der Kampf ums Dasein: eine biologisch-mathematische Darstellung der Lebensgemeinschaften und biologischen Gleichgewichte** (voller Titel); erschien im Jahre 1939

27 \* 9. Mai 1896 in Fiume; † 24. August 1964 in Marina di Ravenna

Nähere Informationen zu Umberto d'Ancona findet man unter: [http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-30348-8123-4\\_6#page-1](http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-30348-8123-4_6#page-1) (zuletzt aufgerufen am 5. 11. 2013)

### 3.3. Beschränktes Wachstum

#### 3.3.1. Eigenschaften von beschränkten Wachstumsfunktionen

Der Vergleich des exponentiellen Wachstums mit realen Bestandsentwicklungen führt zu der Erkenntnis, dass Wachstumsvorgänge in der Natur meistens nur über kurze Zeiträume exponentiell verlaufen. Auf lange Sicht unterliegt das biologische Wachstum prinzipiell einer gewissen Beschränkung. Verschiedene externe Einflüsse wie ein mangelndes Nahrungsangebot oder ein begrenzter Lebensraum bilden für den anwachsenden Bestand  $B(t)$  eine natürliche Grenze  $G$ , die nicht überschritten werden kann. In diesem Fall spricht man von **beschränktem** bzw. **begrenztem** Wachstum. Das dementsprechende mathematische Wachstumsmodell beschreibt die biologischen Entwicklungsprozesse realitätsnaher als das lineare und exponentielle Wachstumsmodell.

Das beschränkte Wachstum zeichnet sich durch eine sogenannte Kapazitätsgrenze  $G$  aus. Diese natürliche Schranke stellt jenen Bestand  $B(t)$  dar, der bei vorherrschenden Umweltbedingungen maximal möglich ist. Laut Naturgesetz wird die Kapazitätsgrenze  $G$  prinzipiell nicht überschritten. Es findet vielmehr eine schrittweise Annäherung der Populationsgröße an diesen maximal erreichbaren Wert statt. Bei dieser sukzessiven Annäherung lässt sich ein bestimmter Trend erkennen: Je mehr sich der momentane Bestand  $B(t)$  der Kapazitätsgrenze  $G$  annähert, desto geringer ist der Zuwachs pro Zeitintervall. Dieser Zusammenhang führt zu der Annahme, dass die Änderung der Populationsgröße proportional zur Differenz aus Bestand und Grenzwert, die die Bezeichnungen Freiraum, Restkapazität oder Sättigungsmanko trägt, ist:  $\frac{dB(t)}{dt} = k \cdot (G - B_n)$

Die Kapazitätsgrenze kann am besten mit einer monotonen linearen Funktion modelliert werden. Diese verläuft immer parallel zur x-Achse und fungiert als Asymptote<sup>28</sup> für den Funktionsgraphen  $B(t)$ . Das folgende Flussdiagramm und die Abbildung 24 stellen die Modellidee graphisch dar und erleichtern somit hoffentlich das Verstehen des beschränkten Wachstums.

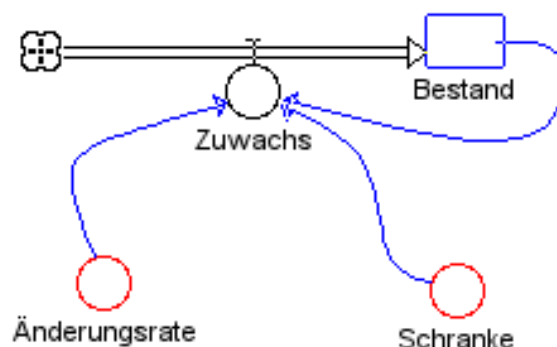


Abbildung 23: Flussdiagramm - beschränktes Wachstum

<sup>28</sup> Die Asymptote ist eine Kurve oder Gerade, an die sich der Graph einer Funktion im Unendlichen immer mehr annähert, ohne sie zu berühren oder zu schneiden.

siehe: <http://www.serlo.org/math/wiki/article/view/asymptote> (zuletzt aufgerufen am 9. 11. 2013)

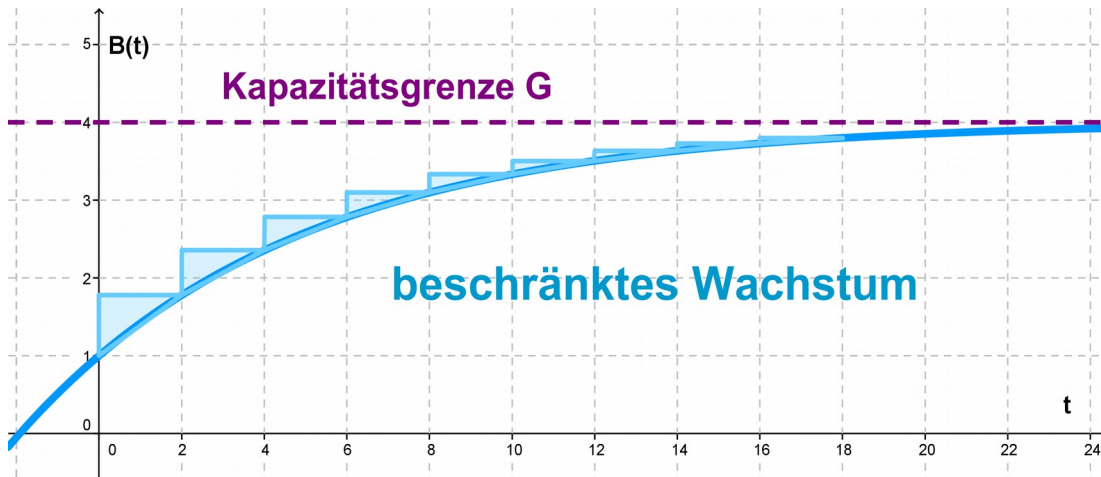


Abbildung 24: beschränktes Wachstum

### 3.3.2. Herleitung des beschränkten Wachstumsgesetzes

Wie bereits in Kapitel 3.3.1. beschrieben, verhält sich die Änderung der Populationsgröße proportional zur Differenz aus Bestand und Grenzwert. Dadurch wird sichergestellt, dass die Wachstumsgeschwindigkeit  $B'(t)$  mit der Restkapazität  $M(t) = (G - B_n)$  abnimmt. Für das diskrete Modell gilt also:

$$B_{n+1} - B_n = k \cdot (G - B_n)$$

$$(k = k_{\text{konst}} \in \mathbb{R}) \quad (G > 0)$$

Da die Bestandsentwicklung kontinuierlich vor sich geht, betrachten wir nun im kontinuierlichen Modell die Zuwachs- bzw. Abnahmegeschwindigkeit in Form der mittleren Änderungsrate  $\frac{dB(t)}{dt}$ :

$$\frac{dB(t)}{dt} = k \cdot (G - B(t))$$

Der nächste Schritt besteht in der Durchführung von einigen wenigen Äquivalenzumformungen:

$$\frac{dB(t)}{G - B(t)} = k \cdot dt$$

Anschließend wird die Differenzialgleichung mittels Integration<sup>29</sup> gelöst:

$$\int \frac{dB(t)}{G - B(t)} = \int k \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{G - B(t)} \cdot dB(t) = \int k \cdot dt$$

$$-\ln(G - B(t)) = k \cdot t + c$$

<sup>29</sup> Die genaue Definition, eine ausführliche Erklärung der Integrationsregeln und einige Beispiele zum Thema Integralrechnung findet man unter: <http://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung> (zuletzt aufgerufen am 9. 11. 2013)

Das negative Vorzeichen auf der linken Seite der Gleichung rührt daher, dass die Ableitung von  $\ln(G-B(t))$  gleich  $\frac{1}{G-B(t)} \cdot (-1)$  ist. Die Zahl  $(-1)$  stammt von der inneren Ableitung des Terms  $G-B(t)$  nach  $B(t)$ . Dieses  $(-1)$  wird auf folgende Weise ausgeglichen:

$$-\ln(G-B(t)) = k \cdot t + c$$

Da wir kein negatives Vorzeichen vor dem natürlichen Logarithmus haben wollen, multiplizieren wir die gesamte Gleichung mit  $(-1)$ :

$$\ln(G-B(t)) = -k \cdot t - c$$

Laut den Logarithmusrechenregeln<sup>30</sup> können wir den natürlichen Logarithmus eliminieren, indem wir beide Seiten der Gleichung als Exponenten zur Basis der Eulerschen Zahl  $e$  schreiben:

$$e^{\ln(G-B(t))} = e^{-k \cdot t - c}$$

$$G-B(t) = e^{-k \cdot t - c}$$

Diese soeben erstellte Gleichung kann man unter Anwendung einer bestimmten Logarithmusrechenregel nochmals vereinfachen:

$$G-B(t) = e^{-k \cdot t} \cdot C$$

mit  $C = e^{-c}$

Um die Unbekannte  $C$  näher zu bestimmen, setzen wir in der Gleichung  $G-B(t) = e^{-k \cdot t} \cdot C$  für den Zeitpunkt  $t$  die Zahl  $0$  ein:

$$G-B(0) = e^{-k \cdot 0} \cdot C$$

$$G-B(0) = e^0 \cdot C$$

$$G-B(0) = C$$

In die Gleichung  $G-B(t) = e^{-k \cdot t} \cdot C$  wird nun der errechnete Wert für  $C$  eingesetzt:

$$G-B(t) = e^{-k \cdot t} \cdot (G-B(0))$$

Als letzten Schritt explizieren wir  $B(t)$ . Somit lautet das **beschränkte Wachstumsgesetz** folgendermaßen:

$$-B(t) = -G + (G-B(0)) \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$B(t) = G - (G-B(0)) \cdot e^{-k \cdot t}$$

### 3.3.3. Beschränktes Wachstumsgesetz

Das beschränkte Wachstumsgesetz ist durch die Funktion  $B(t) = G - (G-B(0)) \cdot e^{-k \cdot t}$  definiert. Dabei bezeichnet  $B(t)$  den Bestand zum Zeitpunkt  $t$ ,  $G$  die natürliche Grenze und  $(G-B(0))$  die Restkapazität, die mit einer bestimmten von der Zeit abhängigen Größe  $e^{-k \cdot t}$  verbunden ist.

<sup>30</sup> Interessierte können sich zum Thema Logarithmus und Logarithmusrechenregeln mehr Informationen einholen unter: <http://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmus> (zuletzt aufgerufen am 10. 11. 2013)  
<http://lp.uni-goettingen.de/get/text/4923> (zuletzt aufgerufen am 10. 11. 2013)



Wie bereits erwähnt ist die natürliche Kapazitätsgrenze  $G$  ein zentrales Merkmal des beschränkten Wachstums. Mit zunehmender Zeit  $t$  nähert sich der Bestand  $B(t)$  immer mehr diesem Maximalwert. Präziser ausgedrückt bedeutet das, dass die Wachstumsgeschwindigkeit  $B(t)'$  des Bestandes bei immer kleiner werdendem Sättigungsmanko  $(G - B(t))$  gegen Null strebt. Der Restbestand selbst, der den Fehlbetrag bis zum Erreichen der natürlichen Schranke angibt, zeichnet sich durch eine exponentielle Abnahme aus. Wie man aus der Formel des beschränkten Wachstumsgesetzes  $B(t) = G - (G - B(0)) \cdot e^{-k \cdot t}$  entnehmen kann, ergibt sich der Bestand wiederum aus der Differenz zwischen Kapazitätsgrenze und Sättigungsmanko. An dieser Stelle möchte ich auf die Abbildung 24 (Seite 34) verweisen, denn meiner Meinung nach kann das soeben Gesagte am besten durch das Betrachten eines graphischen Wachstumsmodells nachvollzogen werden.

Wie bei jedem mathematischen Wachstumsmodell gibt es auch beim beschränkten Wachstum eine Wachstumskonstante  $k$ . Analog zum linearen und exponentiellen Wachstumsmodell gilt hier folgender Zusammenhang: Je größer der Wert der Wachstumskonstante  $k$  ist, desto steiler verläuft der Graph der Wachstumsfunktion. Im Falle des beschränkten Wachstums muss man aber auch die natürliche Schranke miteinbeziehen. Logischerweise nähert sich eine Wachstumsfunktion mit großer Wachstumskonstante schneller dieser Kapazitätsgrenze als eine Funktion mit kleiner Wachstumskonstante. Erstere scheint die besagte Grenze zu einem früheren Zeitpunkt zu erreichen als letztere.

Ein weiteres Charakteristikum des beschränkten Wachstums ist ihr degressiver Verlauf, den ich bereits in Kapitel 2.3. erläutert und graphisch dargestellt habe.

Da in der Natur nach oben beschränkte Wachstumsprozesse relativ häufig vorkommen, habe ich mich bis jetzt nur auf diese Art des beschränkten Wachstums fokussiert. Natürlich gibt es auch nach unten beschränkte Wachstumsvorgänge. Darunter kann man sich einen Abnahmeprozess vorstellen, der durch eine untere Kapazitätsgrenze im wahrsten Sinne des Wortes gestoppt wird.

**nach oben beschränktes Wachstum**

$$B(t) = G - (G - B(0)) \cdot e^{-k \cdot t} \quad \text{mit } G > B$$

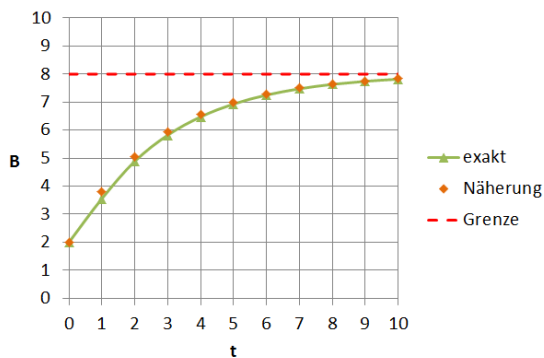


Abbildung 26: nach oben beschränktes W.

**nach unten beschränkte Abnahme**

$$B(t) = G + (B(0) - G) \cdot e^{-k \cdot t} \quad \text{mit } G < B$$

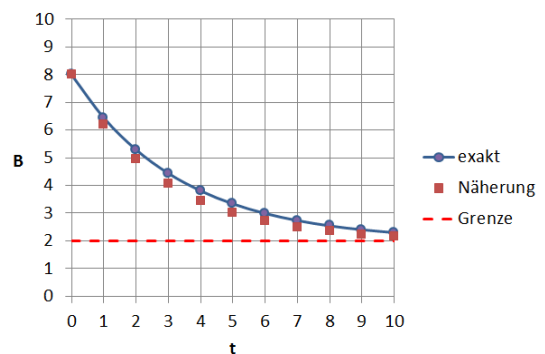


Abbildung 25: nach unten beschränkte A.



### 3.3.4. Anwendungen des beschränkten Wachstumsgesetzes

#### Marktsättigung

Angabe: Ein Unternehmen will in einer Stadt ein neues Küchengerät, das noch in keinem Haushalt vorhanden ist, einführen. Zunächst wird in einem Stadtteil mit 2000 Haushalten ein Testverkauf vorgenommen. Nach einer Woche sind bereits 363 Geräte verkauft worden. Stelle für den Verkauf der Küchengeräte ein beschränktes Wachstumsmodell auf!<sup>31</sup>

Erklärung: Der Vertrieb der neuen Geräte kann am besten als beschränktes Wachstum modelliert werden, da der anfängliche Testverkauf auf 2000 Haushalte begrenzt wird. Es können maximal 2000 Haushalte das Küchengerät erwerben – die Kapazitätsgrenze wird nicht überschritten! Da zu Beginn des Verkaufes, zum Zeitpunkt  $t = 0$ , noch kein Haushalt im Besitz dieses Gerätes ist, gilt  $B(0) = 0$ . Der Sättigungswert entspricht wie schon gesagt der Anzahl der Haushalte. Die Wachstumskonstante  $k$  ergibt sich aus der Anzahl der nach 1 Woche verkauften Küchengeräte.

Lösung:  $B(t) = G - (G - B(0)) \cdot e^{-k \cdot t}$       $B(1) = 363$

$$363 = 2000 - (2000 - 0) \cdot e^{-k \cdot 1}$$

$$363 = 2000 - 2000 \cdot e^{-k}$$

$$-1637 = -2000 \cdot e^{-k}$$

$$\frac{1637}{2000} = e^{-k}$$

$$k = -\ln\left(\frac{1637}{2000}\right)$$

$$k = 0,200281882... \sim 0,200$$

$$B(t) = 2000 - 2000 \cdot e^{-0,200 \cdot t}$$

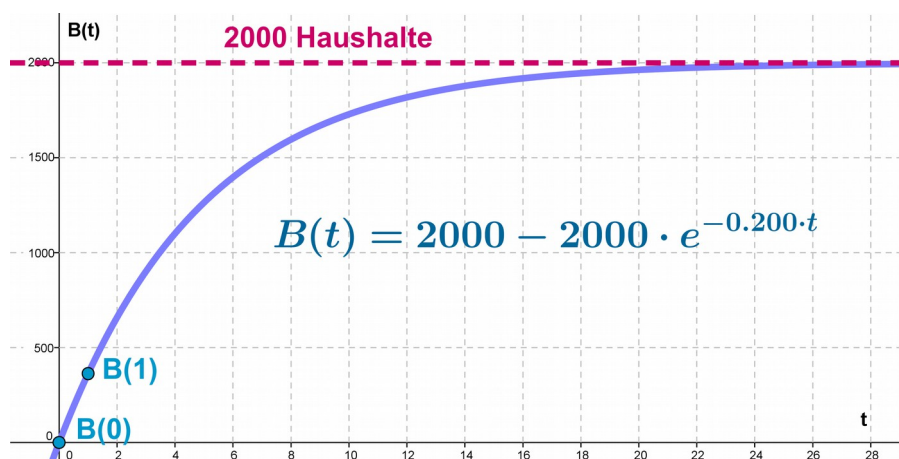


Abbildung 27: beschränktes Wachstum - Marktsättigung

31 entnommen aus: [http://www.dieter-heidorn.de/Mathematik/RP\\_Analysis2/K2\\_Exponentialfunktionen/K9\\_Wachstum/K92\\_begrWachs/K92\\_begrWachs.html](http://www.dieter-heidorn.de/Mathematik/RP_Analysis2/K2_Exponentialfunktionen/K9_Wachstum/K92_begrWachs/K92_begrWachs.html) (zuletzt aufgerufen am 11. 11. 2013)

**Weitere Beispiele<sup>32</sup>:**

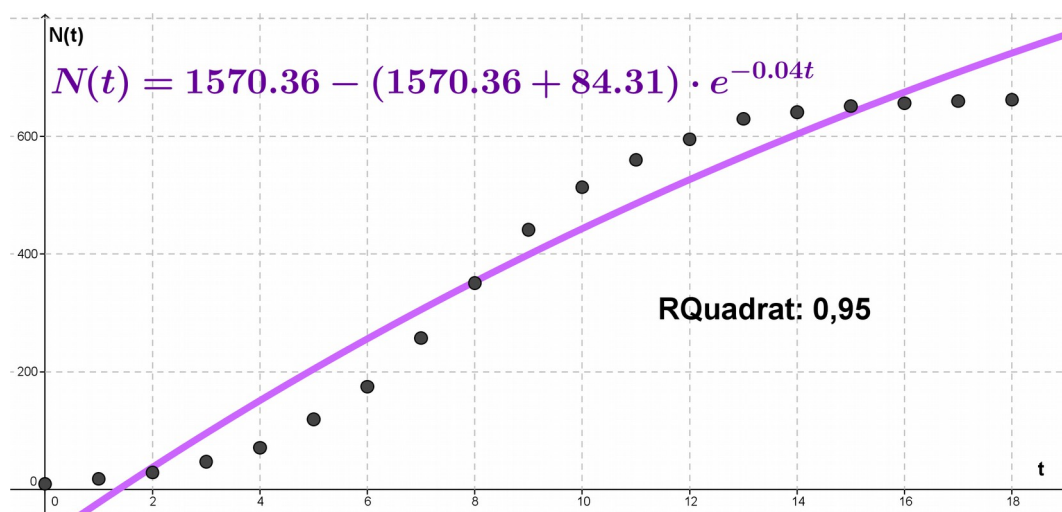
Im Folgenden findet man einige ausgewählte Beispiele, die mithilfe eines beschränkten Wachstumsmodells relativ gut beschrieben werden können:

- Erwärmung eines Kaltgetränkes/Abkühlung eines Heißgetränkes
- Ausbreitung eines Gerüchtes in einer festen Gruppe
- Verkauf von diversen Geräten an einem bestimmten Ort
- Medikamenteneinnahme
- Ausbreitung einer Population in einem begrenzten Raum
- Erlernen von einer gewissen Anzahl an Vokabeln

**3.3.5. Kritik am beschränkten Wachstumsmodell anhand eines realen Beispiels**

Wie ich es auch schon in den Kapiteln 3.1.5. und 3.2.5. praktiziert habe, möchte ich an dieser Stelle das beschränkte Wachstumsmodell analysieren und es einer Kritik unterwerfen.

Die Abbildung 28 erlaubt einen Vergleich des realen Hefekulturwachstums mit dem an die gegebenen Daten approximierten beschränkten Wachstumsmodell.



**Abbildung 28: Hefekultur - beschränktes Wachstumsmodell**

Im Vergleich zu den bereits betrachteten Wachstumsmodellen hat das approximierte beschränkte Wachstumsmodell, das dem Wachstumsgesetz  $N(t) = 1570.36 - (1570.36 + 84.32) \cdot e^{-0.04t}$  folgt, viele Gemeinsamkeiten mit der realen Hefekulturentwicklung.

<sup>32</sup> Mehr Anwendungsbeispiele zum Thema beschränkte Wachstumsvorgänge findet man unter: <http://www.poenitz-net.de/Mathematik/4.Funktionen/4.7.A.Beschaenktes%20Wachstum.pdf> (zuletzt aufgerufen am 30. 11. 2013)

Prinzipiell handelt es sich beim beschränkten Wachstumsmodell um ein relativ sinnvolles mathematisches Modell. Es berücksichtigt nämlich, dass trotz Wachstum eine bestimmte Grenze nicht überschritten werden kann, wodurch es ein sehr realitätsnahes Abbild diverser Wachstumsprozesse liefert und deshalb häufig für Berechnungen verschiedenster Vorgänge herangezogen wird.

Mit dem beschränkten Wachstumsmodell erfüllen wir zwar die Bedingung, dass es langfristig kein unbegrenztes Wachstum geben kann, dafür weist es aber vor allem am Anfang relativ große Abweichungen zu realen Wachstumsvorgängen auf. Bei den meisten biologischen Wachstumsprozessen kann man zu Beginn einen exponentiellen Verlauf feststellen. Im Regelfall schlägt dieses progressive (exponentielle) Wachstum erst nach einer gewissen Zeit in ein degressives (beschränktes) Wachstum um. Demnach liefert das beschränkte Wachstumsmodell oft nur für schon fortgeschrittene Wachstumsentwicklungen eine annähernd genaue Beschreibung.

Einen weiteren Kritikpunkt stellt die negative Gewichtseinheit der Hefemenge zum Zeitpunkt 0 dar. Bezogen auf rein theoretische oder mathematische Aspekte führt diese Tatsache zu keinem Problem, aber in der Realität existieren keine negativen Gewichtseinheiten oder Bestände.

Die Abbildung 28 stellt nur einen kleinen Ausschnitt des an das Hefekulturwachstum approxiierten Modells dar, der keine wirklich relevanten Informationen über den weiteren Wachstumsverlauf gibt. Um einen Gesamtüberblick über das beschränkte Wachstumsmodell zu bekommen, habe ich in der folgenden Abbildung die Maßstäbe verändert. Schon beim ersten Anblick der Abbildung fällt ein weiterer gravierender Mangel auf: Die Kapazitätsgrenze des erstellten Modells liegt bei ungefähr 1570 mg Hefepilzen. Wenn man aber den Graphen des realen Hefekulturwachstums betrachtet, kann man erkennen, dass dessen Kapazitätsgrenze bei nur 663 mg Hefepilzen liegt.

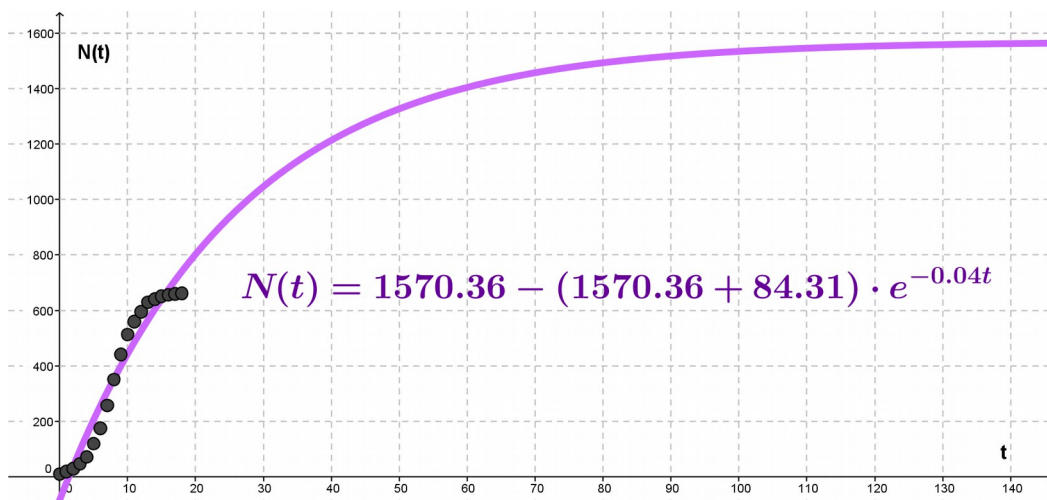


Abbildung 29: Hefekultur - beschränktes Wachstumsmodell (andere Maßstäbe)

## 3.4. Logistisches Wachstum

### 3.4.1. Eigenschaften von logistischen Wachstumsfunktionen

Aufgrund der Endlichkeit der Welt können weder lineare, noch exponentielle Wachstumsprozesse unbegrenzt andauern. Aber auch das in Kapitel 3.3. ausführlich erläuterte beschränkte Wachstumsmodell entspricht nicht immer dem tatsächlichen Wachstum, obwohl es die Grenzen der Natur miteinbezieht. Das logistische Wachstumsmodell, das der Belgier Pierre-Francois Verhulst<sup>33</sup> im Jahre 1837 vorgeschlagen hat, kommt der Realität schon sehr nahe, da es noch mehr Faktoren als das beschränkte Wachstumsmodell berücksichtigt.

Im Allgemeinen ist das logistische Wachstumsmodell eine Kombination aus **exponentiellem** und **beschränktem Wachstum**. Zu Beginn des Wachstumsprozesses zeichnet sich der Verlauf des logistischen Wachstums durch einen geringen absoluten Zuwachs und somit auch durch eine geringe Wachstumsrate aus. Im Laufe der Zeit nimmt die Wachstumsrate immer mehr zu, aber nur solange, bis 50% des Sättigungsmankos erreicht worden sind. In dieser ersten Phase ist das logistische Wachstum dem **exponentiellen Wachstum** sehr ähnlich, da die Kapazitätsgrenze  $G$  noch keine große Rolle spielt. Wenn 50% des Sättigungsmankos erreicht worden sind, sinkt die Wachstumsrate des Bestandes wieder, wobei sie schließlich gegen Null strebt. Charakteristisch ist dabei die mit zunehmender Zeit immer geringer werdende Restkapazität. In dieser zweiten Phase gleicht das logistische Wachstum dem **beschränkten Wachstum**, da die Wachstumsrate im Laufe der Zeit immer mehr sinkt.

Die Änderung der Wachstumsgeschwindigkeit findet im Wendepunkt statt. Im Wendepunkt, in dem gerade die Hälfte der Sättigungsmenge überschritten wird, schlägt deshalb das exponentielle Wachstum in ein beschränktes Wachstum um.

In diesem Wachstumsmodell tritt auf lange Sicht ein stabiles Gleichgewicht ein. Das ist auf die mit steigender Population fallende Wachstumsrate zurückzuführen. Die Modellidee soll in der Abbildung 30 veranschaulicht werden.

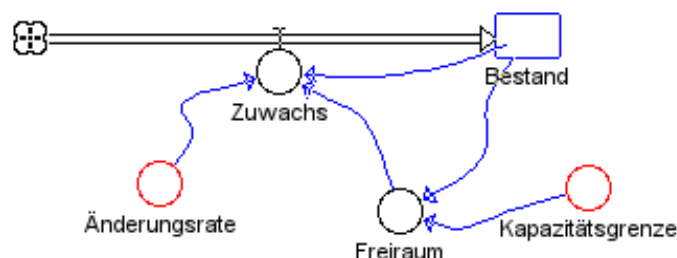


Abbildung 30: Flussdiagramm - logistisches Wachstum

33 \* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15. Februar 1849 in Brüssel

Nähere Informationen zu Pierre-Francois Verhulst findet man unter: [http://de.wikipedia.org/wiki/Pierre-Fran%C3%A7ois\\_Verhulst](http://de.wikipedia.org/wiki/Pierre-Fran%C3%A7ois_Verhulst) (zuletzt aufgerufen am 30. 11. 2013)

Der typische Verlauf einer logistischen Wachstumsfunktion ist der Abbildung 31 zu entnehmen.

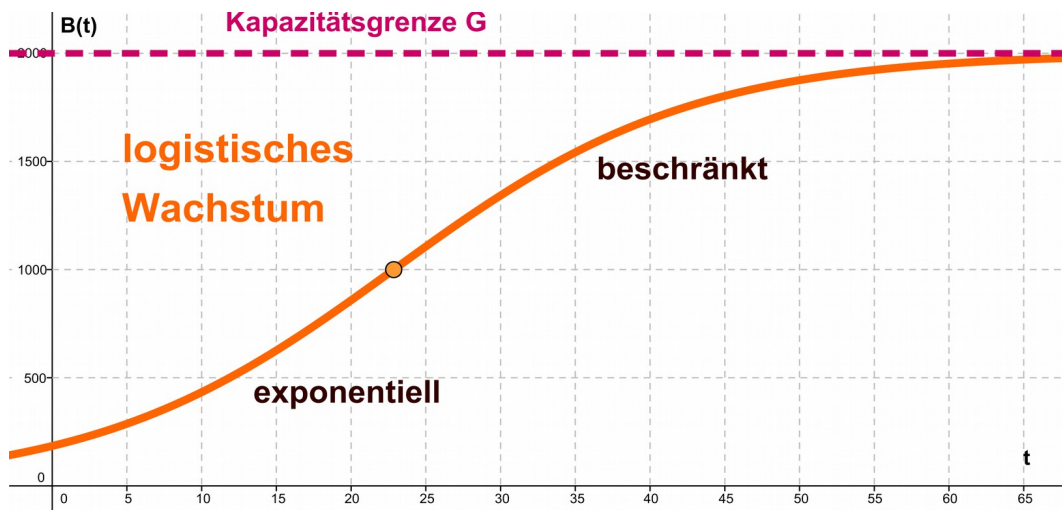


Abbildung 31: logistisches Wachstum

### 3.4.2. Herleitung des logistischen Wachstumsgesetzes

Nach den Überlegungen in Kapitel 3.4.1. wissen wir, dass das logistische Wachstum sowohl Merkmale des exponentiellen, als auch Merkmale des beschränkten Wachstums enthält. Demnach gilt für das diskrete Modell, das nur für einzelne Zeitpunkte definiert ist:

$$B_{n+1} - B_n = k \cdot B_n \cdot (G - B_n) \quad (k \in \mathbb{R})$$

Durch eine Äquivalenzumformung erhalten wir folgende Iterationsformel:

$$B_{n+1} = B_n + k \cdot B_n \cdot (G - B_n)$$

Beim logistischen Wachstumsmodell ist die Zu- bzw. Abnahme sowohl zum momentanen Bestand, als auch zur momentanen Restkapazität proportional<sup>34</sup>. Das kontinuierliche Modell schaut somit wie folgt aus:

$$\frac{dB}{dt} = k \cdot B(t) \cdot (G - B(t)) \quad (k \in \mathbb{R})$$

Damit sich die Differenzialgleichung lösen lässt, wenden wir das Verfahren **Trennung der Variablen** an. Dazu wird die Variable t nach rechts und die Variable B nach links gebracht.

$$\int \frac{1}{B \cdot (G - B)} \cdot dB = \int k \cdot dt$$

34 Der Grund dafür ist die Tatsache, dass im logistischen Modell das exponentielle und das beschränkte Wachstum miteinander verschmolzen werden. Während beim exponentiellen Wachstum die pro Zeiteinheit auftretende Zu- bzw. Abnahme proportional zum momentanen Bestand ( $B'(t) = k \cdot B(t)$ ) ist, ist beim beschränkten Wachstum die Zu- bzw. Abnahme proportional zur momentanen Restkapazität ( $B'(t) = k \cdot (G - B(t))$ ).

Bevor wir die Differenzialgleichung integrieren, zerlegen und vereinfachen wir den Term  $\frac{1}{B \cdot (G-B)}$  mithilfe der sogenannten Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{B \cdot (G-B)} = \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{B} + \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{G-B}$$

Nach der Partialbruchzerlegung sieht die Differenzialgleichung folgendermaßen aus:

$$\int \left( \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{B} + \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{G-B} \right) \cdot dB = \int k \cdot dt$$

Jetzt können wir in der obigen Differenzialgleichung die Integrale aufsplitten und folglich die multiplikativen Konstanten herausheben:

$$\frac{1}{G} \int \frac{1}{B} \cdot dB + \frac{1}{G} \int \frac{1}{G-B} \cdot dB = \int k \cdot dt$$

Diese Gleichung können wir nun integrieren:

$$\frac{1}{G} \ln|B| - \frac{1}{G} \ln|G-B| = k \cdot t + c$$

Durch Äquivalenzumformungen und Anwendung einer Logarithmusrechenregel erhalten wir Folgendes:

$$\ln \left| \frac{B}{G-B} \right| = G \cdot k \cdot t + G \cdot c$$

Die Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten führt zu dieser Gleichung:

$$\left| \frac{B}{G-B} \right| = e^{G \cdot k \cdot t} \cdot e^{G \cdot c}$$

Anschließend bilden wir den Kehrwert und fassen den Ausdruck  $e^{-G \cdot c}$  zur Integrationskonstante C zusammen:

$$\left| \frac{G-B}{B} \right| = e^{-G \cdot k \cdot t} \cdot e^{-G \cdot c} = e^{-G \cdot k \cdot t} \cdot C$$

Die Durchführung einer Kürzung liefert diese Gleichung:

$$\left| \frac{G}{B} - 1 \right| = C \cdot e^{-G \cdot k \cdot t}$$

Um die Unbekannte C näher zu bestimmen, setzen wir in der Gleichung  $\left| \frac{G}{B} - 1 \right| = C \cdot e^{-G \cdot k \cdot t}$  für den Zeitpunkt t die Zahl 0 ein:

$$\left| \frac{G}{B(0)} - 1 \right| = C \cdot e^{-G \cdot k \cdot 0}$$

$$\left| \frac{G}{B(0)} - 1 \right| = C$$

In die Gleichung  $\left| \frac{G}{B} - 1 \right| = C \cdot e^{-G \cdot k \cdot t}$  wird nun der errechnete Wert für C eingesetzt:

$$\left| \frac{G}{B} - 1 \right| = \left| \frac{G}{B(0)} - 1 \right| \cdot e^{-G \cdot k \cdot t}$$

Damit wir das **logistische Wachstumsgesetz** erhalten, explizieren wir als letzten Schritt B(t):

$$\frac{G}{B} = \left( \frac{G}{B(0)} - 1 \right) \cdot e^{-G \cdot k \cdot t} + 1$$

$$G = \left( \left( \frac{G}{B(0)} - 1 \right) \cdot e^{-G \cdot k \cdot t} + 1 \right) \cdot B$$

$$B(t) = \frac{G}{\left( \left( \frac{G}{B(0)} - 1 \right) \cdot e^{-G \cdot k \cdot t} + 1 \right)}$$

### 3.4.3. Logistisches Wachstumsgesetz

Das logistische Wachstumsgesetz ist durch folgende Funktion definiert:  $B(t) = \frac{G}{\left(\left(\frac{G}{B(0)} - 1\right) \cdot e^{-G \cdot k \cdot t} + 1\right)}$   
 Dabei bezeichnet  $B(t)$  den Bestand zum Zeitpunkt  $t$  und  $G$  die natürliche Grenze. Der Term  $\left(\frac{G}{B(0)} - 1\right)$  drückt das Verhältnis zwischen dem Grenzwert  $G$  und dem Anfangsbestand  $B(0)$  aus und ist mit einer bestimmten von der Zeit abhängigen Größe  $e^{-G \cdot k \cdot t}$  verbunden. Die Addition von 1 im Nenner trägt dazu bei, dass die Kapazitätsgrenze ihre Wirkung entfalten kann. Ohne dieser Addition würde es sich nicht mehr um ein logistisches Wachstum, sondern um ein exponentielles, unbeschränktes Wachstum handeln.

Da das logistische Wachstumsmodell im Hinblick auf die mathematischen Aspekte sehr komplex ist und eines Fachwissens bedarf, möchte ich in dieser Arbeit keine genauere Beschreibung und Erklärung der logistischen Wachstumsformel liefern. Interessierte können sich aber unter [2], [6], [48] und [55] mehr Informationen über das logistische Wachstumsmodell einholen.

Bei realen Wachstumsprozessen in der Natur muss der Anfangsbestand  $B(0)$  immer größer gleich 1 sein. Negative Werte sind logischerweise nicht zulässig, weil es keinen negativen Bestand gibt. Auch Kommazahlen sind ausgeschlossen, da die Anzahl von Lebewesen nur mit ganzen Zahlen beschrieben werden kann – es gibt keine halben oder geviertelten Organismen. Da eine Entwicklung nur stattfinden kann, wenn eine Ausgangszahl vorhanden ist, muss der Anfangsbestand einen Wert größer gleich 1 annehmen:  $B(0) = \frac{G}{\left(\left(\frac{G}{1} - 1\right) \cdot e^{-G \cdot k \cdot 0} + 1\right)} = \frac{G}{\left(\left(\frac{G}{1} - 1\right) \cdot 1 + 1\right)} = \frac{G}{(G - 1 + 1)} = \frac{G}{G} = 1$

Wie bereits erwähnt handelt es sich beim logistischen Wachstumsmodell um eine Kombination aus exponentiellem und beschränktem Wachstum. Aus diesem Grund möchte ich auf die Kapitel 3.2. und 3.3. verweisen, in denen ich die Charakteristika der beiden relevanten Wachstumsmodelle ausführlich erläutert habe. Denn im Prinzip wird das Modell des exponentiellen Wachstums durch eine begrenzt vorliegende Ressource modifiziert, die im Laufe der Zeit erschöpft wird und somit die Entwicklung des Bestandes hemmt.

### 3.4.4. Anwendungen des logistischen Wachstumsgesetzes

#### Grippeinfektion

Angabe: Von 6000 isoliert lebenden Menschen infiziert sich genau eine Person an Grippe. Durch gegenseitige Ansteckung zählt man nach 5 Wochen bereits 400 Kranke. Stelle für den Verlauf der Krankheitsausbreitung ein logistisches Wachstumsmodell auf!<sup>35</sup> (Hinweis: alle Personen erkranken)

<sup>35</sup> entnommen aus: <http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/AnalysisTeil2pdf/LogistischesWachstumAufgaben.pdf> (zuletzt aufgerufen am 3. 12. 2013)



Erklärung: Die Ausbreitung der Grippe kann am besten als logistisches Wachstum modelliert werden, da der Zuwachs sowohl zum momentanen Bestand, als auch zur momentanen Restkapazität proportional ist. Da zu Beginn des Grippeausbruchs, zum Zeitpunkt 0, genau eine Person infiziert ist, gilt  $B(0)=1$ . Der Sättigungswert entspricht logischerweise der Anzahl der isoliert lebenden Menschen. Die Wachstumskonstante  $k$  ergibt sich aus der Anzahl der nach 5 Wochen erkrankten Individuen.

Lösung:

$$B(t) = \frac{G}{\left(\frac{G}{B(0)} - 1\right) \cdot e^{-G \cdot k \cdot t} + 1} \quad B(5) = 400$$

$$400 = \frac{6000}{\left(\frac{6000}{1} - 1\right) \cdot e^{-6000 \cdot 5 \cdot k} + 1}$$

$$400 = \frac{6000}{5999 \cdot e^{-6000 \cdot 5 \cdot k} + 1}$$

$$400 \cdot (1 + 5999 \cdot e^{-30000 \cdot k}) = 6000$$

$$400 + 2399600 \cdot e^{-30000 \cdot k} = 6000$$

$$2399600 \cdot e^{-30000 \cdot k} = 5600$$

$$e^{-30000 \cdot k} = \frac{5600}{2399600}$$

$$-30000 \cdot k = \ln(0.002334)$$

$$k = \frac{\ln(0.002334)}{-30000}$$

$$k = 0.00020201... \sim 0.00020$$

$$B(t) = \frac{6000}{(5999 \cdot e^{-1.2121 \cdot t} + 1)}$$

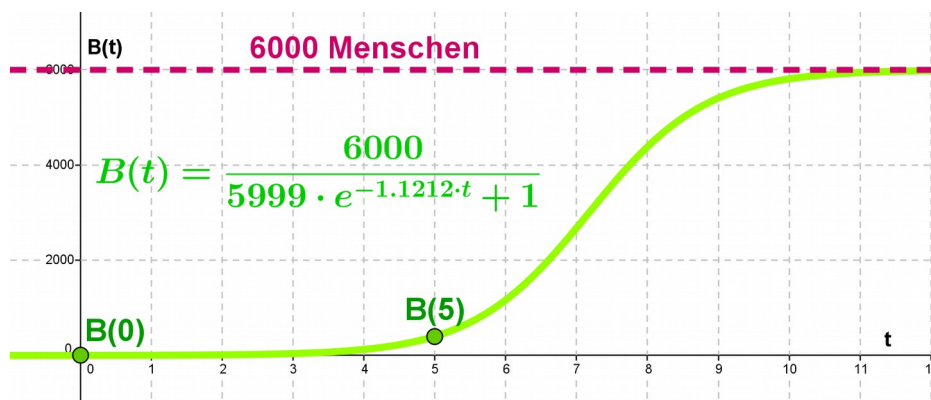


Abbildung 32: logistisches Wachstum - Grippeinfektion

**Weitere Beispiele<sup>36</sup>:**

Im Folgenden werde ich in Form von Schlagworten einige Prozesse nennen, die grundsätzlich dem logistischen Wachstumsgesetz unterliegen:

- Wachstum von Populationen in einem beschränkten Lebensraum
- Verbrennungsreaktionen in der Chemie
- Ausbreitung von Krankheiten in einer festen Gruppe

36 Für weitere Anwendungsbeispiele in Bezug auf logistische Wachstumsvorgänge können sich Mathematikbegeisterte an folgende Internetseite wenden: <http://www.poenitz-net.de/Mathematik/4.Funktionen/4.7.A.Logistisches%20Wachstum.pdf> (zuletzt aufgerufen am 3. 12. 2013)



### 3.4.5. Kritik am logistischen Wachstumsmodell anhand eines realen Beispiels

Um das Kapitel „Mathematische Wachstumsmodelle mit einer Zustandsgröße“ abzurunden, möchte ich auch mit dem logistischen Wachstumsmodell einen Bestandstest in Bezug auf die Modellierung realer Entwicklungen und Wachstumsprozesse durchführen.

Die folgende Abbildung gibt einen Einblick in die Modellierung des realen Hefekulturwachstums mithilfe des logistischen Wachstumsgesetzes.

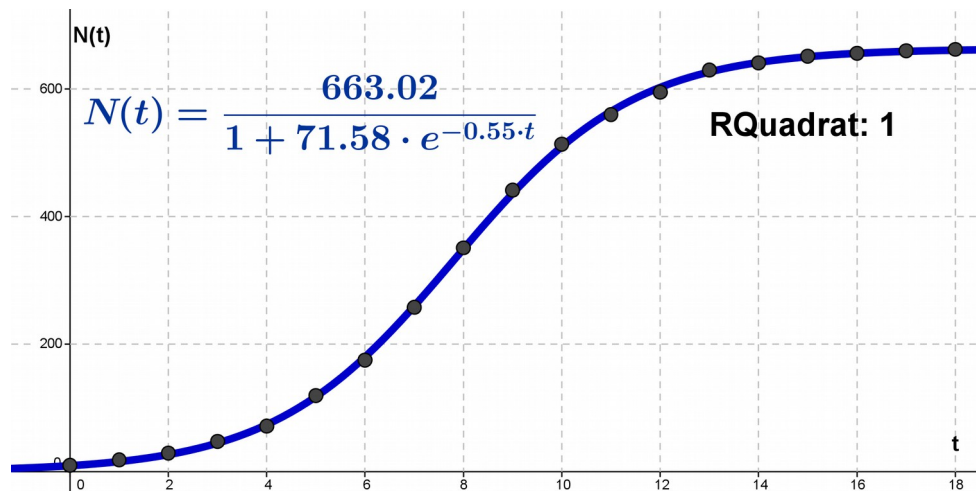


Abbildung 33: Hefekultur - logistisches Wachstumsmodell

Erfreulicherweise weist das approximierte logistische Modell, das dem Wachstumsgesetz  $N(t) = \frac{663.02}{1 + 71.58 \cdot e^{-0.55 \cdot t}}$  folgt, keine wirkliche Diskrepanz zur realen Hefekulturentwicklung auf.

Die äußerst realitätsnahe Modellierung verschiedenster Wachstumsprozesse ist darauf zurückzuführen, dass das logistische Modell sowohl das anfängliche exponentielle Wachstum eines Bestandes, als auch die begrenzt vorliegenden Ressourcen berücksichtigt. Bei der Frage, ob das logistische Wachstum nun tatsächlich in der Realität auftritt, muss man ähnlich vorsichtig wie bei allen anderen einfachen Wachstumsmodellen sein. Denn in den meisten Fällen folgen natürliche Wachstumsvorgänge nicht konstant einem gewissen Wachstumsmodell, sondern es liegt eine Kombination aus mehreren unterschiedlichen Wachstumsgesetzen vor.

Obwohl das logistische Modell ein sehr realitätsnahes Abbild diverser natürlicher Entwicklungen liefert, ist es lediglich ein Versuch diese zu beschreiben. Man kann die Realität, das Leben, nicht berechnen bzw. mathematisch exakt erfassen, sondern nur Prognosen anstellen, wobei diese auch nicht immer die Wirklichkeit widerspiegeln bzw. nicht zu 100% verwendbar sind. Im Allgemeinen lässt sich aber die Behauptung aufstellen, dass vor allem komplexe mathematische Modelle die Praxis oft sehr gut approximieren.

## 4. Mathematische Wachstumsmodelle mit zwei Zustandsgrößen

Bisher habe ich den Fokus ausschließlich auf Wachstumsprozesse einer einzigen Spezies gelegt. In diesem Kapitel soll das Wachstumsverhalten von Populationen mehrerer Arten, welche untereinander in Beziehung stehen, in die Modellierung miteinbezogen werden. Dabei kann man zwischen drei grundlegenden Interaktionsmöglichkeiten unterscheiden:

- Räuber und Beute: Eine Population wächst, während die andere kleiner wird.
- Konkurrenz: Beide Populationen werden kleiner.
- Mutualismus/Symbiose: Beide Populationen nehmen zu.

### 4.1. Räuber-Beute-Beziehungen: Lotka-Volterra-Modell

Räuber-Beute-Beziehungen stellen einen Teilaspekt der Nahrungsnetze und Nahrungsketten dar. Das Räuber-Beute-Modell beschreibt im Allgemeinen die Wechselwirkung zwischen einer Raub- und einer Beutetierart, das heißt, es beleuchtet die Beziehung der Anzahl von Beutetieren zur Anzahl der Räuberexemplare. Modellbildungen in der Ökologie können aber nur angewendet werden, wenn es sich bei der Raubtierspezies um Prädatoren<sup>37</sup> handelt. Anders formuliert bedeutet das, dass alle Arten, die sich von toter organischer Substanz ernähren (z.B. Aasfresser, Destruenten<sup>38</sup>, Detritusfresser<sup>39</sup>), für das Räuber-Beute-Modell ausgeschlossen sind, da sie keine biologische Reaktion der Beutepopulation bewirken können.

In der Natur existieren vielzählige komplexe Reaktionsmuster in den Beziehungen zwischen Raubtierspezies und Beutetierspezies. Im Wesentlichen kann man eine grobe Untergliederung zwischen Generalisten mit zahlreichen gleichwertigen Beutetierspezies und Räuberexemplaren, die auf eine bestimmte Beutetierart spezialisiert sind, vornehmen. Zwischen diesen beiden Extremen befindet sich ein breites Spektrum von Fällen unterschiedlicher Präferenz. Aufgrund der Vielfalt an unterschiedlichen Beziehungen erweist sich die Übertragung von einem System auf ein anderes als sehr schwierig.

---

37 Ein Prädatator ist ein Organismus, der sich von anderen, noch lebenden Organismen oder Teilen von diesen ernährt. siehe: <http://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4dator> (zuletzt aufgerufen am 23. 12. 2013)

38 Ein Destruent ist ein Organismus, der organische Substanz abbaut und zu anorganischem Material reduziert. siehe: <http://de.wikipedia.org/wiki/Destruenten> (zuletzt aufgerufen am 23. 12. 2013)

39 Unter Detritus versteht man zerfallende organische Substanzen in Gewässern wie z.B. die Reste abgestorbener Tiere und Pflanzen.

siehe: [http://de.wikipedia.org/wiki/Detritus\\_\(Hydrologie\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Detritus_(Hydrologie)) (zuletzt aufgerufen am 23. 12. 2013)

Im Regelfall wird die Populationsgröße einer Spezies aber nicht nur durch Räuber, sondern auch noch durch zahlreiche weitere Faktoren wie Nahrungsangebot, Klima, Raumkonkurrenz, Krankheitserreger, Parasiten und Stress beeinflusst. Genauere Informationen zum Thema Populationsdynamik findet man in [32], [36] und [48].

Um allgemeine dynamische Eigenschaften von Räuber-Beute-Beziehungen aufzuzeigen und zu untersuchen, wurden in der theoretischen Biologie diverse mathematische Modelle erstellt. In den Jahren 1925 und 1926 fassten der österreichische Mathematiker Alfred James Lotka<sup>40</sup> und der italienische Mathematiker und Physiker Vito Volterra<sup>41</sup> unabhängig voneinander einige quantitative Aspekte der Räuber-Beute-Beziehung in Gesetzmäßigkeiten, welche heute unter dem Namen **Lotka-Volterra-Regeln** bzw. **Lotka-Volterra-Gesetze** bekannt sind. Diese sehr einfachen und bekannten Lotka-Volterra-Gesetze umfassen drei Regeln zur quantitativen Beschreibung der Populationsdynamik unter interspezifischer Konkurrenz.

#### 4.1.1. Lotka-Volterra-Gesetze

Die Lotka-Volterra-Gesetze beschreiben die zahlenmäßige Entwicklung zweier Populationen über große Zeiträume. Alle drei Regeln gelten aber nur unter der Voraussetzung, dass lediglich zwischen den betrachteten beiden Spezies eine Räuber-Beute-Beziehung besteht. Weiters geht man von einer Konstanz sonstiger biotischer<sup>42</sup> und abiotischer<sup>43</sup> Umweltfaktoren aus.

- **Erste Lotka-Volterra-Regel (Periodische Populationschwankung):** Die Populationsgrößen von Raub- und Beutetieren unterliegen periodischen Schwankungen, wobei die Schwankungen der Räuberpopulation phasenverzögert denen der Beutepopulation folgen. Die Länge der Perioden hängt sowohl von den Anfangsbedingungen, als auch von den Wachstumsraten der beiden Populationen ab.
- **Zweite Lotka-Volterra-Regel (Konstanz der Mittelwerte):** Die über genügend lange Zeiträume gemittelten Größen der Räuber- bzw. Beutespezies weisen eine gewisse Konstanz auf. Die Größe der Mittelwerte steht nur mit den Wachstums- und Schrumpfraten der Populationen in direktem Bezug, nicht aber mit den Anfangsbedingungen.

---

40 \* 2. März 1880 in Lemberg; † 5. Dezember 1949 in New York City

Nähere Informationen zu Alfred J. Lotka findet man unter: [http://de.wikipedia.org/wiki/Alfred\\_J.\\_Lotka](http://de.wikipedia.org/wiki/Alfred_J._Lotka) (zuletzt aufgerufen am 23. 12. 2013)

41 \* 3. Mai 1860 in Ancona; † 11. Oktober 1940 in Rom

Nähere Informationen zu Vito Volterra findet man unter: [http://de.wikipedia.org/wiki/Vito\\_Volterra](http://de.wikipedia.org/wiki/Vito_Volterra) (zuletzt aufgerufen am 23. 12. 2013)

42 biotisch = Vorgänge und Zustände, an denen Lebewesen beteiligt sind

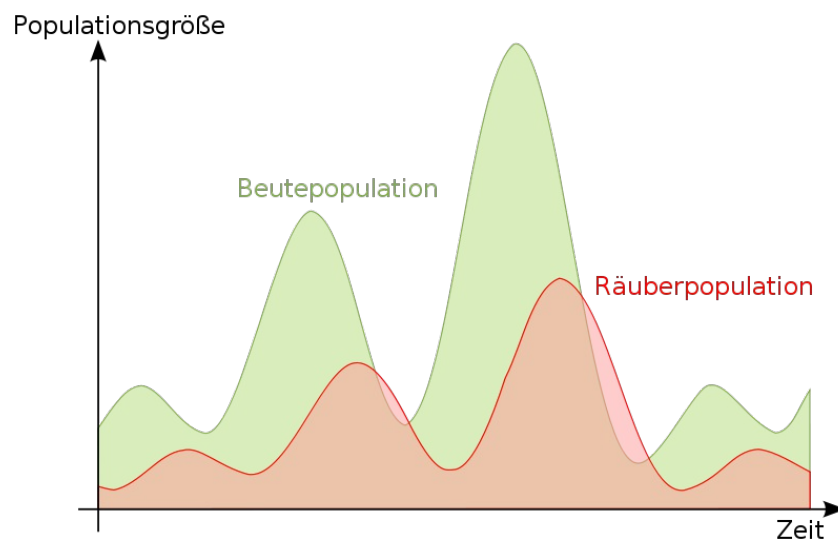
siehe: <http://de.wikipedia.org/wiki/Biotisch> (zuletzt aufgerufen am 23. 12. 2013)

43 abiotisch = Vorgänge und Zustände, an denen keine Lebewesen beteiligt sind

siehe: <http://de.wikipedia.org/wiki/Abiotisch> (zuletzt aufgerufen am 23. 12. 2013)

- **Dritte Lotka-Volterra-Regel (Störung der Mittelwerte):** Wenn Räuber- und Beutepopulation gleichermaßen proportional zu ihrer Größe dezimiert werden, dann vergrößert sich kurzfristig der Mittelwert der Beutespezies, während der Mittelwert der Raubexemplaren kurzfristig sinkt, das heißt, die Beutepopulation erholt sich nach einem dezimierenden Ereignis stets schneller als die Raubtierspezies.

Die Abbildung 34 veranschaulicht die Populationsschwankungen bei Räuber und Beute nach dem Lotka-Volterra-Modell. Diese graphische Darstellung soll das Nachvollziehen und Verstehen der drei Lotka-Volterra-Gesetze erleichtern.



**Abbildung 34: Lotka-Volterra-Modell**

Strenggenommen können die Lotka-Volterra-Gesetze nur unter Beachtung ihrer selten erfüllten Voraussetzungen Anwendung finden. Da die besagten Regeln aber auch bei komplexeren Nahrungsbeziehungen und schwankenden Umweltfaktoren durchaus noch brauchbare Prognosen bzw. Ergebnisse liefern, sind sie trotz der strengen Bedingungen und Voraussetzungen in der praktischen Ökologie von großer Bedeutung.

In [18], [28], [37], [48] und [58] findet man unter anderem detaillierte Beschreibungen und interessante Fallbeispiele zu den Lotka-Volterra-Gesetzen.

#### **4.1.2. Annahmen des Lotka-Volterra-Modells aus biologischer Sicht**

Grundsätzlich kann die Wechselwirkung der Populationsdichten von Beute und Räuber als Regelkreis beschrieben werden. Ernährt sich eine Tierart (Räuber) vorwiegend von einer einzigen anderen Art (Beute) desselben Lebensraumes und wandern Tiere weder zu noch ab, dann ist

das Nahrungsangebot der Räuber umso größer, je mehr Individuen die Beutetierpopulation umfasst. Aufgrund der Generationsdauer erfolgt die Zunahme der Raubtiere aber erst einige Zeit nach dem Wachstum der Beutetierpopulation. Mit dem Tod der Beutetiere nimmt die Population der Räuber aufgrund der zunehmend fehlenden Nahrung ab, wobei auch hier eine gewisse Verzögerung in der Änderung der Individuenzahl festzustellen ist. Die Beutepopulation kann sich wegen der dezimierten Anzahl an Raubtieren wieder rasch erholen, wodurch aber auch die Raubtierpopulation ein Wachstum verzeichnet. Der Kreislauf der interspezifischen Regulation, der durch die Beutetierpopulation gesteuert wird, schließt sich folglich. Im Laufe der Zeit tritt ein biologisches Gleichgewicht ein, welches die Populationsdichten der betreffenden Tierspezies in Grenzen hält, das heißt, das Verhalten von Raub- und Beutetieren wird im Sinne der Koevolution immer stärker aufeinander abgestimmt.

In der Regel pendelt sich die interspezifische Regulation bzw. die Wechselwirkung der Populationsdichte von Räuber und Beute auf ein gewisses Niveau ein. In Ausnahmefällen aber führt das Regelkreissystem langfristig zu keinem biologischen Gleichgewicht. Wenn beispielsweise keine Raubtiere mehr vorhanden sind, dann können sich die Beutetiere ungehindert vermehren, was im Modell durch das exponentielle Wachstum beschrieben wird. Bei Abwesenheit von Beuteexemplaren zeichnet sich wiederum die Raubtierpopulation durch eine exponentielle Abnahme aus.

Am Beispiel der interspezifischen Regulation sieht man, dass sich alle Ökofaktoren<sup>44</sup>, die für ein Individuum von großer Bedeutung sind, auf die Population als Ganzes auswirken.

In [10], [15] und [52] werden diverse Räuber-Beute-Systeme vorwiegend unter einem mathematischen Blickwinkel betrachtet und unter Einbezug mathematischer Aspekte detailliert behandelt.

### 4.1.3. Graphische Darstellung des Lotka-Volterra-Modells

Beim Räuber-Beute-Modell lassen sich mehrere unterschiedliche Parameter verändern. Das Aussehen des Räuber-Beute-Systems hängt sowohl von der Populationsgröße, der Vermehrungsrate und der Sterberate von Räuber bzw. Beute, als auch vom Zeitschritt und Wert der sogenannten Störung, der den Prozentsatz der Populationsverminderung angibt, ab. Die Ergebnisse können je nach Wahl der besagten Parameter zwischen *bravem*, chaotischem und periodischem Verhalten variieren. Unter [13] findet man eine bereitgestellte Tabellenkalkulationsdatei, die Parameterstudien und Verhaltensuntersuchungen des Räuber-Beute-Modells ermöglicht.

Die Abbildung 35 gibt einen Einblick in die besagte Tabellenkalkulationsdatei. Mittels Parametervariation können die Lotka-Volterra-Gesetze verifiziert und nachvollzogen werden.

<sup>44</sup> Umweltfaktoren wie Konkurrenten, Fressfeinde, Temperatur, Feuchtigkeit, Nahrungsangebot, Parasiten,...

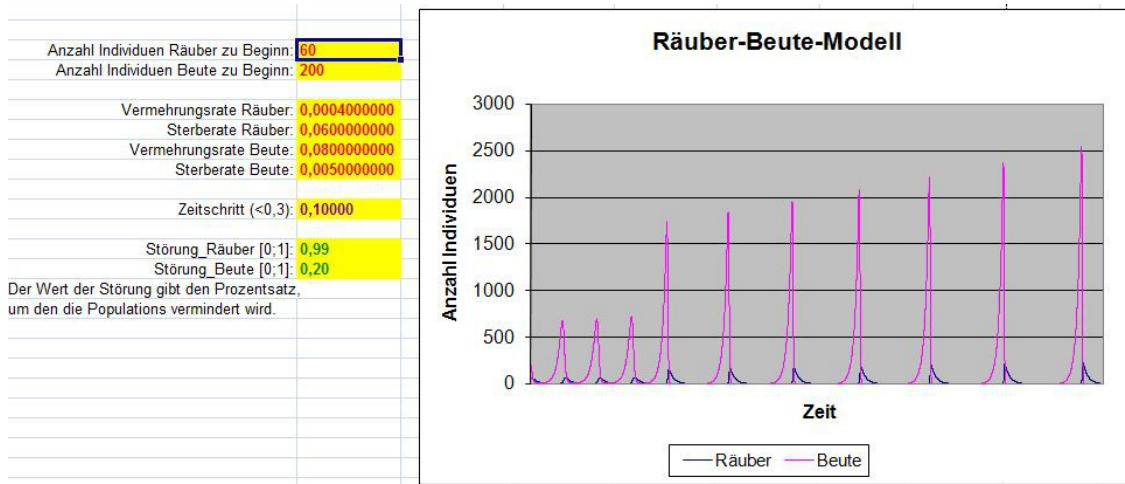


Abbildung 35: Räuber-Beute-Modell mit Zeitschritt

Die Abbildungen 36 und 37 veranschaulichen dieselbe Räuber-Beute-Beziehung. Während in der Abbildung 36 der Fokus nur auf dem Verhältnis zwischen Räuber- und Beutepopulation liegt, bezieht die Abbildung 37 auch den Aspekt der Zeit mit ein.

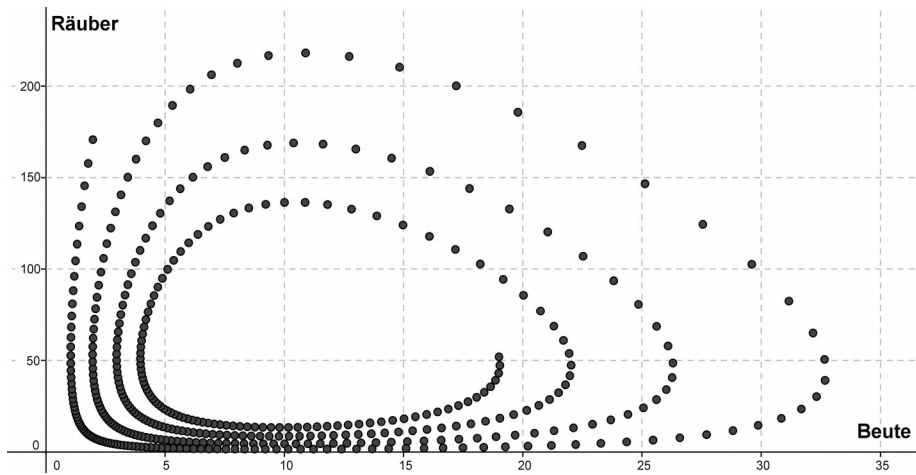


Abbildung 36: Phasenraumdiagramm

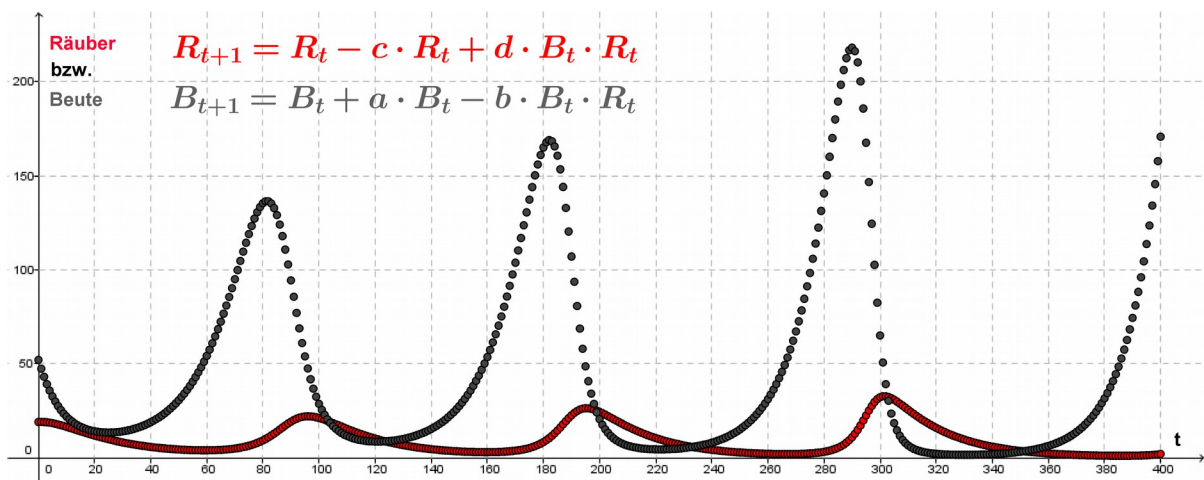


Abbildung 37: Zeitdiagramm

## 4.2. Konkurrenz

Komplexe Ökosysteme bieten diversen Populationen einen schönen Lebensraum. Innerhalb dieser Ökosysteme stehen die einzelnen dort vertretenen Individuen in unterschiedlichen Beziehungen zueinander. Wenn sich die Bedürfnisse einzelner Individuen nicht vereinbaren lassen, dann kann es zu Konkurrenzsituationen kommen, die negative Effekte für die beteiligten Organismen mit sich bringen. Konkurrierende Systeme sind in der Natur kein seltener Anblick. Beispiele sind sowohl die interspezifische, als auch die intraspezifische Konkurrenz von Tieren um das vorhandene Platz- oder Nahrungsangebot. Welche weiteren Konkurrenzphänomene in der Natur auftreten und welche Auswirkungen diese haben, kann man in [1] und [27] nachlesen. Informationen über zahlreiche Fallbeispiele erhält man hingegen in [11] und [54].

Ein Konkurrenzmodell lässt sich durch ein System von zwei Differenzgleichungen beschreiben, wobei das langfristige Verhalten dieses Systems stark von der Parameterwahl abhängt. Im Wesentlichen differenziert man zwischen 3 qualitativ unterschiedlichen Fällen: Dominanz, Bistabilität und stabile Koexistenz. Diese Fälle ergeben sich aus der Lage der beiden Geraden<sup>45</sup> zueinander. Über den mathematischen Hintergrund des Konkurrenzmodells kann man sich in [1] und [57] informieren. Die besagten Arbeiten behandeln und studieren das langfristige Verhalten eines Konkurrenzsystems und vermitteln diesbezüglich mathematisches Wissen.

### 4.2.1. Dominanz

Die Lage der beiden Geraden wird aus biologischen Gründen ausschließlich im 1. Quadranten<sup>46</sup> untersucht. Wenn die beiden Geraden keinen Schnittpunkt im 1. Quadranten haben, dann liegt in diesem Bereich eine Gerade immer oberhalb der anderen. Das könnte folgendermaßen aussehen:

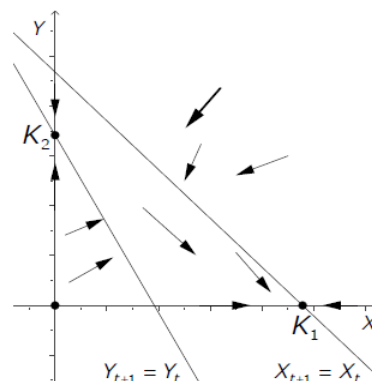


Abbildung 38: Konkurrenzmodell - Dominanz

45 Die beiden Geradengleichungen beschreiben das Wachstum zweier in Wechselwirkung stehender Spezies.

46 Die Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems wird durch das Achsenkreuz in vier Vierteln aufgeteilt. Nach den üblichen Konventionen bezeichnet der 1. Quadrant das rechts oben gelegene Viertel.

siehe: <http://www.duden.de/rechtschreibung/Quadrant> (zuletzt aufgerufen am 26. 12. 2013)



Die Richtung, in welche sich die Lösungskurven bewegen, wird durch die eingezeichneten Pfeile angedeutet. Eine mathematische Erklärung bezüglich der angestrebten Richtungen der Pfeile findet man in [1].

Bei diesem Konkurrenzmodell handelt es sich um eine sogenannte Dominanz. Im gezeigten Fall ist die X-Spezies **dominant**, da die Mitglieder der X-Spezies die Mitglieder der Y-Spezies zu jedem Zeitpunkt in ihrer Zahl übertreffen. Außerdem zeichnet sich die X-Spezies durch eine geringere Abnahmegeschwindigkeit aus, was auch die Lage der beiden Geraden bekräftigt. Weiters führen unabhängig vom Startpunkt alle inneren Bahnen zum Fixpunkt  $(K_1, 0)$ .

#### 4.2.2. Bistabilität

Im Konkurrenzmodell liegt Bistabilität vor, wenn es einen Schnittpunkt der beiden Geraden im 1. Quadranten gibt und sich der besagte Schnittpunkt links unterhalb der gedachten Verbindungsstrecke von  $(K_1, 0)$  zu  $(0, K_2)$  befindet. Das sieht dann z. B. wie folgt aus:

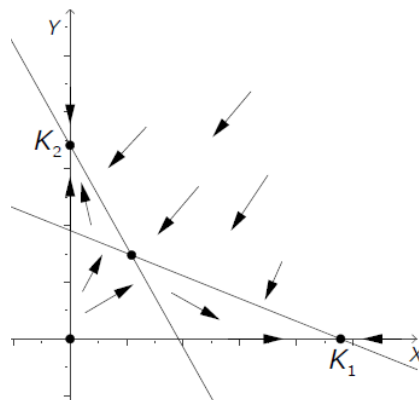


Abbildung 39: Konkurrenzmodell - Bistabilität

Der langfristige Verlauf der Lösungskurven steht in diesem Fall in Abhängigkeit zum Startpunkt  $(X_0, Y_0)$  des Prozesses. Je nachdem wie die Wahl der Startwerte ausfällt, konvergiert die Lösungsfolge entweder zu  $(K_1, 0)$  oder zu  $(0, K_2)$ . Man bezeichnet eine solche Situation als **bistabil**.

#### 4.2.3. Stabile Koexistenz

Im Falle der Dominanz bzw. der Bistabilität stirbt jeweils eine Spezies mit Sicherheit aus. In der Natur stellt das Aussterben einer Art zum Glück nur eine Seltenheit dar. Viel eher entsteht im Laufe der Zeit ein mehr oder weniger stabiles Gleichgewicht. Dieser Fall, nämlich die stabile Koexistenz, tritt genau dann ein, wenn die beiden Geraden einen Schnittpunkt haben und dieser rechts oberhalb der gedachten Verbindungsstrecke von  $(K_1, 0)$  zu  $(0, K_2)$  liegt.

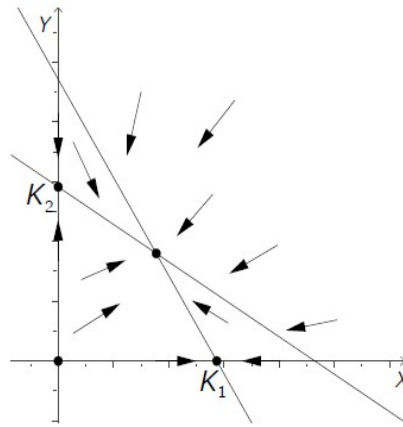


Abbildung 40: Konkurrenzmodell - stabile Koexistenz

Typisch für das Modell der stabilen Koexistenz ist, dass alle inneren Bahnen zum Fixpunkt im Inneren streben. Mit anderen Worten bedeutet das, dass die Bestands- bzw. Bevölkerungszahlen immer zu diesem Fixpunkt konvergieren, sobald von jeder Spezies zumindest einige Tiere vorhanden sind (im Modell reicht sogar ein Tier). Das trifft auch zu, wenn das System durch Umwelteinflüsse kurzzeitig aus diesem angestrebten Gleichgewicht gebracht wird. Die **stabile Koexistenz** zweier Populationen kann man am besten durch das Lotka-Volterra-Modell, welches ich bereits in Kapitel 4.1. ausführlich erläutert habe, beschreiben.

### 4.3. Mutualismus

Mutualismus, ein Spezialfall der Symbiose, bezeichnet vereinfacht gesagt das Zusammenleben verschiedener Spezies, die alle einen Nutzen aus dieser Partnerschaft ziehen, das heißt, jede Art profitiert vom Vorhandensein einer anderen Art. Grundsätzlich ist Mutualismus ein in der Natur sehr häufig auftretendes Phänomen. Etliche Beispiele für mutualistische Symbiosen und einfache mathematische Modelle zur Beschreibung von Mutualismus findet man in [12], [34] und [47].

Die Abbildung 41 veranschaulicht die typische Entwicklung eines mutualistischen Systems.

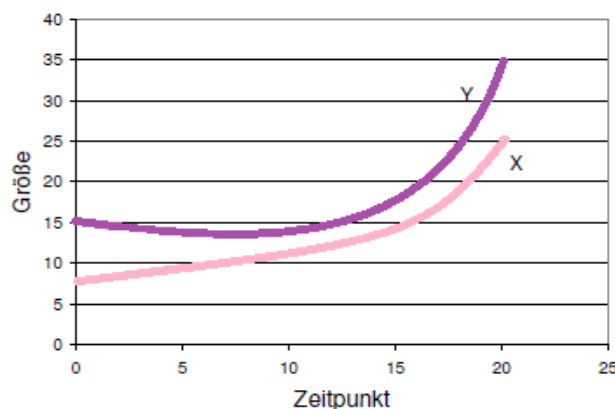


Abbildung 41: Mutualismus

## 5. Wachstumsprozesse in der Biologie

### 5.1. Biologische Grundlagen und Voraussetzungen von Wachstum

Mikroorganismen können nur unter ganz bestimmten Bedingungen leben und wachsen. Auch die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Biomasse einer Mikroorganismenkultur vermehrt, hängt von äußeren Bedingungen ab. Dabei spielen fünf Schlüsselfaktoren eine große Rolle: pH-Wert, Temperatur, Nährstoffe, Verfügbarkeit von Wasser und Sauerstoff.

#### 5.1.1. pH-Wert

Ein wichtiger Aspekt bei der Züchtung von Mikroorganismen ist die pH-Einstellung der Nährböden, wobei es für jede einzelne Art von Mikroorganismus ein pH-Minimum, ein pH-Optimum und ein pH-Maximum gibt.

Das **pH-Minimum** liegt für die meisten Kleinstlebewesen bei einem pH-Wert von ungefähr 4,5. Dabei sind Hefen und Schimmelpilze wesentlich säuretolanter als Bakterien. Sie können auch noch in einem stark sauren Milieu (pH 4) wachsen. Die meisten bekannten Mikroorganismen benötigen für ein **optimales Wachstum** einen neutralen pH-Wert (pH 7), wobei sich der Streubereich von pH 5 bis pH 8 erstreckt. Das **pH-Maximum** liegt grundsätzlich bei allen Arten von Bakterien, Pilzen und Hefen bei pH-Werten von 8 bis 9.

Einen Überblick über die pH-Werttoleranz verschiedenster Mikroorganismen erhält man in [17] und [41]. Letztere gibt auch die pH-Werte diverser Lebensmittel an, um einen Vergleich mit den pH-Werten für optimales Mikroorganismenwachstum zu ermöglichen.

#### 5.1.2. Temperatur

Im Prinzip ist die Temperatur der wichtigste Umweltfaktor für das Wachstum und das Überleben der Mikroorganismen. Analog zum pH-Wert gibt es auch bei der Temperatur einen Bereich, in dem die Mikroorganismen lebensfähig sind – keine Mikrobe kann über die gesamte Temperaturskala existieren. Die Ansprüche, die Mikroorganismen an ihre Wachstumstemperatur stellen, sind sehr unterschiedlich und hängen von dem Temperaturbereich ab, den sie in ihrem natürlichen Lebensraum vorfinden. Mit anderen Worten heißt das, dass jede Mikroorganismenart in einem ihr typischen Temperaturbereich Stoffwechsel betreibt.

Die sogenannten Kardinaltemperaturen definieren den maximal ertragbaren Temperaturbereich. Da es sich bei allen Stoffwechselfvorgängen der Mikroorganismen um chemische Reaktionen handelt, hängt ihr Ablauf vom Überschreiten einer Mindestreaktionstemperatur ab, das heißt, unterhalb des **Temperaturminimums** kommen die Stoffwechselprozesse zum Erliegen. Die Mikroben fallen ab einer gewissen Temperatur in eine Kältestarre, sterben aber im Regelfall nicht ab. Überschreitet man die untere Temperaturgrenze, dann nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit bis zum **Temperaturoptimum** stetig zu. Im Optimum laufen alle enzymatischen Prozesse mit maximaler Geschwindigkeit ab. Steigt die Temperatur über das Optimum, so nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit rasant ab. Im **Temperaturmaximum** kann keine Vermehrung der Mikroorganismen mehr stattfinden. Bei Überschreiten der Abtötungstemperatur kommt es zu einer starken Schädigung der Mikroben, wodurch diese schlussendlich sterben.

Die folgende Abbildung verdeutlicht den Zusammenhang zwischen den Kardinaltemperaturen und der Wachstumsgeschwindigkeit bzw. den molekularen Folgen für die Mikroorganismen.

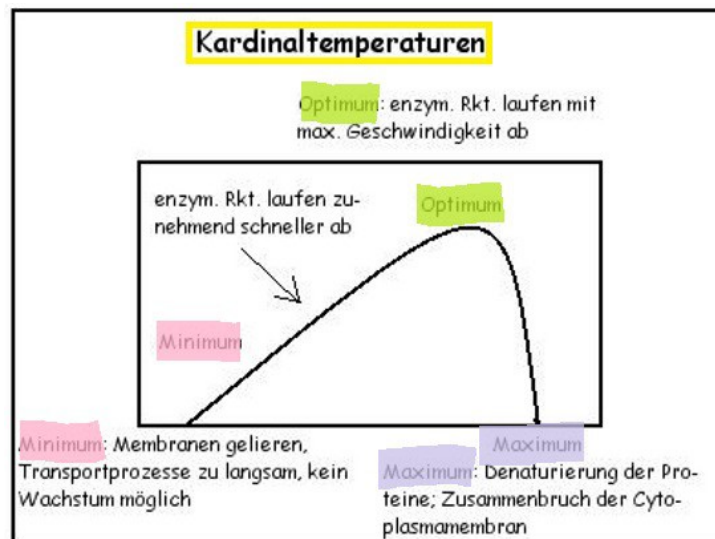


Abbildung 42: Temperaturabhängigkeit der Mikroben

Eine Einteilung der Mikroorganismen in Temperaturklassen, unzählige Beispiele für Mikroben der unterschiedlichen Temperaturbereiche und gute Grafiken dazu findet man in [17] und [26].

### 5.1.3. Nährstoffe

Nährstoffe werden im Allgemeinen für die Synthese von Zellsubstanzen, zur Energiegewinnung für synthetische Prozesse sowie zur Struktur- und Funktionserhaltung benötigt. Der Umsatz dieser Substanzen erfolgt logischerweise über den Stoffwechsel. Zu den essentiellen Nährstoffen gehören Kohlenstoff, Stickstoff, Mineralien, Spurenelemente und Wachstumsfaktoren (Supplie).

### **Kohlenstoff:**

Der Bedarf an Kohlenstoff richtet sich sowohl nach der Art des Mikroorganismus, als auch nach der Ernährungsform (heterotroph<sup>47</sup>, autotroph<sup>48</sup>) des Kleinstlebewesens. Während beispielsweise Hefen mit Glucose als Kohlenstoffquelle zufriedengestellt werden können, benötigen andere Mikroorganismen kompliziertere organische Kohlenstoffverbindungen.

### **Stickstoff:**

Die Nutzungsmöglichkeiten von Stickstoff variieren von Mikrobe zu Mikrobe. Während der Großteil an Mikroorganismen organische oder anorganische Stickstoffverbindungen benötigt, besitzen andere Kleinstlebewesen die Fähigkeit, Luftstickstoff zu verwerten. Bei Organismen, denen die Nutzung des Luftstickstoffs nicht möglich ist, muss die Stickstoffquelle über das Nährmedium zugeführt werden.

### **Mineralstoffe und Spurenelemente:**

Mineralstoffe sind unter anderem Voraussetzung für das Wachstum einer jeden Zelle. Der Bedarf an diesen lebenswichtigen Stoffen ist jedoch bei den einzelnen Mikroorganismen unterschiedlich. Eine zentrale Bedeutung bei allen Mikroben hat das Element **Phosphor**. Phosphor ist Bestandteil der Nucleinsäuren, wirkt bei der Energiebereitstellung in Form von Adenosintriphosphat (ATP) mit, ist am Aufbau der Zellmembran in Form von Phospholipiden beteiligt und ist Bestandteil bei einigen Enzymen. Des Weiteren ist **Schwefel** ein wichtiges Element, welches in der Proteinsynthese eine große Rolle spielt. Bei den meisten Kleinstlebewesen werden Schwefel und Phosphor aus organischen Verbindungen gewonnen. Der Großteil an Mikroorganismen benötigt weiterhin die essentiellen Elemente **Kalium, Kalzium, Magnesium** und **Natrium**. Neben den in vergleichsweise großen Mengen vorkommenden Stoffen sind auch zahlreiche Spurenelemente für die Zellen von essentieller Bedeutung: **Kobalt, Mangan, Kupfer, Zink, Chrom, Nickel, Bor, Selen, Silizium, Wolfram, Chlor, Iod**,... Genauere Informationen hinsichtlich der Essenz bzw. Aufgabe der genannten Nährstoffe beim Schimmelpilzwachstum findet man in [17] und [50].

### **Wachstumsfaktoren (Suppliment):**

Unter Wachstumsfaktoren versteht man spezielle organische Verbindungen, die für die Entwicklung der Zelle unabdingbar sind, da sie nicht synthetisiert werden können. Zahlreich **Vitamine** sind unerlässliche Wachstumsfaktoren für die Mikroorganismenzelle, denn bei Anwesenheit von bestimmten Vitaminen im Nährmedium verzeichnet sie ein deutlich verbessertes Wachstum. Zu den mikrobiologisch wichtigsten Vitaminen zählen Vitamin B<sub>1</sub>, Vitamin B<sub>2</sub>, Vitamin B<sub>6</sub>, Vitamin B<sub>12</sub>, Vitamin H und Folsäure. Deren Aufgaben und Funktionen im Mikroorganismus werden tabellenartig in [17] dargestellt und beschrieben.

---

47 „Fremdernährer“: benötigen Nährstoffe von anderen Organismen

48 „Selbsternährer“: stellen ihre Nahrung selbst her

**Aminosäuren** fungieren als Bestandteile der Proteine. Bekannterweise können sie nur teilweise von den Mikroben synthetisiert werden, weshalb einige Aminosäuren über das Nährmedium zugeführt werden müssen.

#### 5.1.4. Verfügbarkeit von Wasser

Wasser ist der Hauptbestandteil aller funktionierenden Zellen und damit die Grundsubstanz des Lebens. Die lebenserhaltende Funktion des Wassers wird bekräftigt durch die Tatsache, dass Mikroorganismen für alle Stoffwechselaktivitäten Wasser benötigen. Die Wasserverfügbarkeit, auch als  $a_w$ -Wert<sup>49</sup> bekannt, ist ein Maß für die frei verfügbare Wassermenge in einem Medium. Sie ist definiert als das Verhältnis des Wasserdampfdrucks über einem Material zum Wasserdampfdruck über reinem Wasser bei einer bestimmten Temperatur. Obwohl jede Mikroorganismenart unterschiedliche Ansprüche an frei verfügbares Wasser hat, liegt bei den meisten Mikroben das Wachstumsoptimum bei einem  $a_w$ -Wert von 0,98 bis 1. Bei einem Mangel an freiem Wasser werden diverse Stoffwechselaktivitäten verlangsamt. Ein kompletter Wasserentzug bringt den Stoffwechsel zum Stillstand, wodurch empfindliche Organismen sofort abgetötet werden.

Eine Klassifizierung der Schimmelpilze nach ihrem  $a_w$ -Wert, die exakte Wasseraktivität ausgewählter Schimmelpilze und den Wasserbedarf für diverse Funktionen findet man in [17] und [50].

#### 5.1.5. Verfügbarkeit von Sauerstoff

Da Sauerstoff die Grundlage für den Aufbau der Zellsubstanz darstellt, benötigen alle Organismen diesen lebensnotwendigen Stoff. Jedoch unterscheiden sich die Kleinstlebewesen bezüglich des Sauerstoffbedarfs bei der Energieproduktion erheblich.

In welche unterschiedlichen Gruppen Mikroorganismen hinsichtlich ihres Sauerstoffbedarfs eingeteilt werden, kann man in [17] und [41] nachlesen.

### 5.2. Einflussfaktoren von Wachstum

Das Wachstum der Mikroorganismen wird von einer Vielzahl an Umweltfaktoren beeinflusst. Neben den in Kapitel 5.1. genannten Schlüsselfaktoren wie pH-Wert, Temperatur, Nahrung und Sauerstoff hängt die Entwicklung der Kleinstlebewesen auch von der Konkurrenzflora, den Fressfeinden, der Anwesenheit von Konservierungsstoffen, dem Platzangebot, dem Redoxpotential, der Lichtintensität, der Expositionsdauer und der Generationsdauer ab.

<sup>49</sup> Genauere Erklärungen zum  $a_w$ -Wert findet man unter: <http://www.chm.tu-dresden.de/lc/praktikum/biotechn/wasser.pdf> (zuletzt aufgerufen am 5. 2. 2014)

## 5.3. Phasen des mikrobiellen Wachstum

Im Allgemeinen erfolgt die Kultivierung von Mikroorganismen häufig in der sogenannten Batch-Kultur. Bei der Batch-Kultur, auch statische Kultur genannt, werden die Mikroben in ein Nährmedium eingebracht. Dieses Medium bleibt während der gesamten Kulturzeit das gleiche, das heißt, es findet weder eine Nährstoffzugabe noch eine Entnahme der Stoffwechselprodukte statt. Im Regelfall verläuft das Wachstum der Mikroorganismenpopulation in einer Batch-Kultur in klar erkennbaren Wachstumsphasen. Die Dauer dieser Phasen hängt sowohl von der Art der Mikroorganismen, als auch von der Qualität der Umweltbedingungen ab.

### 5.3.1. Latenzphase (Anlaufphase)

Die Latenzphase zeichnet sich durch eine Konstanz der Mikroorganismenzahl aus, das bedeutet, dass es augenscheinlich zu keiner Vermehrung der Mikroben kommt. Die Kleinstlebewesen fokussieren sich ausschließlich auf die Akklimatisation – sie stellen sich auf das neue Medium und die Umweltbedingungen ein. Allmählich beginnen die Mikroorganismen mit der Produktion von Enzymen, die sie zum Abbau und zur Weiterverarbeitung der angebotenen Nährstoffe benötigen. Sobald die Synthese aller relevanten Bausteine stattgefunden hat, kann die Zelle mit der Zersetzung der Nährstoffe und somit auch mit der Vermehrung beginnen.

### 5.3.2. Exponentielle Phase

In der exponentiellen Phase vermehrt sich die Kultur explosionsartig, wodurch die Dichte der Mikroorganismen extrem ansteigt. Verbunden mit dem rasanten Anstieg der Mikroorganismenpopulation ist eine zunehmend raschere Abnahme der Nährstoffe sowie eine exponentiell steigende Konzentration an Stoffwechselendprodukten. Die Wachstumsrate sowie die Dauer der Generationszeit stehen in Abhängigkeit zum Erbmateriale und zu diversen Umweltfaktoren.

### 5.3.3. Verzögerungsphase

In der Verzögerungsphase kommt es zu einer Abnahme der Wachstumsgeschwindigkeit. Diese Verlangsamung der Vermehrungsgeschwindigkeit ist unter anderem auf die Substratverarmung, die Anreicherung toxischer Stoffwechselprodukte sowie auf die Platznot zurückzuführen. Einen weiteren bremsenden Faktor stellt die gegenseitige Beeinflussung der Mikroorganismen dar, die durch die extrem hohe Zelldichte bedingt ist. All diese Hemmfaktoren tragen zur zeitlichen Begrenzung der exponentiellen Phase bei.



### 5.3.4. Stationäre Phase

In der stationären Phase bleibt die Zahl der Mikroorganismen mehr oder weniger konstant, da der Zuwachs an Mikroben sich mit der Zahl der absterbenden Kleinstlebewesen die Waage hält. Die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt folglich einen Wert gleich 0 an. Die Mikroorganismen sind noch in der Lage Stoffwechsel zu betreiben, jedoch beschränken sich die Zellfunktionen nur mehr auf den Energiestoffwechsel und einige biosynthetische Vorgänge. Als Nährstoffquelle dienen den lebenden Organismen die bereits abgestorbenen, wodurch immer wieder neue Mengen von Abfallstoffen abgegeben werden, die folglich das Medium im übertragenen Sinn umkippen.

### 5.3.5. Absterbephase

In der Absterbephase herrscht ein Mangel an Nährstoffen, während die Konzentration der Stoffwechselprodukte die für die Mikroorganismen tolerierbare Grenze übersteigt. Der lang andauernde Kontakt mit diesen Abfallstoffen stellt das Todesurteil der Mikroben dar – sie sterben nach und nach ab. Die toten Zellen können sich dann durch eigene Enzyme auflösen (Autolyse).

Die Abbildung 43 gibt einen grafischen Einblick in die eben beschriebenen Phasen des mikrobiellen Wachstums. Dabei wird das Wachstum unter Normalbedingungen dem Wachstum unter optimalen Bedingungen gegenübergestellt, um einen Vergleich zu ermöglichen.

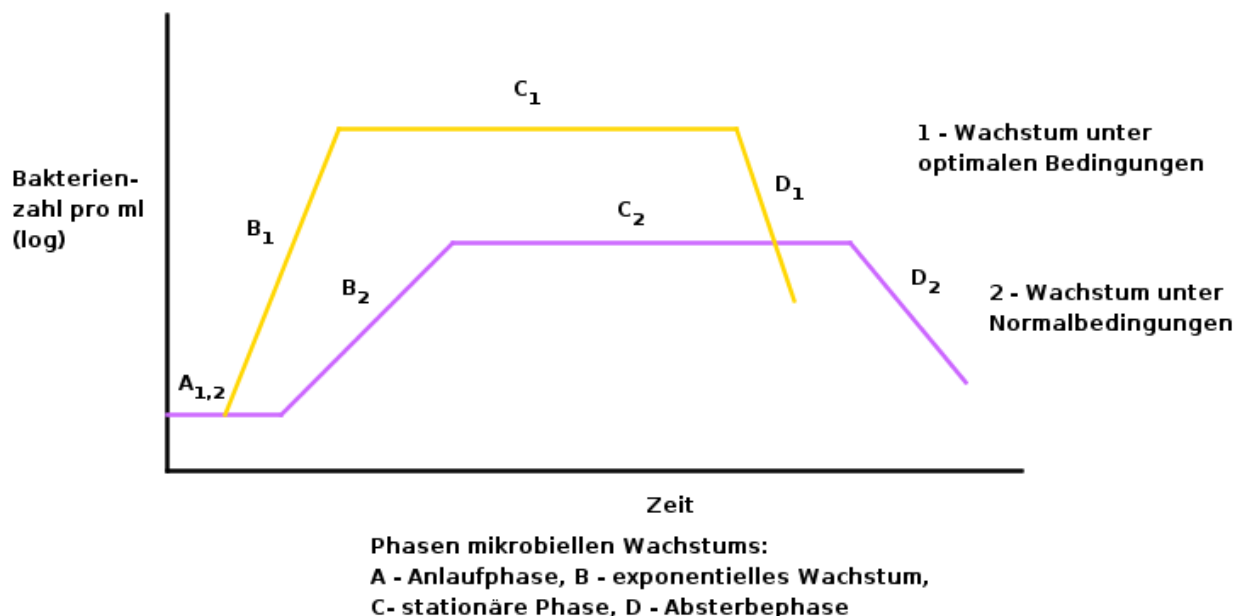


Abbildung 43: Phasen des mikrobiellen Wachstums

## 6. Experiment: Wachstumsprozesse von Schimmelpilzen

### 6.1. Allgemeines über Schimmelpilze

#### 6.1.1. Definition

„Als Schimmelpilze bezeichnet man eine heterogene<sup>50</sup> Gruppe von Pilzen, die in Form von multi-zellulären Filamenten (sogenannten Hyphen<sup>51</sup>) wachsen.“ (entnommen aus [38])

Ein Hyphen-Netzwerk, welches auch als Pilz-Kolonie oder Myzel<sup>52</sup> bezeichnet wird, beinhaltet viele genetisch identische Zellkerne. In der Mikrobiologie wird das Hyphen-Netzwerk aus diesem Grund als ein Organismus, genauer gesagt als ein Eukaryot<sup>53</sup>, angesehen. Makroskopisch ist ein solches Schimmelpilz-Myzel sichtbar als mehl- oder watteartiger, meist weißer oder andersartiger Saum, der ausschließlich organische Substrate überzieht.

#### 6.1.2. Fortpflanzung von Schimmelpilzen

Die der Fortpflanzung dienenden Fruchtkörper und Mechanismen weisen eine große Vielfalt auf, wodurch sie die Grundlage für die Differenzierung der Schimmelpilze bilden. Fast alle Schimmelpilzgattungen können sich sowohl auf ungeschlechtlichem (asexuellem), als auch auf geschlechtlichem (sexuellem) Wege vermehren – beides nebeneinander ist möglich.

##### Ungeschlechtliche Fortpflanzung:

Die Fortpflanzung der Schimmelpilze erfolgt in den meisten Fällen auf asexuellem Wege über Sporen, die am Ende von sporentragenden Strukturen erzeugt werden. Es handelt sich dabei um sogenannte **Konidien**, die eine bestimmte Form von Pilzsporen darstellen. Um eine Vielzahl von diesen Konidien entstehen zu lassen, produzieren die Myzelfäden nach einiger Zeit Konidienträger (Sonderhyphen). Die Konidienträger, welche von Schimmelpilz zu Schimmelpilz variieren, bestehen im Regelfall aus dicht verzweigten Hyphen, die bei geringer Vergrößerung das Aus-

---

50 Heterogen bedeutet „ungleichartig“, „von verschiedener Herkunft“, „uneinheitlich“ oder „andersartig“. entnommen aus: <http://flexikon.doccheck.com/de/Heterogen> (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)

51 Hyphen sind fadenförmige Zellen von Pilzen, die der Nährstoff- und Wasseraufnahme dienen. entnommen aus: <http://www.pflanzenforschung.de/index.php?CID=8039> (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)

52 Als Myzel wird die Gesamtheit aller fadenförmigen Zellen eines Pilzes bezeichnet. entnommen aus: <http://flexikon.doccheck.com/de/Myzel> (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)

53 Eukaryoten haben einen Zellkern, welcher vom Zytoplasma durch eine Kernmembran getrennt ist. siehe: <http://de.wikipedia.org/wiki/Eukaryoten> (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)

sehen eines kleinen Waldes annehmen. An den äußeren Verästelungen findet die Bildung von Sporen bzw. Konidien statt, die kettenförmig aneinandergereiht nach außen ragen. In diesem Stadium nimmt der Schimmelpilz eine staubige Beschaffenheit an. Bei anderen schimmelbildenden Organismen werden die Sporen nicht am Ende von Konidienträgern abgeschnürt, sondern oft in unvorstellbarer Menge in den sogenannten **Sporangien**<sup>54</sup> erzeugt, die als kugelige Anschwellung am Ende von Sporangienträgern ausgebildet werden. Beim geringsten Lufthauch werden sowohl die **Konidiosporen**, als auch die **Sporangiosporen**, die sich im Prinzip nur durch die Art ihrer Entstehung unterscheiden, aufgewirbelt. Diese sehr widerstandsfähigen Schimmelpilzsporen treiben nun über längere Zeit als Aeroplankton in der Luft und keimen schlussendlich auf einem geeigneten Substrat aus – die Bildung von einem neuen Myzel und neuen Sporen hat begonnen.

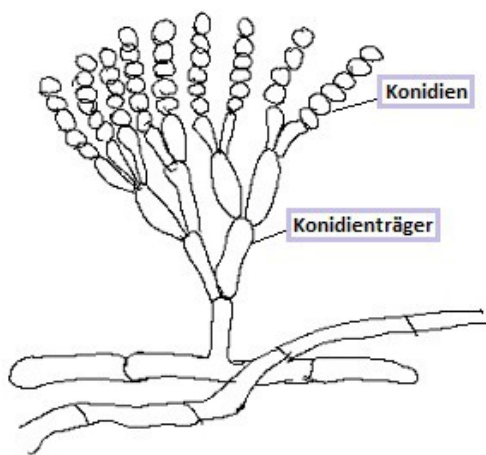


Abbildung 44: Konidienträger

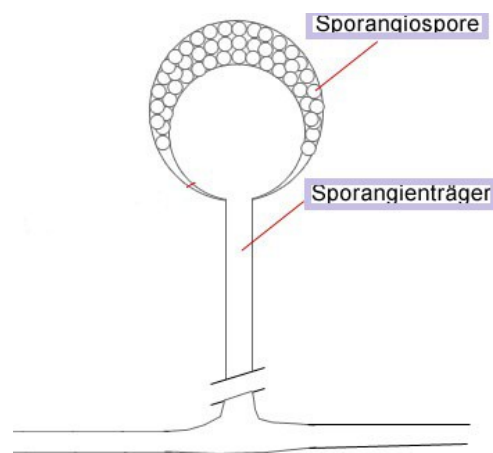


Abbildung 45: Sporangienträger

### Geschlechtliche Fortpflanzung:

Schimmelpilze haben offenbar die Fähigkeit, sich auch auf geschlechtlichem Weg über sexuelle Sporen, die in den Fruchtkörpern gebildet werden, zu vermehren. Dabei differenziert man zwischen zwei Formen: **Zygosporen** und **Ascosporen**. Bei einer Gruppe von Schimmelpilzen liegt das Wesen der geschlechtlichen Fortpflanzung in der Verschmelzung von Sporangien mit sexueller Funktion. Die entstehenden diploiden<sup>55</sup> Sporen sind unter dem Namen **Zygosporen** bekannt. Andere Schimmelpilzgattungen bilden sogenannte **Ascosporen** auf komplizierter Weise in einer sackartigen Zelle (Ascus) aus. Bei den Schimmelpilzen, bei denen die geschlechtlichen Formen bekannt sind, werden die besagten Asci in einem ringsum geschlossenen Fruchtkörper gebildet. In beiden Fällen, also bei den Zygosporen sowie bei den Ascosporen, findet die geschlechtliche Vermehrung unter Zell- bzw. Kernverschmelzung und anschließender Reduktionsteilung statt.

54 Als Sporangium bezeichnet man in der Botanik die Bildungsstätte von Sporen.

entnommen aus: <http://de.wikipedia.org/wiki/Sporangium> (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)

55 In der Genetik wird unter Diploidie das Vorhandensein eines doppelten Chromosomensatzes verstanden.

entnommen aus: <http://de.wikipedia.org/wiki/Diploidie> (zuletzt aufgerufen am 29. 12. 2013)



Abbildung 46: Ascospore

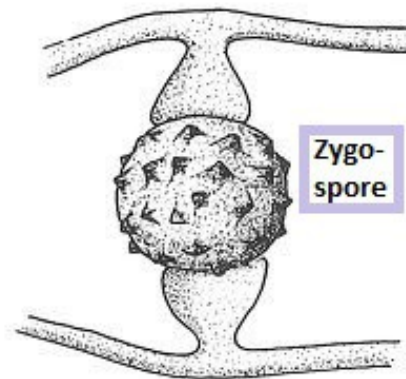


Abbildung 47: Zygo-spore

### 6.1.3. Optimale Bedingungen für das Wachstum von Schimmelpilzen

#### **pH-Wert:**

Im Allgemeinen wachsen Schimmelpilze in einem sehr breitbandigen pH-Wertbereich. Genauer gesagt tolerieren sie pH-Werte von ungefähr 2 bis 10. Ein optimales Wachstum zeigen Schimmelpilze bei pH-Werten, die im leicht sauren Bereich zwischen 4,5 und 6,5 liegen. Ein alkalischer Untergrund ist demnach bei den meisten Schimmelpilzen nicht sonderlich beliebt. Grundsätzlich kann sich der pH-Wert durch Ausscheidung von Stoffwechselprodukten im Verlauf der Wachstumsphase ändern. Diese pH-Wertänderung stellt insofern ein Problem dar, weil verschiedenste Stoffwechselfunktionen bei Schimmelpilzen pH-abhängig sind.

#### **Temperatur:**

Schimmelpilze können prinzipiell in einem weiten Temperaturbereich gedeihen. Der ertragbare Bereich für das Schimmelpilzwachstum erstreckt sich etwa von 0 °C bis 55 °C. Das Optimum der Temperierung für eine gute Entwicklung hängt von der Schimmelpilzgattung sowie vom Lebensstadium der Mikroorganismen ab. Für die meisten Schimmelpilze liegt das Temperatur-optimum jedoch zwischen 25 °C und 35 °C.

#### **Nahrung:**

Als heterotrophe Organismen müssen Schimmelpilze organische Nährstoffe wie Kohlenhydrate, Fette und Proteine direkt aus der Umwelt aufnehmen. Ihr komplexer Stoffwechsel ermöglicht es ihnen, eine Vielzahl von Nährstoffen zu verwerten. Es existiert kaum ein organisches Molekül, das unter geeigneten Bedingungen nicht von Schimmelpilzen genutzt werden kann. Als Substrat dienen Nährstoffe in abgestorbenen Pflanzenteilen, in Nahrungsmitteln, im Holz, im Erdboden,... Diese organischen Moleküle werden sowohl als Energiequelle, als auch zum Aufbau von Körper-

bausteinen verwendet. Bei der Verwertung werden die organischen Nährstoffe zu anorganischen Stoffen abgebaut. Dieser Prozess wird von der Ausscheidung hochwirksamer Enzyme begleitet. Mithilfe der Enzyme zerlegen die Schimmelpilze komplexe Verbindungen in kleinere Moleküle, die folglich aufgenommen und genutzt werden können. Die folgende Tabelle soll einen Überblick über die essentiellen Nährstoffe von Schimmelpilzen geben.

Makroelemente	Mikroelemente
Kalium, Phosphor, Magnesium, Stickstoff, Wasserstoff, Sulfat, Sauerstoff, Kalzium, Kohlenstoff, Schwefel	Eisen, Kupfer, Mangan, Zink, Molybdän

### **Verfügbarkeit von Wasser:**

Ganz entscheidend für das Schimmelpilzwachstum ist der Wassergehalt im Nährmedium. Schimmelpilze benötigen flüssiges Wasser in großer Menge, um alle lebensnotwendigen Stoffwechselprozesse durchführen zu können. Konkretisiert bedeutet das, dass sich Schimmelpilze in einem  $a_w$ -Wertebereich<sup>56</sup> von 0,8 bis 1 zu entwickeln vermögen. Bezüglich der Wasseraktivität hängt der Bereich des optimalen Wachstums wiederum von der Schimmelpilzgattung ab.

### **Verfügbarkeit von Sauerstoff und Licht:**

Schimmelpilze sind aerob, genauer gesagt mikroaerophil, da auch noch bei sehr niedrigen Sauerstoffpartialdrücken eine Entwicklung stattfinden kann. Der Sauerstoffgehalt unserer Atmosphäre ist daher für eine normale Schimmelpilzentwicklung mehr als ausreichend. Bei einem extremen Sauerstoffmangel und einem hohen Kohlendioxidgehalt der Luft können einige Schimmelpilzarten ihren Stoffwechsel auf fakultativ anaerob<sup>57</sup> umstellen. Auch Licht beeinflusst das Wachstum der besagten Mikroorganismen nur in minimaler Weise. Wie schon gesagt handelt es sich bei Schimmelpilzen um heterotrophe Organismen, das heißt, sie sind nicht auf Licht als Energiequelle angewiesen.

<sup>56</sup> Wasseraktivität = Menge des frei verfügbaren Wassers (Formel für die Berechnung des  $a_w$ -Wertes in Kapitel 5.1.4.)

<sup>57</sup> Wachstum ist sowohl unter aeroben (sauerstoffreichen), als auch unter anaeroben (sauerstoffarmen) Bedingungen möglich; siehe: [http://www.pflegewiki.de/wiki/Fakultativ\\_anaerob](http://www.pflegewiki.de/wiki/Fakultativ_anaerob) (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)

## 6.2. Aufbau und Beschreibung der Experimente

Bereits in den Sommerferien machte ich mir Gedanken, wie ich das Wachstum von Mikroorganismen am besten untersuchen könnte. Meine Entscheidung fiel auf die Züchtung von Schimmelpilzen in einer sogenannten Batch-Kultur. Für diesen Zweck startete ich ein Experiment, in welchem ich dünne, angefeuchtete Brotscheiben, die den Schimmelpilzen als Nährmedium dienen sollten, in jeweils einer Petrischale<sup>58</sup> platzierte. Um die Bedeutung der verschiedensten Umweltbedingungen und deren Auswirkungen auf das Schimmelpilzwachstum herauszufinden, stationierte ich die Petrischalen an unterschiedlichen Standorten. Tag für Tag pflegte ich den Schimmelpilzbefall der Brotscheiben zu beobachten und fotografisch festzuhalten, um einen Vergleich der täglichen Entwicklung anstellen zu können. In Kapitel 6.3. werde ich unter anderem das Wachstum der besagten Mikroorganismen mathematisch untersuchen und die Ergebnisse in Bezug auf die bereits erläuterten Wachstumsmodelle auswerten.

Im Folgenden möchte ich in Form einer Tabelle die unterschiedlichen Proben und deren Umweltbedingungen überblicksartig vorstellen. Leider konnte ich aufgrund der fehlenden technischen Möglichkeiten den pH-Wert und den exakten  $a_w$ -Wert nicht ermitteln.

Brotsorte	Standort	Temperatur	Licht	O <sub>2</sub> und H <sub>2</sub> O
<b>Probe 1</b>				
Vollkornbrot	Abstellkammer	22 °C	kein Licht	O <sub>2</sub> vorhanden; Batch-Kultur mit angefeuchtetem Brot
<b>Probe 2</b>				
Roggen-Dinkel-Brot	auf der Terrasse in der Sonne	schwankend (18 °C – 55 °C)	hohe Lichtintensität (Schwankungen - Tag und Nacht!)	O <sub>2</sub> vorhanden; Batch-Kultur mit angefeuchtetem Brot
<b>Probe 3</b>				
Vollkornbrot	Wohnzimmer	25 °C	keine direkte Sonneneinstrahlung	O <sub>2</sub> vorhanden; Batch-Kultur mit angefeuchtetem Brot
<b>Probe 4</b>				
Roggen-Dinkel-Brot	Wohnzimmer	25 °C	keine direkte Sonneneinstrahlung	O <sub>2</sub> vorhanden; Batch-Kultur mit angefeuchtetem Brot

<sup>58</sup> Eine Petrischale ist eine flache, runde, durchsichtige Schale mit übergreifendem Deckel, die in der Regel in der Biologie, Medizin oder Chemie für diverse Experimente zum Einsatz kommt.

entnommen aus: <http://de.wikipedia.org/wiki/Petrischale> (zuletzt aufgerufen am 29. 12. 2013)



Brotsorte	Standort	Temperatur	Licht	O <sub>2</sub> und H <sub>2</sub> O
<b>Probe 5</b>				
Vollkornbrot	Kühlschrank	6 °C	kein Licht	O <sub>2</sub> vorhanden; Batch-Kultur mit angefeuchtetem Brot
<b>Probe 6</b>				
Roggen-Dinkel- Brot	Kühlschrank	6 °C	kein Licht	O <sub>2</sub> vorhanden; Batch-Kultur mit angefeuchtetem Brot
<b>Probe 7</b>				
Vollkornbrot	auf der Terrasse im Schatten	schwankend (18 °C – 35 °C)	geringe Lichtintensität (Schwankungen – Tag und Nacht!)	O <sub>2</sub> vorhanden; Batch-Kultur mit angefeuchtetem Brot
<b>Probe 8</b>				
Roggen-Dinkel- Brot	auf der Terrasse im Schatten	schwankend (18 °C – 35 °C)	geringe Lichtintensität (Schwankungen – Tag und Nacht!)	O <sub>2</sub> vorhanden; Batch-Kultur mit angefeuchtetem Brot

Die Abbildung 48 gibt Auskunft über das Aussehen von sogenannten Petrischalen, die bei meinen Experimenten als Ort der Schimmelpilzkultivierung dienen.

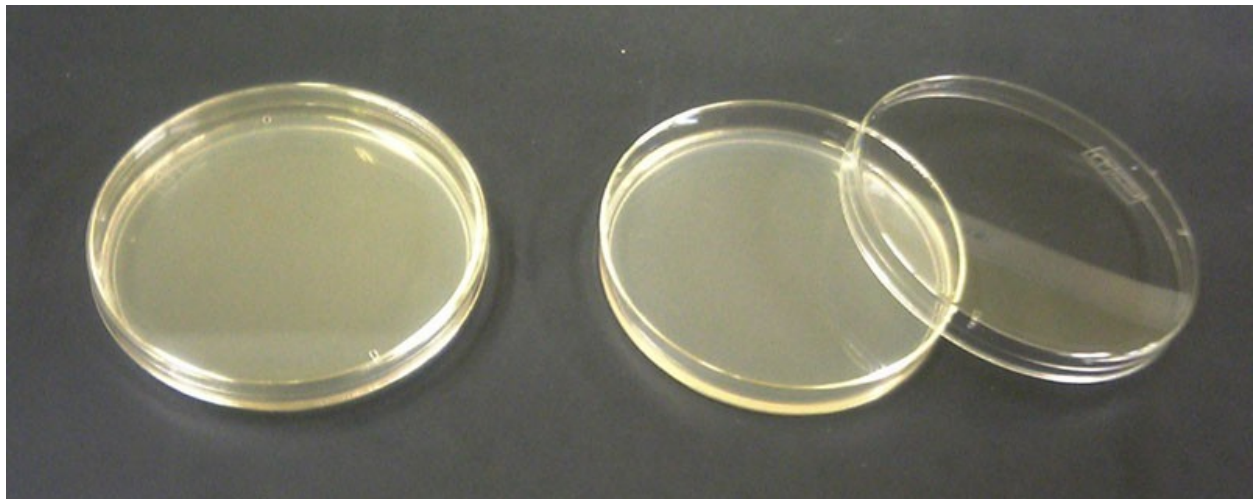


Abbildung 48: Petrischalen



### 6.3. Auswertung der Experimente

Um das Schimmelpilzwachstum möglichst genau untersuchen zu können, entschied ich mich für eine Fotodokumentation. Ich fotografierte jede Probe sowohl in der Früh, als auch am Abend – und zwar täglich. Dazu verwendete ich eine digitale Spiegelreflexkamera der Marke Nikon D40. Da ich kein Stativ für meine Kamera besitze, versuchte ich die Fotos möglichst genau aus derselben Perspektive und demselben Abstand von ca. 30 cm zu machen. Die tägliche Fotodokumentation wickelte ich entweder auf unserem Tischtennistisch oder auf einem Ledersessel ab.

Die Auswertung des Schimmelpilzwachstums nehme ich mit der dynamischen Mathematiksoftware GeoGebra vor. Dazu lade ich das erste Foto einer Probe auf GeoGebra und beginne mit dem Bearbeiten. Zuerst berechne ich die Fläche des gesamten Brotes, indem ich ein Vieleck mit dem Befehl **Vieleck** über das Brot lege – die Fläche des Brotes wird dabei automatisch ermittelt. Als nächsten Schritt mache ich die schimmelbedeckte Fläche mathematisch erfassbar. Dazu lege ich jeweils ein Vieleck über eine Schimmelpilzanhäufung, wobei die gesuchten Flächen wiederum automatisch berechnet werden. Mittels einer Addition der einzelnen schimmelbedeckten Flächen erhält man die Gesamtfläche des Schimmelpilzbefalls. Um den Schimmelpilzbefall mit demselben anderer Proben vergleichen zu können, wendet man eine einfache Prozentrechnung an:  $\text{Prozent} = \frac{\text{schimmelbedeckte Fläche}}{\text{Gesamtfläche des Brotes}} \cdot 100$

Die Abbildung 49 soll die Berechnung der unterschiedlichen Vielecke bzw. die Auswertung des Schimmelpilzbefalls verdeutlichen und visuell erfassbar machen.

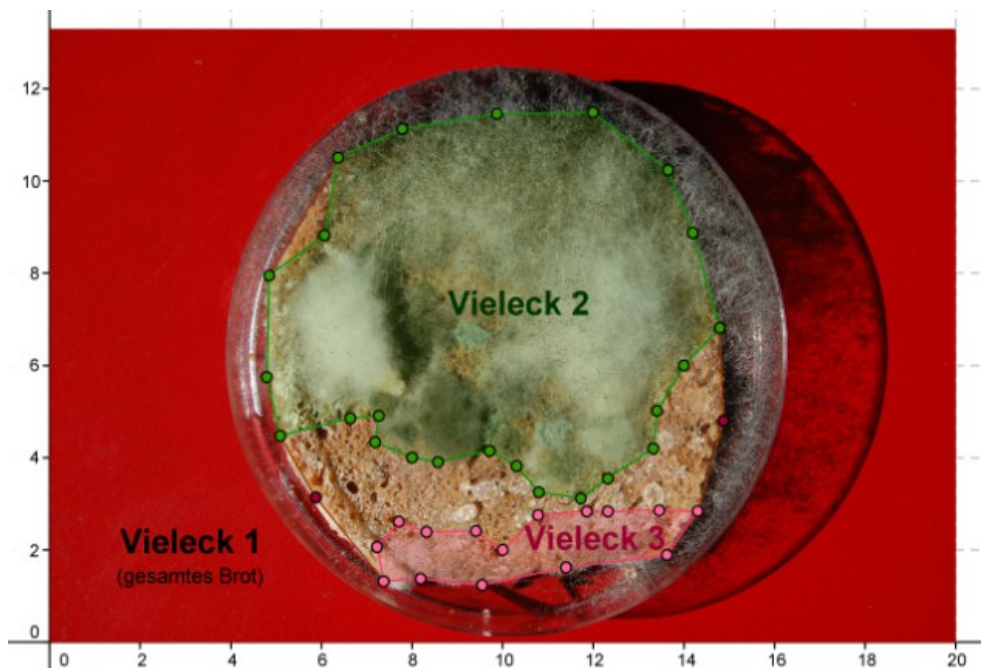


Abbildung 49: Berechnung des Schimmelpilzbefalls

Zur Veranschaulichung des Rechenvorganges habe ich ein beliebiges Foto der Probe 7 gewählt, welches in der Abbildung 49 ersichtlich ist. Das Vieleck 1 umfasst das gesamte Brot und weist einen Flächeninhalt von  $84,94 \text{ E}^2$  auf. Für die Berechnung des Schimmelpilzbefalls brauchen wir aber logischerweise nicht nur die Gesamtfläche des Brotes, sondern auch alle schimmelbedeckten Flächen. In diesem Fall wären das sowohl das Vieleck 2 mit einer Fläche von  $61,31 \text{ E}^2$ , als auch das Vieleck 3 mit einer Fläche von  $7,11 \text{ E}^2$ . Wie bereits beschrieben erhält man die Gesamtfläche des Schimmelpilzbefalls durch die Addition der einzelnen schimmelbedeckten Flächen:  $61,31 + 7,11 = 68,42$ . Die Gesamtfläche des Schimmelpilzbefalls beträgt demnach  $68,42 \text{ E}^2$ . Mithilfe einer einfachen Prozentrechnung wird der absolute Wert der schimmelbedeckten Gesamtfläche in eine dimensionslose, vergleichbare Prozentzahl umgewandelt. Unter Verwendung der bereits erläuterten Prozentformel erhalten wir folgendes Ergebnis:  $\frac{68,42}{84,94} \cdot 100 = 80,55$ . Das Brot ist folglich zu  $80,55 \%$  von diversen Schimmelpilzen übersät.

Um den Verlauf des Schimmelpilzwachstums nachvollziehen zu können, wiederhole ich dieselbe Prozedur auch bei allen anderen Fotos dieser Probe. Da aber die einzelnen Prozentsätze noch nichts Aussagekräftiges über die gesamte Schimmelpilzentwicklung verraten, sollte das Schimmelpilzwachstum mithilfe der mathematischen Modellierung veranschaulicht werden. Während die ermittelten Prozentsätze den y-Wert darstellen, wird die Zeit in Tagen auf der x-Achse aufgetragen. Nach diesem Schema werden jetzt alle berechneten Werte als Punkte in das Koordinatensystem eingetragen. Um die diskrete Darstellung des Schimmelpilzwachstums in eine kontinuierliche umzuwandeln, modelliert man mithilfe von GeoGebra eine Funktion, deren Fehlerquadrate zu den bereits im Koordinatensystem eingetragenen Punkten minimalst sind. Der dafür notwendige Befehl auf GeoGebra hängt von der Verteilung der Punkte ab. Generell sind aber für die Modellierung von Wachstumsprozessen nur die Befehle **Trendlinie**, **TrendLogistisch** und **TrendExp** von Relevanz. Vereinfacht gesagt wird eine Funktion erstellt, die am besten zu den ermittelten Werten des Schimmelpilzbefalls passt. Diese sogenannte Approximation ermöglicht es, den Verlauf der Schimmelpilzentwicklung auf einen Blick nachvollziehen zu können.

Auf den nächsten Seiten werde ich in Form einer Tabelle die Schimmelpilzentwicklungen der unterschiedlichen Proben vorerst nur überblicksartig beschreiben. Im Anschluss möchte ich genauer auf die Proben eingehen, die ein Mikroorganismenwachstum aufweisen.

Interessierte können sich in [4], [8] und [16] genauere Informationen zum Schimmelpilzwachstum sowie zu diversen Schimmelpilzuntersuchungen einholen.

Modellierung von Wachstumsprozessen – Schimmelpilz als abstoßendes Beispiel

	Tag 1	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 5	Tag 6
<b>Probe 1</b>	keine Veränderung	<b>Anhäufung von kleinen weißen Punkten</b>	<b>Vermehrung der weißen Pilze &amp; Entstehung von zwei „Flaumschimmelpilzen“</b>	<b>Vermehrung der „Flaumschimmelpilze“ &amp; Entstehung von mehreren grünen Pilzen und einem gelben Pilz</b>	<b>starke Vermehrung der „Flaumschimmelpilze“ &amp; Ausbreitung der grünen und gelben Pilze</b>	<b>Ausbreitung der grünen, gelben, grauen und weißen Pilze auf das gesamte Brot!</b>
<b>Probe 2</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung
<b>Probe 3</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	<b>Entstehung von unzähligen kleinen weißen Punkte am Rand des Brotes</b>	<b>Vermehrung der weißen Pilze &amp; Entstehung von einem großen „Flaumschimmelpilz“</b>	<b>starke Vermehrung des „Flaumschimmelpilzes“ &amp; Entstehung von einem großen grünen Pilz</b>	<b>Vermehrung und Ausbreitung des grünen Pilzes</b>
<b>Probe 4</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung
<b>Probe 5</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung
<b>Probe 6</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung
<b>Probe 7</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	<b>Entstehung von unzähligen kleinen weißen Punkten auf dem gesamten Brot</b>	<b>Vermehrung der weißen Pilze &amp; Entstehung von einem großen „Flaumschimmelpilz“</b>	<b>starke Vermehrung des „Flaumschimmelpilzes“ und Entstehung von mehreren grünen Pilzen</b>
<b>Probe 8</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung

Modellierung von Wachstumsprozessen – Schimmelpilz als abstoßendes Beispiel

	<b>Tag 7</b>	<b>Tag 8</b>	<b>Tag 9</b>	<b>Tag 10</b>	<b>Tag 11</b>	<b>Tag 12</b>
<b>Probe 1</b>	<b>Vermehrung der gelben Pilze</b>	<b>Vermehrung der weißen Pilze</b>	<b>zunehmende Vernichtung der weißen Pilze</b>	<b>starke Ausbreitung der gelben Pilze</b>	keine Veränderung	<b>starke Ausbreitung der gelben Pilze</b>
<b>Probe 2</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung
<b>Probe 3</b>	<b>Vermehrung und Ausbreitung der grünen Pilze</b>	<b>Vermehrung und Ausbreitung der grünen und weißen Pilze</b>	<b>Vermehrung der grünen Pilze &amp; Entstehung von mehreren gelben Pilzen</b>	keine Veränderung	<b>Vermehrung der grünen Pilze</b>	<b>Vermehrung des grünen Pilzes + des „Flaumschimmelpilzes“</b>
<b>Probe 4</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung
<b>Probe 5</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung
<b>Probe 6</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung
<b>Probe 7</b>	<b>starke Ausbreitung des „Flaumschimmelpilzes“ und Vermehrung der grünen Pilze</b>	<b>starke Vermehrung des „Flaumschimmelpilzes“ und der grünen Pilze</b>	<b>Vermehrung des „Flaumschimmelpilzes“ und der grünen Pilze</b>	<b>Vermehrung des „Flaumschimmelpilzes“ und der grünen Pilze</b>	<b>Vermehrung des „Flaumschimmelpilzes“ und der grünen Pilze</b>	<b>Vermehrung des „Flaumschimmelpilzes“ und der grünen Pilze</b>
<b>Probe 8</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung

Modellierung von Wachstumsprozessen – Schimmelpilz als abstoßendes Beispiel

	<b>Tag 13</b>	<b>Tag 14</b>	<b>Tag 15</b>	<b>Tag 16</b>	<b>Tag 17</b>	<b>Tag 18 - Tag 34</b>
<b>Probe 1</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	<b>Schimmelpilze gehen langsam zugrunde</b>
<b>Probe 2</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung
<b>Probe 3</b>	<b>Vermehrung der grünen Pilze</b>	<b>Vermehrung der grünen Pilze &amp; Entstehung eines schwarzen Pilzes</b>	<b>Vermehrung der grünen Pilze und des schwarzen Pilzes</b>	<b>zunehmende Vernichtung der weißen Pilze</b>	<b>Ausbreitung der grünen Pilze auf das gesamte Brot!</b>	<b>vollständige Vernichtung der weißen Pilze</b>
<b>Probe 4</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung
<b>Probe 5</b>	<b>Anhäufung von kleinen weißen Punkten</b>	<b>minimale Ausbreitung der weißen Pilze</b>	<b>minimale Ausbreitung der weißen Pilze</b>	<b>minimale Ausbreitung der weißen Pilze</b>	<b>minimale Ausbreitung der weißen Pilze</b>	<b>minimale Ausbreitung der weißen Pilze bzw. keine Veränderung</b>
<b>Probe 6</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung
<b>Probe 7</b>	keine Veränderung	<b>minimale Ausbreitung des „Flaumschimmelpilzes“</b>	<b>minimale Ausbreitung des „Flaumschimmelpilzes“</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	<b>Ausbreitung des „Flaumschimmelpilzes“ auf das gesamte Brot!</b>
<b>Probe 8</b>	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung	keine Veränderung



### 6.3.1. Schimmelpilzwachstum – Probe 1

Bevor ich mit der Modellierung des Schimmelpilzwachstums beginne, möchte ich gerne die Entwicklung der Mikroorganismen anhand einer Fotoreihe darstellen. Die Bilder der anderen Proben können hingegen auf der beiliegenden Foto-CD begutachtet werden.



**Abbildung 50: Tag 2 (Früh)**



**Abbildung 51: Tag 3 (Früh)**



**Abbildung 52: Tag 3 (Abend)**



**Abbildung 53: Tag 4 (Früh)**

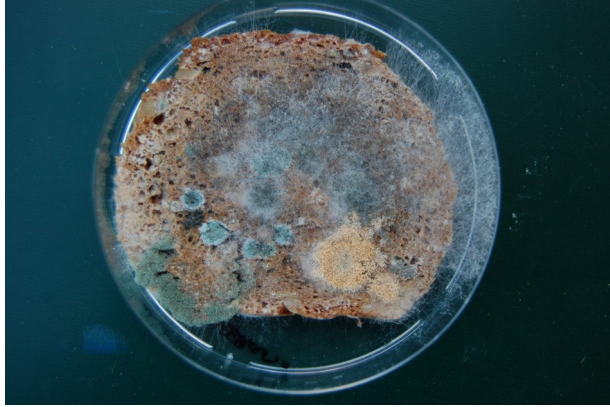


**Abbildung 54: Tag 4 (Abend)**

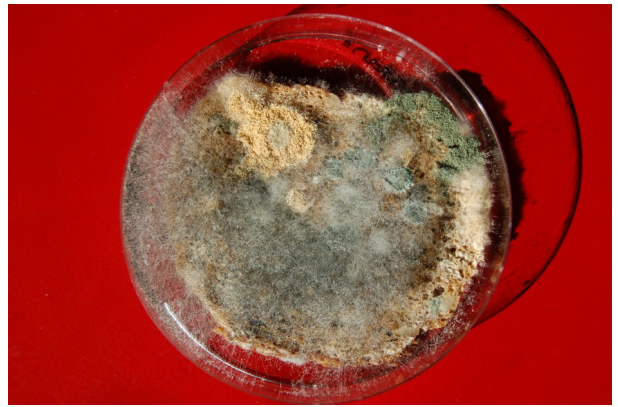


**Abbildung 55: Tag 5 (Früh)**





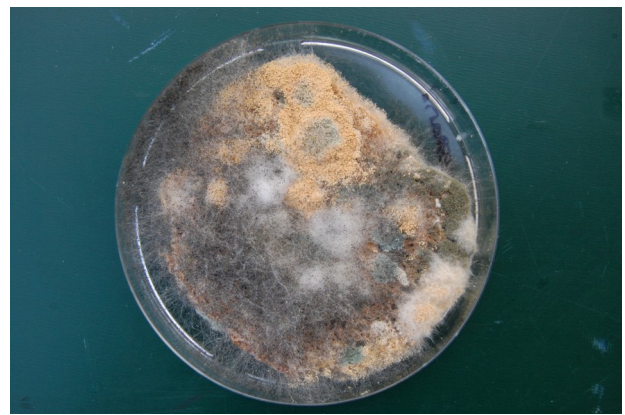
**Abbildung 56: Tag 5 (Abend)**



**Abbildung 57: Tag 6 (Früh)**



**Abbildung 58: Tag 7 (Früh)**



**Abbildung 59: Tag 7 (Abend)**



**Abbildung 60: Tag 8 (Früh)**



**Abbildung 61: Tag 8 (Abend)**





**Abbildung 62: Tag 9 (Früh)**



**Abbildung 63: Tag 9 (Abend)**



**Abbildung 64: Tag 10 (Früh)**



**Abbildung 65: Tag 10 (Abend)**



**Abbildung 66: Tag 11 (Früh)**



**Abbildung 67: Tag 11 (Abend)**





**Abbildung 68: Tag 12 (Früh)**



**Abbildung 69: Tag 13 (Früh)**



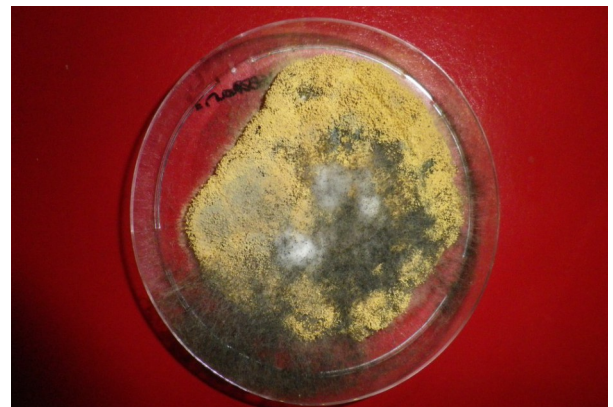
**Abbildung 70: Tag 14 (Früh)**



**Abbildung 71: Tag 15 (Früh)**



**Abbildung 72: Tag 16 (Früh)**



**Abbildung 73: Tag 17 (Früh)**





**Abbildung 74: Tag 18 (Früh)**



**Abbildung 75: Tag 19 (Früh)**



**Abbildung 76: Tag 20 (Früh)**



**Abbildung 77: Tag 21 (Früh)**



**Abbildung 78: Tag 22 (Früh)**



**Abbildung 79: Tag 23 (Früh)**

Im Folgenden findet man eine Wertetabelle, deren Werte ich mit der oben beschriebenen Verfahren errechnet habe. Die Abbildung 80 stellt das logistische Wachstumsmodell dar, welches ich an die realen Schimmelpilzdaten mithilfe von GeoGebra approximiert habe. Diese Art der Auswertung werde ich auch bei den anderen Proben anwenden.

t [Tage]	S(t) [%]
0	0,00
2	0,20
3	4,49
3,5	8,25
4	15,70
4,5	28,58
5	49,22
5,5	76,31
6	88,95
7	99,69
7,5	99,92
8	100,00

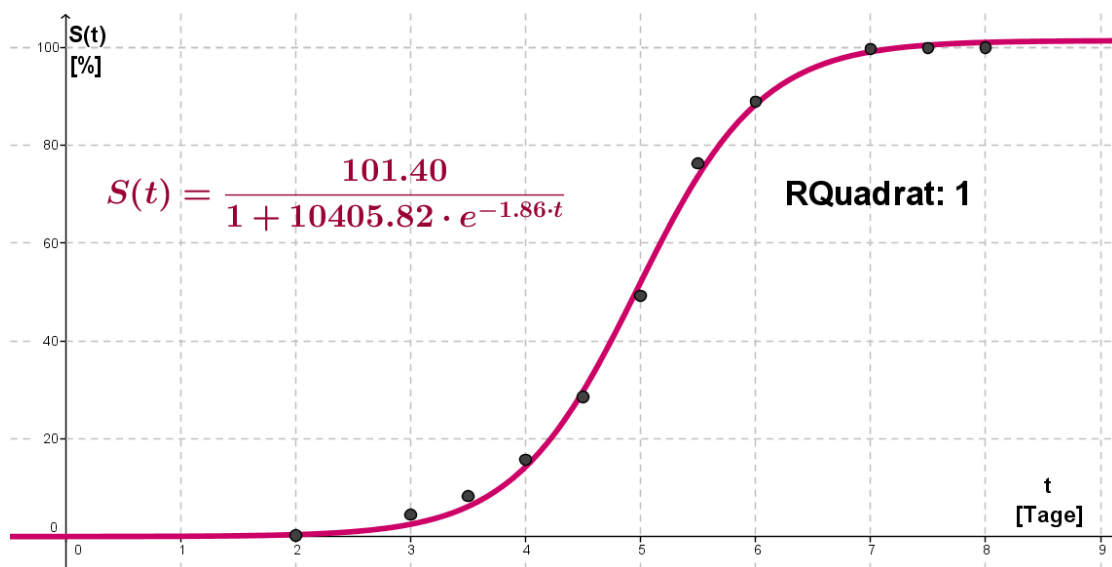


Abbildung 80: Schimmelpilzwachstum - Probe 1

### 6.3.2. Schimmelpilzwachstum – Probe 3

t [Tage]	S(t) [%]
0	0,00
1	1,00
2	2,18
3	3,48
3,5	5,76
4	7,00
4,5	17,13
5	18,46
5,5	23,80
6	28,25
6,5	35,57
7	40,34
7,5	43,59
8	48,47
8,5	54,29

t [Tage]	S(t) [%]
9	64,42
9,5	65,36
10	78,01
10,5	79,86
11	81,93
11,5	90,67
12	93,07
12,5	94,01
13	95,29
13,5	95,32
14	96,90
14,5	98,05
15	98,95
16	100,00

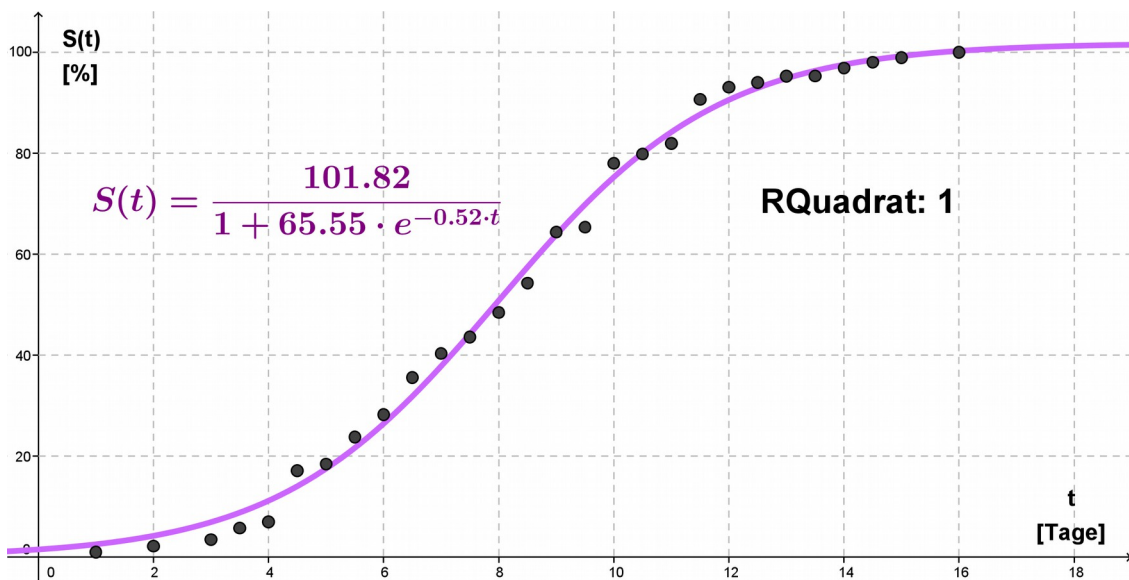


Abbildung 81: Schimmelpilzwachstum - Probe 3

### 6.3.3. Schimmelpilzwachstum – Probe 5

t [Tage]	S(t) [%]
0	0,00
13,5	4,11
14	4,77
16	9,59
16,5	9,78
17	9,88
17,5	11,87
18	12,16
18,5	15,03
19	15,72
19,5	18,51
20	19,33
20,5	21,01
21	21,16
21,5	21,37
22	23,05
22,5	23,57
23	23,30

t [Tage]	S(t) [%]
23,5	23,47
24	23,76
25	23,81
25,5	24,67
26	25,02
26,5	26,89
27	26,60
27,5	26,92
28	26,90
28,5	26,69
29	27,29
29,5	27,60
30	27,82
30,5	27,74
31	28,49
31,5	28,17
32	29,09
32,5	29,11

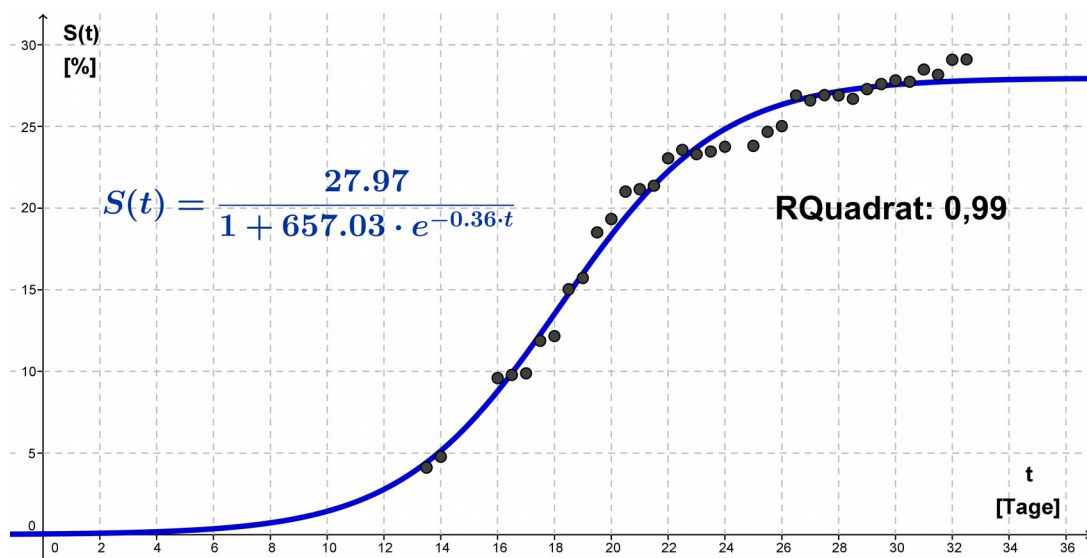


Abbildung 82: Schimmelpilzwachstum - Probe 5



### 6.3.4. Schimmelpilzwachstum – Probe 7

t [Tage]	S(t) [%]
0	0,00
3	1,25
4	6,14
4,5	9,70
5	12,63
5,5	23,52
6	43,90
6,5	63,38
7	64,99
7,5	70,30
8	72,73
8,5	77,66

t [Tage]	S(t) [%]
9	81,54
9,5	86,86
10	88,01
10,5	90,11
11	93,21
11,5	95,24
12	95,61
12,5	98,14
13	98,49
13,5	98,58
14	98,91
14,5	100,00

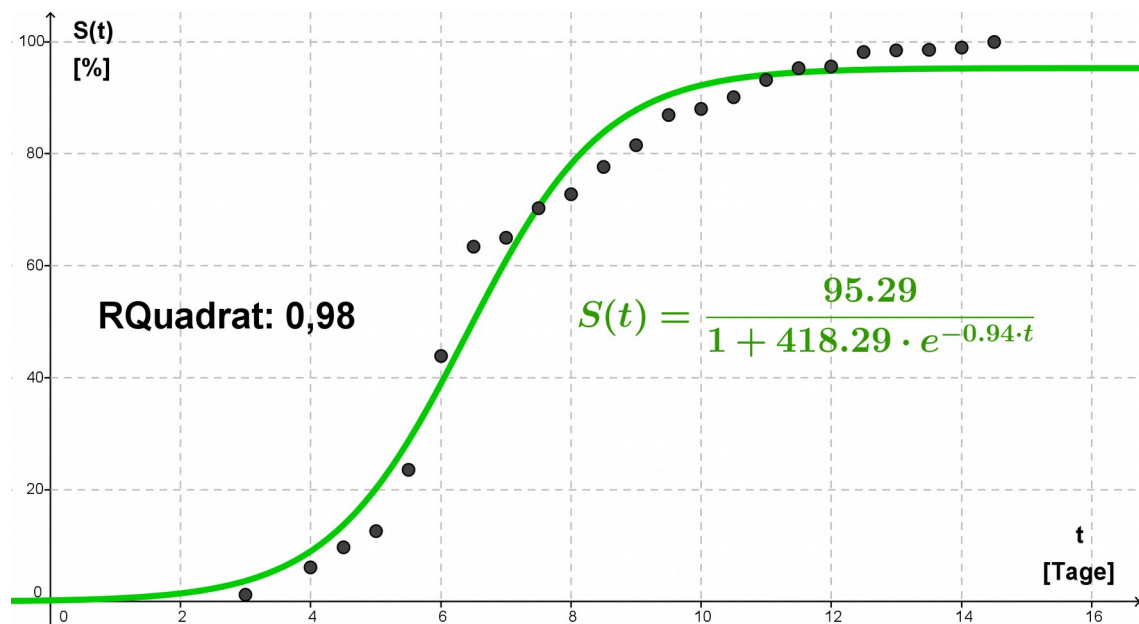


Abbildung 83: Schimmelpilzwachstum - Probe 7



## 6.4. Reflexion der Ergebnisse

### 6.4.1. Probe 1

Beim Betrachten der Abbildung 80 (Seite 76) fällt auf, dass zwischen der approximierten Wachstumskurve und den realen Schimmelpilzdaten nur eine minimale Diskrepanz auftritt. Mit anderen Worten bedeutet das, dass das Schimmelpilzwachstum der Probe 1 sehr gut mithilfe des logistischen Wachstumsgesetzes modelliert werden kann.

Weiters geht aus der besagten Abbildung hervor, dass das Schimmelpilzwachstum bereits nach zwei Tagen eingesetzt hat und das gesamte Brot nach erstaunlichen acht Tagen von diversen Schimmelpilzgattungen übersät gewesen ist. Die extrem schnelle Entwicklung der Mikroorganismen kann auf die optimalen Umweltbedingungen zurückgeführt werden, denn diese Probe ist in einem dunklen Raum bei konstanten 22 °C gelagert worden. Der Lichtmangel spielt in diesem Fall keine Rolle, da es sich bei Schimmelpilzen um heterotrophe Organismen handelt. Die konstante Temperatur wirkt sich mit Sicherheit auch positiv auf die Entwicklung der Schimmelpilze aus. Während Sauerstoff immer vorhanden gewesen ist, hat die Konzentration an Nährstoffen und an frei verfügbarem Wasser sukzessive abgenommen. Sowohl der Nahrungs- und Wassermangel, als auch das geringe Platzangebot haben zu einer Stagnation des Wachstums beigetragen.

Die folgende Abbildung zeigt die Probe 1 nach einigen Versuchstagen – das Vollkornbrot ist bereits vollständig von diversen Schimmelpilzgattungen befallen worden. Meinen Recherchen nach handelt es sich bei diesen Schimmelpilzen um den Köpfchenschimmel (weiß/grau) und um den sogenannten *Aspergillus flavus* (gelb), eine besondere Art des Gießkannenschimmels. Nähere Informationen zu den beteiligten Schimmelpilzen findet man in [21], [25] und [33].



**Abbildung 84: Schimmelpilzbefall - Probe 1**

### 6.4.2. Probe 3

Beim Analysieren der Abbildung 81 (Seite 77) kann man erkennen, dass die realen Schimmelpilzdaten in Hinblick auf die approximierete Wachstumskurve nur geringe Abweichungen aufweisen. Demnach kann auch das Schimmelpilzwachstum der Probe 3 hervorragend mithilfe des logistischen Wachstumsgesetzes modelliert werden.

Die besagte Abbildung verrät außerdem, dass das Wachstum der Mikroorganismen bereits nach einem Tag eingesetzt hat, das Brot aber erst nach 16 Tagen vollständig von Schimmelpilzen bedeckt gewesen ist. Demnach nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit der Probe 3 im Vergleich zur Wachstumsgeschwindigkeit der Probe 1 einen deutlich geringeren Wert an. Leider kann ich mir den Unterschied in der Wachstumsgeschwindigkeit nicht erklären, denn auch die Probe 3 ist meines Wissens optimalen Umweltbedingungen ausgesetzt gewesen. Als Lagerstätte hat ein belichteter Raum mit konstanten 25 °C gedient – die Temperatur wäre diversen Literaturen nach optimal für das Schimmelpilzwachstum. Sowohl das Sauerstoffangebot, als auch das Nahrungs- bzw. Wasserangebot sind prinzipiell immer ausreichend gewesen, wobei letzteres im Laufe der Zeit logischerweise abgenommen und als Grund der Stagnation fungiert hat. Möglicherweise kann man das verlangsamte Wachstum auf den pH-Wert oder auf den  $a_w$ -Wert, die ich aufgrund fehlender technischer Mittel nicht bestimmen konnte, zurückführen.

Die Abbildung 85 stellt die Probe 3 nach einigen Versuchstagen dar – das gesamte Vollkornbrot ist bereits von unterschiedlichen Schimmelpilzarten befallen worden. Meinen Recherchen nach sind der Pinselschimmel (grün) sowie der sogenannte Rhizopus stolonifer (schwarz), der auch Gemeiner Brotschimmel genannt wird, im Spiel. Mehr Informationen zu den beteiligten Mikroorganismen kann man sich in [24] und [35] einholen.



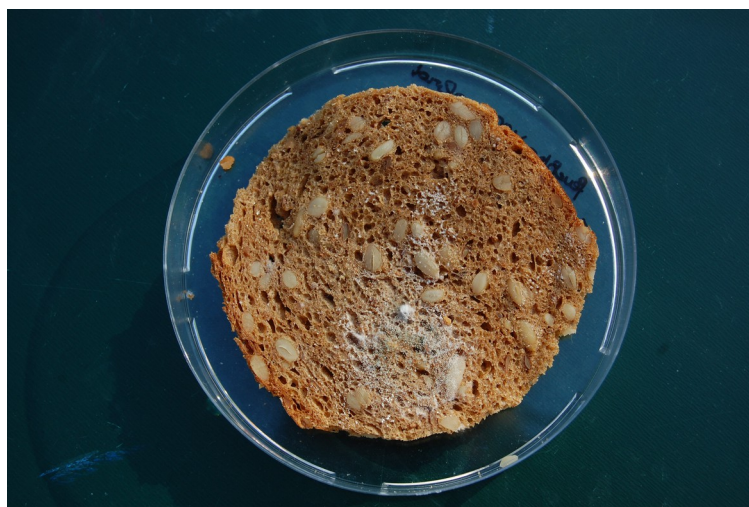
**Abbildung 85: Schimmelpilzbefall - Probe 3**

### 6.4.3. Probe 5

Wenn man einen Blick auf die Abbildung 82 (Seite 78) wirft, stellt man wahrscheinlich fest, dass die realen Schimmelpilzdaten und die approximierte Wachstumskurve viele Gemeinsamkeiten haben, aber doch eine gewisse Diskrepanz vorhanden ist. Das Schimmelpilzwachstum der Probe 5 kann aber trotzdem relativ gut mithilfe des logistischen Wachstumsmodells dargestellt werden.

Der besagten Abbildung kann man auch entnehmen, dass das Schimmelpilzwachstum erst nach 13 Tagen eingesetzt hat und es nach knapp 33 Tagen bei ungefähr 29 % Schimmelpilzbefall in eine Stagnation übergegangen ist – die Kapazitätsgrenze ist also nicht erreicht worden. Für das äußerst geringe Schimmelpilzwachstum kann man die schlechten Umweltbedingungen zur Verantwortung ziehen, denn der Kühlschrank hat mit seinen konstanten 6 °C keineswegs als optimale Umgebung für das gewünschte Wachstum gedient. Geringe Temperaturen tragen im Allgemeinen zu einer Verlangsamung sämtlicher Stoffwechselaktivitäten und in manchen Fällen auch zum Tod der Mikroorganismen bei, was man speziell bei dieser Probe sehr gut beobachten hat können. Dem Lichtmangel ist hingegen keine Bedeutung beizumessen, da Schimmelpilzen, wie schon erwähnt, heterotrophe Organismen sind. Im Gegensatz zu den anderen Proben ist hier immer genügend Sauerstoff, Nahrung und frei verfügbares Wasser vorhanden gewesen, da die Schimmelpilze nie ihre Kapazitätsgrenze erreicht haben.

Die Abbildung 86 gibt einen Einblick in den Schimmelpilzbefall der Probe 5 – das Wachstum der Mikroorganismen zeichnet sich zu diesem Zeitpunkt schon durch eine Stagnation aus. Meines Wissens ist bei dieser Probe lediglich der Köpfchenschimmel (weiß) beteiligt. Er befindet sich während des gesamten Versuchszeitraumes aufgrund der schlechten Umweltbedingungen nur im Anfangsstadium, das heißt, er nimmt noch nicht das typische Aussehen eines Flaumschimmelpilzes an. Genaueres zum beteiligten Schimmelpilz findet man in [33].



**Abbildung 86: Schimmelpilzbefall - Probe 5**



#### 6.4.4. Probe 7

Betrachtet man die Abbildung 83 (Seite 79), so kommt man zu dem Schluss, dass die realen Schimmelpilzdaten die Grundzüge bzw. einige typische Merkmale des logistischen Wachstums aufweisen. Obwohl eine gewisse Diskrepanz vorhanden ist und das Wachstumsverhalten ab dem 7. Tag stark dem eines linearen Wachstumsmodells ähnelt, stellt das logistische Wachstumsmodell das beste Modell zur Beschreibung der Schimmelpilzentwicklung dar.

Weiters geht aus der besagten Abbildung hervor, dass das Schimmelpilzwachstum schon nach drei Tagen eingesetzt hat und das Brot nach knapp 15 Tagen von einem sogenannten Schimmelpilzrasen vollständig überzogen gewesen ist. Im Vergleich zur Probe 1 zeichnet sich die Mikroorganismenentwicklung der Probe 7 durch eine relativ mäßige Wachstumsgeschwindigkeit aus. Diese Tatsache ist wiederum auf die gegebenen Umweltbedingungen zurückzuführen, denn die Probe 7 ist im Schatten bei schwankenden Temperaturen, deren Spannweite von 18 °C bis 35 °C gereicht hat, gelagert worden. Mit anderen Worten bedeutet das, dass diese Probe der Gewalt der Natur ausgesetzt gewesen ist. Die Schwankungen in der Temperatur haben sich mit Sicherheit negativ auf das Schimmelpilzwachstum ausgewirkt, da sich die Mikroorganismen ständig auf andere Bedingungen einstellen haben müssen. Während Sauerstoff immer vorhanden gewesen ist, hat die Konzentration an Nährstoffen und an frei verfügbarem Wasser stetig abgenommen.

Die Abbildung 87 zeigt die Probe 7 nach einigen Versuchstagen – das Vollkornbrot ist zu diesem Zeitpunkt bereits vollständig von einem Schimmelpilzrasen überzogen gewesen. Bei den beteiligten Schimmelpilzen handelt es sich wieder um den Köpfchenschimmel (weiß/grau) und um den Pinselschimmel (grün). Nähere Informationen zu den besagten Schimmelpilzgattungen kann man sich wie schon gesagt in [33] und [35] einholen.



**Abbildung 87: Schimmelpilzbefall - Probe 7**

### 6.4.5. Probe 2, 4, 6 und 8

Die Proben 2, 4, 6 und 8 verzeichnen über den gesamten Versuchszeitraum kein Schimmelpilzwachstum. Auffallend ist dabei, dass bei all diesen Proben ein Roggen-Dinkel-Brot als Nährmedium gedient hat und kein Vollkornbrot. Den Umweltbedingungen kann in diesem Fall keinerlei Schuld beigemessen werden, da die Proben mit Schimmelpilzentwicklung denselben Bedingungen ausgesetzt gewesen sind wie die Proben ohne Mikroorganismenwachstum. Eine Ausnahme stellt die Probe 2 dar, die auf der Terrasse in der prallen Sonne gelagert worden ist und aufgrund der extrem hohen Temperaturen bzw. des Wassermangels kein Schimmelpilzwachstum aufweist.

All diesen Erkenntnissen nach komme ich zu dem Schluss, dass das Roggen-Dinkel-Brot entweder nicht die notwendigen Nährstoffe für ein Wachstum von Mikroorganismen liefert oder irgendwelche wachstumshemmenden Konservierungsstoffe beigemischt worden sind.

## 6.5. Persönliches Résumé des Projektes

Die Beschäftigung mit den theoretischen Aspekten der Modellierung von Wachstumsprozessen in den ersten Kapiteln bildete die Grundlage für die Durchführung und Analyse der soeben beschriebenen Experimente. Ehrlich gesagt hat es mir eine Menge Spaß bereitet, das Wachstumsverhalten von Schimmelpilzen regelmäßig zu beobachten und es mithilfe einer Fotodokumentation festzuhalten, um den täglichen Zuwachs an Mikroorganismen zu ermitteln. Da ich mir bereits im Vorhinein diesbezüglich Wissen angeeignet hatte, war das Experimentieren mit den Schimmelpilzen gleich umso spannender.

Äußerst zufrieden kann ich auf die Ergebnisse bzw. Auswertungen der durchgeführten Experimente blicken. Aufgrund meiner Untersuchungen kann ich die allgemein gültige These, dass Wachstumsvorgänge in der Natur in den meisten Fällen dem logistischen Wachstumsgesetz folgen, auch für das Schimmelpilzwachstum auf einem Vollkornbrot verifizieren. Denn das Wachstumsverhalten von den bereits beschriebenen Schimmelpilzarten kann nahezu perfekt mit dem logistischen Modell modelliert werden. Die Übereinstimmung der realen Daten mit dem approximierten Wachstumsmodell habe ich auf GeoGebra mithilfe des Befehls **RQuadrat** überprüft. Der Grad der Übereinstimmung wird mit Werten zwischen 0 und 1 beschrieben, wobei niedrige Werte eine nur unzureichende Übereinstimmung und hohe Werte eine nahezu totale Übereinstimmung verdeutlichen. Die Analyse meiner Wachstumsmodelle lieferte erfreulicherweise Werte zwischen 0,98 und 1 – eine extrem hohe Übereinstimmung! Kleinere Störungen oder Unregelmäßigkeiten im Verlauf der realen Datenpunkte sind höchstwahrscheinlich auf die graphische Auswertung, die zum Teil nur oberflächlich möglich war, zurückzuführen.

# Literaturverzeichnis

- [1] **Ableitinger Christoph**, *Diskrete biomathematische Modelle im Schulunterricht – Chancen aus der Sicht der Mathematikdidaktik*, 2008  
[http://othes.univie.ac.at/2459/1/2008-10-30\\_9902077.pdf](http://othes.univie.ac.at/2459/1/2008-10-30_9902077.pdf) (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)
- [2] **Aubauer Hans Peter**, *Logistisches Wachstum ohne Zeitverzögerung*, 2013  
[http://www.sustainicum.at/files/projects/77/de/Logistisches\\_Wachstum\\_ohne\\_Zeitverzoeigerung.pdf](http://www.sustainicum.at/files/projects/77/de/Logistisches_Wachstum_ohne_Zeitverzoeigerung.pdf) (zuletzt aufgerufen am 22. 12. 2013)
- [3] **Baumann Jonas und Pfeil Jan**, *Modellieren im Mathematikunterricht*, 2008/09  
[http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/lv\\_ph/sem-begabfoerd/Vortrag-Modellierung-Baumann-Pfeil.pdf](http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/lv_ph/sem-begabfoerd/Vortrag-Modellierung-Baumann-Pfeil.pdf) (zuletzt aufgerufen am 12. 10. 2013)
- [4] **Bellmann Alexander**, *Schimmel-Untersuchung*  
<http://www.schimmel-untersuchung.de/Schimmel/Impressum/Alexander-Bellmann.html> (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)
- [5] **BIFIE und BMUKK**, *Themenheft Mathematik „Modellieren“*, 2012  
[https://www.bifie.at/system/files/dl/bist\\_m4\\_themenheft\\_modellieren\\_2012-02-08.pdf](https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m4_themenheft_modellieren_2012-02-08.pdf) (zuletzt aufgerufen am 28. 9. 2013)
- [6] **Bihler Pascal**, *Logistisches Wachstum*, 2000  
[http://www.bi-on.de/mixed/pdf/m3\\_script.pdf](http://www.bi-on.de/mixed/pdf/m3_script.pdf) (zuletzt aufgerufen am 30. 11. 2013)
- [7] **Burger Martin**, *Mathematische Modellierung*, 2006/07  
[http://wwwmath.uni-muenster.de/num/Vorlesungen/Modellierung\\_06/skript.pdf](http://wwwmath.uni-muenster.de/num/Vorlesungen/Modellierung_06/skript.pdf) (zuletzt aufgerufen am 28. 9. 2013)
- [8] **Egert J.**, *Schimmelpilze im Innenraum: Wachstumsbedingungen, gesundheitliche Gefährdung, Bekämpfung*, 1999  
[http://www.dgzfp.de/Portals/24/PDFs/BBonline/bb\\_69-CD/bb69-u1.pdf](http://www.dgzfp.de/Portals/24/PDFs/BBonline/bb_69-CD/bb69-u1.pdf) (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)
- [9] **Gotzen Bernd**, *Elementare Wege zur mathematischen Modellierung: Fallbeispiele aus Biowissenschaften und Chemie*, 2006  
<http://www.matha.rwth-aachen.de/de/modellierung/projekt/gotzen.pdf> (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)
- [10] **Grüne Lars**, *Modellierung mit Differentialrechnung*, 2008  
<http://numerik.mathematik.uni-bayreuth.de/~lgruene/modellierung08/skript.pdf> (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)
- [11] **Helmich Ulrich**, *Konkurrenz*, 2012  
<http://www.u-helmich.de/bio/oeK/oeK03/punkt01/konkurrenz.html> (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)
- [12] **Kausel Katharina**, *Modelle mit zwei Zustandsgrößen. Mathematische Modelle in der Biologie*, 2012  
<http://www.asc.tuwien.ac.at/~gaby/nmla/Kausel.pdf> (zuletzt aufgerufen am 26. 12. 2013)
- [13] **Kittel Matthias**, *Räuber-Beute mit Zeitschritt und Störung*, 2011  
[http://wikis.zum.de/medienvielfalt/images/9/95/Raeuber\\_beute\\_mit\\_zeitschritt\\_und\\_stoerung.xls](http://wikis.zum.de/medienvielfalt/images/9/95/Raeuber_beute_mit_zeitschritt_und_stoerung.xls) (zuletzt aufgerufen am 21. 12. 2013)
- [14] **Kittel Matthias**, *Räuber-Beute-Modell*, 2011  
<http://wikis.zum.de/medienvielfalt/R%C3%A4uber-Beute-Modell> (zuletzt aufgerufen am 22. 12. 2013)
- [15] **Kohlmeier Cora**, *Einführung in die Mathematische Modellierung*, 2005/2006  
[http://www.staff.uni-oldenburg.de/cora.kohlmeier/scripts/skript\\_Gy.pdf](http://www.staff.uni-oldenburg.de/cora.kohlmeier/scripts/skript_Gy.pdf) (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)
- [16] **Nagl Gudrun**, *Mykologie (Pilzkunde)*  
<http://nagl.netzreport.com/dokumente/fh/02fh.pdf> (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)
- [17] **Nagl Gudrun**, *Wachstum der Mikroorganismen*  
<http://nagl.netzreport.com/dokumente/fh/03fh.pdf> (zuletzt aufgerufen am 26. 12. 2013)

- [18] **Nunekpeku Denis**, *Lotka-Volterra-Regeln kurz und knapp*  
<http://bioleistungskurs.de/tag/lotka-volterra-regeln-kurz-und-knapp/> (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)
- [19] **ohne Autor**, *Ableiten*  
<http://www.schulminator.com/mathematik/ableiten> (zuletzt aufgerufen am 19. 1. 2014)
- [20] **ohne Autor**, *Ableitung*  
<http://www.serlo.org/math/wiki/article/view/ableitung> (zuletzt aufgerufen am 19. 1. 2014)
- [21] **ohne Autor**, *Aspergillus flavus*  
<http://www.schimmel-schimmelpilze.de/aspergillus-flavus.html> (zuletzt aufgerufen am 2. 1. 2014)
- [22] **ohne Autor**, *Differentialrechnung*  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung> (zuletzt aufgerufen am 19. 1. 2014)
- [23] **ohne Autor**, *Dominik Leiß*  
[http://madipedia.org/wiki/Dominik\\_Lei%C3%9F](http://madipedia.org/wiki/Dominik_Lei%C3%9F) (zuletzt aufgerufen am 12. 10. 2013)
- [24] **ohne Autor**, *Gemeiner Brotschimmel*  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Gemeiner\\_Brotschimmel](http://de.wikipedia.org/wiki/Gemeiner_Brotschimmel) (zuletzt aufgerufen am 2. 1. 2014)
- [25] **ohne Autor**, *Gießkannenschimmel*  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Aspergillus> (zuletzt aufgerufen am 2. 1. 2014)
- [26] **ohne Autor**, *Hemmung des Wachstums. Hitze, Bestrahlung und Filtration*, 2011  
<http://www.staff.uni-mainz.de/freesec/Download/Mikrobiologie/Mikrobio-Anfaengeruebung/Hemmung%20Wachstum.pdf> (zuletzt aufgerufen am 27. 12. 2013)
- [27] **ohne Autor**, *Konkurrenz (Ökologie)*  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Konkurrenz\\_\(%C3%96kologie\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Konkurrenz_(%C3%96kologie)) (zuletzt aufgerufen am 26. 12. 2013)
- [28] **ohne Autor**, *Lotka-Volterra-Regeln*  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-Regeln> (zuletzt aufgerufen am 23. 12. 2013)
- [29] **ohne Autor**, *Mathematisches Modell*  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches\\_Modell#Begriffe\\_in\\_der\\_Modellierung](http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Modell#Begriffe_in_der_Modellierung) (zuletzt aufgerufen am 28. 9. 2013)
- [30] **ohne Autor**, *Mikroorganismen und Lebensmittel*  
[http://www.epralima.com/infoodquality/Materiais\\_de\\_formacao\\_DE/Mikroorganismen\\_und\\_Lebensmittel.pdf](http://www.epralima.com/infoodquality/Materiais_de_formacao_DE/Mikroorganismen_und_Lebensmittel.pdf) (zuletzt aufgerufen am 27. 12. 2013)
- [31] **ohne Autor**, *Modell*  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Modell> (zuletzt aufgerufen am 28. 9. 2013)
- [32] **ohne Autor**, *Modelle der Populationsdynamik*  
<http://www.imise.uni-leipzig.de/Lehre/Semester/2006/EMIB/Populationsdynamik.pdf> (zuletzt aufgerufen am 23. 12. 2013)
- [33] **ohne Autor**, *Mucor*  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Mucor> (zuletzt aufgerufen am 2. 1. 2014)
- [34] **ohne Autor**, *Mutualismus (Biologie)*  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Mutualismus\\_\(Biologie\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Mutualismus_(Biologie)) (zuletzt aufgerufen am 26. 12. 2013)
- [35] **ohne Autor**, *Penecillium*  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Penicillium> (zuletzt aufgerufen am 2. 1. 2014)
- [36] **ohne Autor**, *Populationsdynamik*  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Populationsdynamik> (zuletzt aufgerufen am 23. 12. 2014)
- [37] **ohne Autor**, *Räuber-Beute-Beziehung*  
<http://de.wikipedia.org/wiki/R%C3%A4uber-Beute-Beziehung> (zuletzt aufgerufen am 23. 12. 2013)
- [38] **ohne Autor**, *Schimmelpilz*  
<http://flexikon.doccheck.com/de/Schimmelpilz> (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)



- [39] **ohne Autor**, *Schimmelpilz*  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Schimmelpilz> (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)
- [40] **ohne Autor**, *Wachstum (Biologie)*  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum\\_\(Biologie\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum_(Biologie)) (zuletzt aufgerufen am 31. 10. 2013)
- [41] **ohne Autor**, *Wachstumsfaktoren*  
<http://wiki.chemieplanet.org/wiki/Wachstumsfaktoren> (zuletzt aufgerufen am 26. 12. 2013)
- [42] **ohne Autor**, *Wachstum (Mathematik)*  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum\\_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Wachstum_(Mathematik)) (zuletzt aufgerufen am 20. 10. 2013)
- [43] **ohne Autor**, *Werner Blum*  
[http://madipedia.org/wiki/Werner\\_Blum](http://madipedia.org/wiki/Werner_Blum) (zuletzt aufgerufen am 12. 10. 2013)
- [44] **Ortlieb Claus Peter**, *Einführung in die mathematische Modellierung*, 2009  
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/ortlieb/modellierung/ModSimSkript.pdf> (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)
- [45] **Ortlieb Claus Peter**, *Heinrich Hertz und das Konzept des mathematischen Modells*  
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/ortlieb/OrtliebHertzModell.pdf> (zuletzt aufgerufen am 28. 9. 2013)
- [46] **Ortlieb Claus Peter**, *Exakte Naturwissenschaft und Modellbegriff*, 2000  
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/ortlieb/hb15exaktnatmod.pdf> (zuletzt aufgerufen am 28. 9. 2013)
- [47] **Pfenninger Markus**, *Interspezifische Interaktionen. Eine Einführung*  
<http://user.uni-frankfurt.de/~markusp/Interspezifische%20Interaktionen.pdf> (zuletzt aufgerufen am 26. 12. 2013)
- [48] **Prüß Jan W., Schnaubelt Roland, Rico Zacher**; *Mathematische Modelle in der Biologie. Deterministische homogene Systeme*, Birkhäuser Verlag, 2007
- [49] **Reichert Katharina**, *Logistisches Wachstum am Beispiel einer Hefekultur*, 2012  
<http://www.fvss.de/assets/media/jahresarbeiten/mathe/logistik.pdf> (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)
- [50] **Reiß Jürgen**, *Schimmelpilze: Lebensweise, Nutzen, Schaden, Bekämpfung*, Springer Verlag, 1997
- [51] **Sanosil AG**, *Schimmelbekämpfung*  
<http://www.schimmelbekaempfung.ch/schimmelpilze.htm> (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)
- [52] **Schuster Wolfgang**, *Mathematik für Naturwissenschaftler*  
[http://home.mathematik.uni-freiburg.de/wolke/Schuster\\_Skript.pdf](http://home.mathematik.uni-freiburg.de/wolke/Schuster_Skript.pdf) (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)
- [53] **Struckmeier Jens**, *Mathematische Modellierung und Simulation*, 2004/05  
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/struckmeier/modsim/Kap1.pdf> (zuletzt aufgerufen am 28. 9. 2013)
- [54] **Sunhild Trost Wiebke Johanna**, *Aspekte der mathematischen Modellierung in der Biologie*, 2005  
<http://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2007102419498/1/BachelorarbeitTrost.pdf> (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)
- [55] **Ulrich Bernhard**, *Logistisches Wachstum*, 2013  
[http://mathekurs.ch/mk/files/spezialthemen/logist\\_wachstum\\_2\\_s.pdf](http://mathekurs.ch/mk/files/spezialthemen/logist_wachstum_2_s.pdf) (zuletzt aufgerufen am 22. 12. 2013)
- [56] **Volkening Nils**, *Lufthygiene/Krankenhaushygiene*, 2000  
<http://home.arcor.de/volkening/Betrieb/Biolab/Wochenberichte/Wochenbericht%20KH%20LH.pdf> (zuletzt aufgerufen am 28. 12. 2013)
- [57] **Wihler Thomas P.**, *Mathematik für Biologie*, 2009  
<http://www.math.ch/csf/mathematik/BioMath.pdf> (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)
- [58] **Wolf Judith Eva Maria**, *Wachstumsmodelle mit GeoGebra 3.2*, Juni 2009  
[http://othes.univie.ac.at/5505/1/2009-06-25\\_0303641.pdf](http://othes.univie.ac.at/5505/1/2009-06-25_0303641.pdf) (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)

# Abbildungsverzeichnis:

**Abbildung 1:** Modellierungskreislauf

[https://www.bifie.at/system/files/dl/bist\\_m4\\_themenheft\\_modellieren\\_2012-02-08.pdf](https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m4_themenheft_modellieren_2012-02-08.pdf) (Seite 6) (zuletzt aufgerufen am 28.9. 2013)

**Abbildung 2:** Arten des Wachstums anhand von linearen Funktionen

**Abbildung 3:** Anfangsbestand - Wachstumskonstante

**Abbildung 4:** absolute Änderungsrate

**Abbildung 5:** mittlere Änderungsrate

**Abbildung 6:** momentane Änderungsrate

**Abbildung 7:** Extremum der Wachstumsgeschwindigkeit

**Abbildung 8:** Grenzverhalten von Wachstumsprozessen

**Abbildung 9:** Krümmungsverhalten von Wachstumsfunktionen

**Abbildung 10:** Kontinuität von Messungen

**Abbildung 11:** Möglichkeiten der Periodizität

**Abbildung 12:** Flussdiagramm – lineares Wachstum

**Abbildung 13:** lineares Wachstum

**Abbildung 14:** lineares Wachstum einer Tierpopulation

**Abbildung 15:** Wachstum einer Hefekultur

<http://www.fvss.de/assets/media/jahresarbeiten/mathe/logistik.pdf> (Seite 7) (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)

**Abbildung 16:** Hefekultur – lineares Wachstumsmodell

**Abbildung 17:** Flussdiagramm – exponentielles Wachstum

**Abbildung 18:** exponentielles Wachstum

**Abbildung 19:** Verdopplungszeit

**Abbildung 20:** Halbwertszeit

**Abbildung 21:** exponentielles Wachstum einer Virenkultur

**Abbildung 22:** Hefekultur – exponentielles Wachstumsmodell

**Abbildung 23:** Flussdiagramm – beschränktes Wachstum

**Abbildung 24:** beschränktes Wachstum

**Abbildung 25:** nach unten beschränkte A.

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wachstum\\_nach\\_unten.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wachstum_nach_unten.png) (zuletzt aufgerufen am 5. 1. 2014)

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en>

**Abbildung 26:** nach oben beschränktes W.

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wachstum\\_nach\\_oben.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wachstum_nach_oben.png) (zuletzt aufgerufen am 5. 1. 2014)

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en>

**Abbildung 27:** beschränktes Wachstum – Marktsättigung

**Abbildung 28:** Hefekultur – beschränktes Wachstumsmodell

**Abbildung 29:** Hefekultur – beschränktes Wachstumsmodell (andere Maßstäbe)

**Abbildung 30:** Flussdiagramm – logistisches Wachstum

**Abbildung 31:** logistisches Wachstum

**Abbildung 32:** logistisches Wachstum - Grippeinfektion

**Abbildung 33:** Hefekultur – logistisches Wachstumsmodell

**Abbildung 34:** Lotka-Volterra-Modell

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:LotkaVolterra.svg> (zuletzt aufgerufen am 22. 12. 2013)

[http://commons.wikimedia.org/wiki/GNU\\_Free\\_Documentation\\_License](http://commons.wikimedia.org/wiki/GNU_Free_Documentation_License)

**Abbildung 35:** Räuber-Beute-Modell mit Zeitschritt

[http://wikis.zum.de/medienvielfalt/images/9/95/Raeuber\\_beute\\_mit\\_zeitschritt\\_und\\_stoerung.xls](http://wikis.zum.de/medienvielfalt/images/9/95/Raeuber_beute_mit_zeitschritt_und_stoerung.xls) (zuletzt aufgerufen am 22. 12. 2013)

**Abbildung 36:** Phasenraumdiagramm

<http://www.matkit.at/kommt/> (zuletzt aufgerufen am 22. 12. 2013)

**Abbildung 37:** Zeitdiagramm

<http://www.matkit.at/kommt/> (zuletzt aufgerufen am 22. 12. 2013)

**Abbildung 38:** Konkurrenzmodell – Dominanz

[http://othes.univie.ac.at/2459/1/2008-10-30\\_9902077.pdf](http://othes.univie.ac.at/2459/1/2008-10-30_9902077.pdf) (Seite 71) (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)

**Abbildung 39:** Konkurrenzmodell – Bistabilität

[http://othes.univie.ac.at/2459/1/2008-10-30\\_9902077.pdf](http://othes.univie.ac.at/2459/1/2008-10-30_9902077.pdf) (Seite 72) (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)

**Abbildung 40:** Konkurrenzmodell – stabile Koexistenz

[http://othes.univie.ac.at/2459/1/2008-10-30\\_9902077.pdf](http://othes.univie.ac.at/2459/1/2008-10-30_9902077.pdf) (Seite 73) (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)

**Abbildung 41:** Mutualismus

[http://othes.univie.ac.at/2459/1/2008-10-30\\_9902077.pdf](http://othes.univie.ac.at/2459/1/2008-10-30_9902077.pdf) (Seite 67) (zuletzt aufgerufen am 7. 9. 2013)

**Abbildung 42:** Temperaturabhängigkeit der Mikroben

<http://wiki.chemieplanet.org/wiki/Datei:Kardinaltemp.jpeg> (zuletzt aufgerufen am 26. 12. 2013)

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

**Abbildung 43:** Phasen des mikrobiellen Wachstums

**Abbildung 44:** Konidienträger

<http://chemieplanet.org/wiki/Datei:Penicillium-schematisch.jpeg> (zuletzt aufgerufen am 31. 1. 2014)

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

**Abbildung 45:** Sporangienträger

[http://www.hauswirtschaft.info/hygiene/r\\_stolonifer.php](http://www.hauswirtschaft.info/hygiene/r_stolonifer.php) (zuletzt aufgerufen am 31. 1. 2014)

**Abbildung 46:** Ascospore

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/42/Hypomyces\\_chryso-spermus.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/42/Hypomyces_chryso-spermus.jpg) (zuletzt aufgerufen am 25. 7. 2014)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Public\\_domain](http://en.wikipedia.org/wiki/Public_domain)

**Abbildung 47:** Zygosporie

<http://www.biology-resources.com/drawing-fungi-06-rhizopus-4.html> (zuletzt aufgerufen am 31. 1. 2014)

**Abbildung 48:** Petrischalen

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Agar\\_Plate.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Agar_Plate.jpg) (zuletzt aufgerufen am 25. 7. 2014)

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en>

**Abbildung 49:** Berechnung des Schimmelpilzbefalls

**Abbildung 50:** Tag 2 (Früh)

**Abbildung 51:** Tag 3 (Früh)

**Abbildung 52:** Tag 3 (Abend)

**Abbildung 53:** Tag 4 (Früh)

**Abbildung 54:** Tag 4 (Abend)

**Abbildung 55:** Tag 5 (Früh)

**Abbildung 56:** Tag 5 (Abend)

**Abbildung 57:** Tag 6 (Früh)

**Abbildung 58:** Tag 7 (Früh)

**Abbildung 59:** Tag 7 (Abend)

**Abbildung 60:** Tag 8 (Früh)

**Abbildung 61:** Tag 8 (Abend)

**Abbildung 62:** Tag 9 (Früh)

**Abbildung 63:** Tag 9 (Abend)

**Abbildung 64:** Tag 10 (Früh)

**Abbildung 65:** Tag 10 (Abend)

**Abbildung 66:** Tag 11 (Früh)

**Abbildung 67:** Tag 11 (Abend)

**Abbildung 68:** Tag 12 (Früh)

**Abbildung 69:** Tag 13 (Früh)

**Abbildung 70:** Tag 14 (Früh)

**Abbildung 71:** Tag 15 (Früh)

**Abbildung 72:** Tag 16 (Früh)

**Abbildung 73:** Tag 17 (Früh)

**Abbildung 74:** Tag 18 (Früh)

**Abbildung 75:** Tag 19 (Früh)

**Abbildung 76:** Tag 20 (Früh)

**Abbildung 77:** Tag 21 (Früh)

**Abbildung 78:** Tag 22 (Früh)

**Abbildung 79:** Tag 23 (Früh)

**Abbildung 80:** Schimmelpilzwachstum – Probe 1

**Abbildung 81:** Schimmelpilzwachstum – Probe 3

**Abbildung 82:** Schimmelpilzwachstum – Probe 5

**Abbildung 83:** Schimmelpilzwachstum – Probe 7

**Abbildung 84:** Schimmelpilzbefall – Probe 1

**Abbildung 85:** Schimmelpilzbefall – Probe 3

**Abbildung 86:** Schimmelpilzbefall – Probe 5

**Abbildung 87:** Schimmelpilzbefall – Probe 7

# Tabellenverzeichnis

**Tabelle 1:** Makro- und Mikroelemente

**Tabelle 2:** alle Proben und deren Umweltbedingungen

**Tabelle 3:** Schimmelpilzentwicklung der unterschiedlichen Proben

# Lebenslauf



## Angaben zur Person

Name: Kerstin Wolf  
Geburtsdatum: 29. Jänner 1996  
Geburtsort: Mödling  
Staatsbürgerschaft: Österreich  
Religionsbekenntnis: römisch-katholisch

## Familie

Vater: Thomas Wolf, KFZ-Sachverständiger und Führerscheinprüfer  
Mutter: Gabriele Wolf, kaufmännische Angestellte und Hausfrau  
Geschwister: Natalie Wolf (15), Tobias Wolf (8)

## Schulbildung

2002 - 2006: Volksschule Furth  
seit 2006: BG Rechte Kremszeile (Schwerpunkt Sport)  
derzeit Besuch der 8. Klasse

## Zusatzzertifikate & Ausbildungen

- Unternehmerführerschein Modul A
- Teilnahme am Intensivkurs „Astrophysik“ (im „Talentezentrum NÖ Schloss Drosendorf“)
- Teilnahme am Europaforum (Stift Göttweig)
- Ausbildung zum Fitlehrwart (Bundessportakademie Wien)
- NÖ Jugendsportabzeichen der Leistungsstufe Gold
- Helferschein im Schwimmen
- 16-stündiger Erste-Hilfe-Kurs
- B-Führerschein
- Schnupperpraktikum an der IMC FH Krems
- Praktikum: „Kinderturnen“ in der Volksschule Furth
- Praktikum in der Caritaswerkstätte Furth

## Interessen

- Sport betreiben: Reiten, Schwimmen, Rad fahren,...
- mit der Familie bzw. mit Freunden etwas unternehmen
- Gitarre und Flöte spielen

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die geduldig meine Launen ertragen haben und mir stets zur Seite gestanden sind, Herrn Prof. MMag. Kittel, der mich bei der Erstellung dieser Fachbereichsarbeit begleitet und unterstützt hat und all meinen Freunden und Verwandten, die mich ermutigt und mich auch in schwierigen Situationen immer wieder aufgerichtet haben.



**„Ich erkläre, dass ich diese Fachbereichsarbeit ausschließlich selbst und ohne Gebrauch unerlaubter Hilfsmittel oder Hilfen verfasst habe.“**

29. Jänner 2014

Kerstin Wolf

**„Ich bin damit einverstanden, dass meine Fachbereichsarbeit im Internet öffentlich zugänglich gemacht wird und somit über Internet weltweit abrufbar ist.“**

31. Jänner 2014

Kerstin Wolf

**„Ich habe alle Abbildungen, die ich in dieser Fachbereichsarbeit verwendet habe, entweder selbst erstellt oder die Erlaubnis der Urheber bezüglich der Verwendung der Bilder eingeholt.“**

26. Juli 2014

Kerstin Wolf