Aufgabe 26 : Kontrollfragen

a) Wodurch unterscheidet sich eine Zwangskraft von einer eingeprägten Kraft?

b) Was sind die mechanischen Probleme beim Rückwärts-Einparken?

c) Was sind mechanische Freiheitsgrade?

d) Was besagt das d'Alembert-Prinzip?

Aufgabe 27 : Nichtholonome Zwangsbedingungen

$\mathrm{d}f$ ist „vollständiges Differenzial", wenn

$$\mathrm{d}f(x_1, x_2, \dots) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i, \quad \text{mit} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

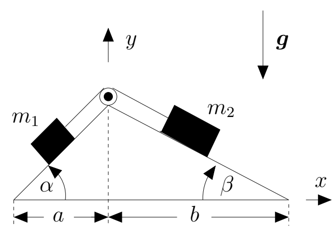
Gemäß Vorlesung lauten die beiden differenziellen Nebenbedingungen für die rollende Kreisscheibe

$$\mathrm{d}f_1(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, \theta, \varphi, \psi) = \mathrm{d}x_\mathrm{A} + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\psi,$$
$$\mathrm{d}f_2(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, \theta, \varphi, \psi) = \mathrm{d}y_\mathrm{A} + r\sin\varphi\,\mathrm{d}\psi.$$

Sind die Differenziale $\mathrm{d}f_1$ und $\mathrm{d}f_2$ vollständig? Auch holonome Zwangsbedingungen lassen sich differenziell schreiben. Was gilt in diesem Fall? (2 Punkte)

Aufgabe 28 : Gekoppelte Schwingungen

Zwei Massen m_1 und m_2 sollen reibungsfrei auf einer Doppelschiefebene gleiten und durch einen Faden der Länge l über eine Rolle verbunden sein (siehe Abbildung). Die Schwerkraft wirke in Richtung der negativen y-Achse ($\boldsymbol{g} = -g\,\boldsymbol{e}_y$). Betrachten Sie dabei beide Massen als punktförmig, die endliche Ausdehnung der Massen und der Umlenkrolle dienen nur der graphischen Darstellung und sollen vernachlässigt werden.

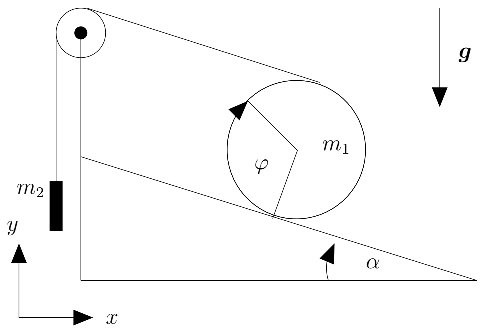


a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System? Geben Sie die Zwangsbedingungen an und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. Verwenden Sie dazu den Lagrangeformalismus 1. Art. Deuten Sie die Zwangskräfte auch geometrisch. (3 Punkte)

b) Eliminieren Sie dann aus diesen Gleichungen die Zwangskräfte und geben Sie damit die Bewegungsgleichungen für die unabhängige Koordinate x_1 an. (2 Punkte)

Aufgabe 29 : Rad auf schiefer Ebene mit Lagrange 1. Art

Um ein Rad mit Radius R und der Masse m_1, welche vollständig im Schwerpunkt konzentriert sein soll (sodass die Rotationsenergie vernachlässigt werden kann), ist ein dünner Faden gewickelt, der um eine kleine trägheitslose Rolle geführt wird und mit der Masse m_2 verbunden ist (siehe Skizze). Das Rad rollt reibungsfrei und ohne Schlupf, das Gravitationsfeld $\boldsymbol{g}$ ist homogen.



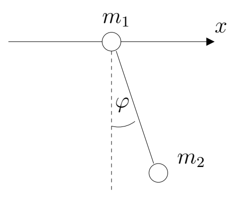
a) Welche äußeren Kräfte wirken in dem System? Wie lauten die Zwangsbedingungen? (2 Punkte)

b) Verwenden Sie als verallgemeinerte Koordinaten die Koordinaten des Schwerpunktes des Rades $x_{1\mathrm{s}}$, $y_{1\mathrm{s}}$ sowie φ und y_2. Geben Sie die Lagrangegleichungen 1. Art für diese Koordinaten an. (2 Punkte)

Aufgabe 30 : Ebenes Pendel mit beweglicher Aufhängung (schriftlich)

Eine Masse m_2 pendle in einer Ebene unter dem Einfluss der Schwerkraft an einer masselosen Stange der Länge l. Den Aufhängepunkt bilde eine Masse m_1, welche längs einer Schiene in horizontaler Richtung frei beweglich sei (siehe Skizze).

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion für dieses System auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab (empfohlene Koordinaten x, φ). (2 Punkte)



b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Winkelausschläge φ und bestimmen Sie die Schwingungsfrequenz. Welche Bewegung führt die Masse aus?
Hinweis: Für $\varphi \ll 1$ gilt $\dot{\varphi}^2\varphi \ll \ddot{\varphi}$, da sowohl $\dot{\varphi}$ als auch $\ddot{\varphi}$ bei harmonischen Lösungen von der Amplitude φ_0 abhängen. (2 Punkte)